Examen du 14 juin 2005
(9 heures – 12 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Exercice 1 (6 points)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et f une application de E dans F. On note

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$$

le graphe de f.

1) Montrer que si f est continue, alors $\mathrm{Gr}(f)$ est fermé dans $E \times F$.

2) Prouver la réciproque lorsque $f(E)$ est inclus dans un compact de F.

3) Donner un contre-exemple à la propriété précédente si $f(E)$ n'est pas inclus dans un compact de F.

Exercice 2 (5 points)

1) Montrer que tout espace métrique dont toute boule fermée est compacte est un espace métrique complet. Donner, en justifiant la réponse, un exemple d'espace métrique ayant cette propriété et un exemple pour lequel cette propriété n'est pas vérifiée.

2) Montrer que si toute boule fermée d'un espace métrique (E, d) est compacte, les sous-ensembles compacts de (E, d) sont les fermés bornés.

Problème (9 points)

Soient (X, d_1) et (Y, d_2) deux espaces métriques. Une application φ est une isométrie de X dans Y si

$$\forall (x, y) \in X \times X \qquad d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = d_1(x, y)$$

1) On considère un ensemble quelconque E, un espace métrique (F, d) et une bijection φ de E sur F. Montrer que l'application δ

$$\forall (x, y) \in E \times E \qquad \delta(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y))$$

est une distance sur E et que φ est une isométrie de (E, δ) sur (F, d).

2) Pour tout x réel, on pose

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

Prouver que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

3) On note $\{-\infty, +\infty\}$ un ensemble à 2 éléments et $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On prolonge f à l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ en posant

$$\overline{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}, \text{ et } \overline{f}(-\infty) = -1, \ \overline{f}(+\infty) = 1$$

Prouver que l'application δ définie par

$$\delta(x, y) = \left|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right|$$

est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$.

4) L'espace métrique $\overline{\mathbb{R}}$ est-il compact ? complet ? connexe ?