Examen du 13 juin 2006
(9 heures – 13 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Exercice (4 points)

Soit H l'espace des fonctions réelles continues de $[-1,1]$ muni du produit scalaire $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Soient P et I les sous-espaces vectoriels de H formés des fonctions paires et impaires respectivement.

a) Montrer que $I = P^{\perp}$.

b) Posons $f_p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$. Montrer que $f \mapsto f_p$ est la projection orthogonale sur P.

Problème (16 points)

On désigne par E l'espace vectoriel constitué des fonctions φ réelles, continues et bornées sur $[0,+\infty[$, et telles que, pour tout réel x strictement positif, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{x^2+t^2}dt$$

soit convergente.

On convient de désigner, en abrégé, par $\mathbf{C}^\infty$ l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $]0,+\infty[$.

On étudie l'application linéaire S qui, à tout élément φ de E fait correspondre la fonction $S\varphi$ définie par

$$S\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{x^2+t^2}dt$$

1.1. Appartenance à E.

a – La fonction constante, égale à 1 sur $[0,+\infty[$, est-elle élément de E ?

b – Montrer que la fonction φ_1, définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi_1(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$, appartient à E.

c – Soit ψ une fonction continue sur $[0,+\infty[$, qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que ψ est bornée sur $[0,+\infty[$. Montrer que si ℓ n'est pas nulle, ψ n'appartient pas à E. Si $\ell = 0$, ψ appartient-elle à E ?

1.2. Étude de $S\varphi_1$. (cf. 1.1.b)

a – Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout couple de réels $(x,t) \neq (0,0)$, on ait :

$$\frac{t^2(1-x^2)}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{bx^2}{x^2+t^2} \qquad (1)$$

En déduire, pour $x \neq 1$, la valeur de $S\varphi_1(x)$.

b – Calculer $S\varphi_1(1)$. *(On pourra faire une intégration par parties ou utiliser le changement de variable défini par $t = \tan\theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$).*

c – Vérifier que $S\varphi_1$ appartient à $\mathbf{C}^\infty$.

1.2. Appartenance de $S\varphi$ à $\mathbf{C}^\infty$.

Dans cette question φ est un élément quelconque de E, k est un entier strictement positif. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on désigne par u_n la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$u_n(x) = \int_n^{n+1} \frac{t\varphi(t)}{x^2+t^2}dt$$

a – Montrer que $S\varphi$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

T.S.V.P. ▶▶▶

On propose de montrer que $S\varphi$ est k fois dérivable, pour tout entier k, en introduisant une série.

b – Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $S\varphi$.

c – Montrer que, pour tout entier n, la fonction u_n appartient à $\mathbf{C}^{\infty}$.

d – Déterminer deux nombres complexes α et β tels que, pour tout couple de réels $(x,t) \neq (0,0)$, on ait :

$$\frac{t}{x^2+t^2} = \frac{\alpha}{x-it} + \frac{\beta}{x+it} \tag{2}$$

Utiliser cette égalité pour calculer $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\dfrac{t}{x^2+t^2}\right)$ et en déduire que, pour tout couple de réels $(x,t) \neq (0,0)$, on a :

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\right| \leqslant \frac{k!}{(x^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$$

e – On note $u_n^{[k]}$ la dérivée k-ième de la fonction u_n. Soit a un réel strictement positif. Montrer qu'il existe une constante A_k telle que, pour tout $x \geqslant a$ et tout entier n, on ait :

$$|u_n^{[k]}| \leqslant A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2+t^2)^{\frac{k+1}{2}}}$$

En déduire que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{[k]}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

f – Prouver que la fonction $S\varphi$ appartient à $\mathbf{C}^{\infty}$ et que, pour tout entier $k > 0$, on a :

$$(S\varphi)^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2+t^2}\right)\varphi(t)dt \tag{3}$$