Examen du 21 juin 2005
(9 heures – 13 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Exercice 1 (6 points)

Soit $a \in]0, \pi[$. Soit f l'unique fonction paire, $2\pi-$périodique qui vérifie : $f(t) = 1 - \dfrac{t}{a}$ pour tout $t \in [0, a]$ et $f(t) = 0$ sur $]a, \pi]$.

a) Donner la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

b) Écrire l'égalité obtenue en appliquant la formule de Parseval à f.

c) Justifier le fait que cette égalité s'applique aussi pour $a = \pi$. Qu'est-ce qu'on obtient dans ce cas ?

Exercice 2 (4 points)

Étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$$

Problème (10 points)

On note f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$. Pour $\varepsilon > 0$ on pose

$$I_\varepsilon = \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(u)}{u} du$$

1) Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(u) - f(0)}{u} du = 0$$

En déduire la valeur de $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon$.

2) On suppose de plus que l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{f(u)}{u} du$$

est convergente.

Soit

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

T.S.V.P. ▶▶▶

Calculer $J(\varepsilon)$ à l'aide de $I(\varepsilon)$ et en déduire que l'intégrale

$$J_0 = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

est convergente et calculer sa valeur.

3) Application. Démontrer que l'intégrale

$$H(a,b) = \int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx$$

est convergente et calculer sa valeur.

De même déterminer, en justifiant les calculs

$$E(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

4) On se propose de calculer $E(a,b)$ par une autre méthode.

a) Montrer que E est dérivable par rapport à la variable a et calculer la valeur de cette dérivée.

b) En déduire la valeur de $E(a,b)$.