Examen du 14 décembre 2005
(9 heures – 12 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Exercice (6 points)

- 1) Soit $f : X \mapsto Y$ un homéomorphisme. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tous x, y appartenant à X , on ait $d(x, y) \leq a \cdot d(f(x), f(y))$. Montrer que si X est complet, alors Y l'est aussi.
- 2) L'application $f : X \mapsto Y$ est toujours un homéomorphisme et on suppose de plus que f est une application uniformément continue. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi.

Problème (14 points)

On note (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X . Dans les parties **II** et **III** l'espace X est supposé compact et dans la partie **III** la suite vérifie une condition supplémentaire. Dans la partie **I**, on établit des propriétés utiles dans les parties **II** et **III**.

I.1 Soit A et B deux parties de X et x, y deux points de X . Montrer que

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

puis que

$$d(A, B) \leq d(x, A) + d(x, y) + d(y, B)$$

Dans toute la suite du problème, F désigne l'ensemble des points de X qui sont des limites de suites extraites convergentes de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on pose

$$A_n = \{x_p ; p \geq n\}$$

I-2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F est inclus dans l'adhérence $\overline{A_n}$ de A_n .

I-3. Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$. Construire par récurrence une sous-suite $(x_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_{n_p} \in A_{n_p}$ et $d(x_{n_p}, x) \leq \frac{1}{p+1}$. En déduire que $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$ et que F est fermé.

I-4. L'ensemble F peut-il être vide ? Justifier.

II. On suppose que l'espace métrique X est compact et F est toujours défini comme au **I**. Montrer que F est non vide.

On note F_1 et F_2 , deux parties fermées de F , disjointes et non vides.

II-1. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $y_1 \in F_1$ et tout $y_2 \in F_2$ on ait $d(y_1, y_2) \geq k$.

T.S.V.P. ▶▶▶

II-2. On pose

$$K = \left\{ y \in X; d(y, F_1 \cup F_2) \geq \frac{k}{3} \right\}$$

Prouver que K est compact.

II-3. Soit m un entier positif. Montrer qu'il existe des entiers positifs n_1, n_2 tels que

$$m \leq n_1 < n_2 \quad \text{et} \quad d(x_{n_1}, F_1) < \frac{k}{3}, \quad d(x_{n_2}, F_2) < \frac{k}{3}$$

III. Jusqu'à la fin du problème, on suppose que la suite de réels positifs $(d(x_n, x_{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

III-1. En utilisant **II-3**, montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $n > m$ tel que

$$d(x_{n+1}, x_n) < \frac{k}{3} \quad d(x_n, F_1) < \frac{k}{3} \quad \text{et} \quad d(x_{n+1}, F_1) \geq \frac{k}{3}$$

En déduire qu'il existe, pour tout m , un entier $n > m$ tel que $x_n \in K$. [On pourra considérer $n = \max\{p; n_1 \leq p \leq n_2 \text{ et } d(x_p, F_1) < \frac{k}{3}\}$.]

III-2. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont tous les termes sont dans K .

III-2. En déduire que F est connexe.