Examen du 16 mai 2005
(9 heures – 13 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Exercice (6 points)
Soit A la matrice carrée d'ordre 2
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) i) Diagonaliser A.
ii) Calculer e^{xA} pour tout x réel.

b) Résoudre le système d'équations différentielles
$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases}$$
avec les conditions initiales $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 3$.

Problème (14 points)
On note $E = \mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur l'intervalle $[0,\pi]$, à valeurs réelles.
Pour f et g éléments de E on pose
$$\langle f \,|\, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)g(t)dt$$
ce qui définit un produit scalaire sur E et une norme associée notée $\|\ \|$. On a donc une structure d'espace préhilbertien réel sur E.
Soit $\Phi = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E. On suppose que Φ est orthonormale, c'est-à-dire que $\langle \varphi_n \,|\, \varphi_m\rangle = 0$ pour $m \neq n$ et $\|\varphi_n\| = 1$ pour tout n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :
– V_n (ou $V_{n,\Phi}$ s'il y a risque de confusion), le sous-espace vectoriel (de dimension $n+1$) de E engendré par le fonctions $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$;
– P_n (ou $P_{n,\Phi}$ s'il y a risque de confusion), la projection orthogonale de E sur le sous-espace vectoriel V_n ;
– $d_n(f)$ (ou $d_{n,\Phi}(f)$), la distance de $f \in E$ au sous-espace V_n.
On rappelle que la suite Φ est totale dans E si le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions φ_n, $n \in \mathbb{N}$, est dense dans E et on dit alors que Φ est une base orthonormale (ou base hilbertienne) de l'espace préhilbertien E.
On note également, pour $n \in \mathbb{N}$
$$C_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2}\cos(nx) & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad ; \quad S_n(x) = \sqrt{2}\sin((n+1)x)$$
et on pose $C = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On remarquera que ces fonctions C_n et S_n, sont $2\pi-$périodiques, mais l'intervalle $[0,\pi]$ est de longueur π. On notera de la même manière les restrictions de ces fonctions à l'intervalle $[0,\pi]$.

I - Etude des suites orthonormales.

Dans cette partie, Φ est une suite orthonormale de E, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$.

I-1. Montrer que $\|f\|^2 = \|P_n(f)\|^2 + d_n(f)^2$.

T.S.V.P. ▶▶▶

I-2. Calculer $\sup_{\|f\|=1} \|P_n(f)\|$.

I-3. Expliciter $P_n(f)$ dans la base orthonormée $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ de V_n. En déduire que la série de terme général $\langle \varphi_k \mid f \rangle^2$ est convergente et retrouver l'inégalité de BESSEL

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi_k \mid f \rangle^2 \leqslant \|f\|^2$$

I-4. On note V_Φ l'espace vectoriel engendré par toutes les fonctions φ_n, $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions φ_n. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de V_Φ qui converge dans E vers f.
Montrer que pour tout k fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \qquad f - P_n(f) = f - f_k + P_n(f_k - f)$$

et en déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n(f) - f\| = 0$$

I-5. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :
a) Φ est une base orthonormale de E ;
b) Pour toute $f \in E$, $\lim_{n\to\infty} \|P_n(f) - f\| = 0$

II - Les suites C et S.

II-1. Montrer que les suites C et S sont des suites orthonormales de E, mais que les fonctions S_n ne sont pas en général orthogonales aux fonctions C_m.

II-2. Soit $f \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction F, $2\pi-$périodique, paire, continue et telle que sa restriction à $[0,\pi]$ soit égale à f.

II-3. Ecrire la série de FOURIER réelle de F à l'aide des fonctions de C et des produits scalaires de C_n et f.

II-4. En déduire que la suite C est une base orthonormale de E. [On pourra utiliser l'égalité de PARSEVAL dans $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$.]

III - Sur les polynômes de LEGENDRE.

Pour tout réel x et tout entier n on note :

$$U_n(x) = (x^2-1)^n \ ; \qquad P_n = \frac{d^n(U_n)}{dx^n} \ ; \qquad L_n = \frac{1}{2^n n!} P_n$$

Pour la suite du problème on supposera connues les relations suivantes :

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \qquad \text{si } m \neq n$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}$$

III-1. Déterminer les réels strictement positifs α_n tels que la suite $Q = (Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par

$$x \in [0,\pi], \qquad Q_n(x) = \alpha_n L_n\left(2\frac{x}{\pi} - 1\right)$$

soit orthonormale.

III-2. Soit $f \in E$. Montrer que la suite $(d_{n,Q}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (la définition de $d_{n,Q}(f)$ est donnée au début du problème).

III-3. Montrer que la suite Q est une base orthonormale de E.