Université de Poitiers

Mathématiques

MATH5L12 **2005-2006**

Topologie et espaces métriques, Seconde session.

6 juin 2006 - 9 heures à 13 heures
aucun document n'est autorisé

Exercice 1 : *Définitions alternatives de la continuité.* Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$, où X, Y sont des espaces métriques. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue.
(ii) Pour toute partie A de X, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(iii) Pour toute partie B de Y, on a $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset [f^{-1}(B)]^{\circ}$.
(iv) Pour toute partie B de Y, on a $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Exercice 2 : *Sur la compacité.*

1) Les éléments d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ qui converge vers l forment t-ils un ensemble compact ? Est ce que $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un ensemble compact ?

2) On admet que pour tout rationnel r, $\sqrt{2} + r\sqrt{3}$ est irrationnel. Trouver un ensemble compact de $\mathbb{R}$ de cardinal infini composé uniquement d'irrationnels.

3) Trouver un ensemble compact de cardinal infini et composé uniquement de rationnels.

Exercice 3 : *Isomorphismes.* Les cercles, rectangles et disques de la suite sont supposés munis de la topologie induite du fait de leur inclusion dans le plan euclidien.

1) Existe t-il une bijection continue entre un cercle et un rectangle ? Justifier.

2) Existe t-il une bijection continue entre un cercle et un disque ? Justifier.

3) Difficile. Montrer (au moins de façon intuitive) qu'une application continue et injective d'un cercle dans lui-même est forcément surjective.

Exercice 4 : *Complétude.* Un espace métrique compact est-il complet ? Justifier. Donner, en le justifiant, un exemple d'espace métrique complet mais non compact. Donner, en le justifiant, un exemple d'espace vectoriel normé de dimension infinie qui est complet, et un exemple d'espace vectoriel normé de dimension infinie qui ne l'est pas.

T.S.V.P. ▶▶▶

Exercice 5 : *Espaces vectoriels normés.* Soit $(E, \| \cdots \|)$ un espace vectoriel normé. Soit B la boule unité fermée, c'est à dire l'ensemble des éléments de E de norme inférieure ou égale à 1. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé de E. On rappelle que la distance d'un point $x \in E$ à F est définie comme suit $d(x, F) = \inf\limits_{y \in F} d(x, y)$.

1) Montrer que pour tout $x \in E$, on a $d(x, F) \leqslant \| x \|$

2) En manipulant soigneusement les bornes inférieures, montrer que pour tout λ réel, on a la relation $d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F)$.

3) Montrer que pour tout $y \in F$, on a $d(x + y, F) = d(x, F)$.

4) On suppose dorénavant que $F \neq E$. Montrer qu'il existe $x \in B$ tel que $d(x, F) \neq 0$.

5) Soit $x \in F$ tel que $d(x, F) = \alpha \neq 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $y \in F$ tel que $\| x - y \| \in [\alpha, \alpha(1 + \varepsilon)[$.

6) Soit $x' = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ (où y est comme dans la question précédente). Montrer que

$$d(x', F) > \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

7) En déduire que pour tout espace vectoriel fermé de E distinct de E, on a

$$\sup_{y \in B} d(y, F) = 1.$$