Examen du 14 décembre 2004
(9 heures – 12 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Exercice (6 points)
Soient $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],[a,b])$ (fonctions continues de $[a,b]$ dans lui-même).
a) Montrer que f possède au moins un point fixe.
b) On suppose que f est un homéomorphisme de $[a,b]$ sur lui-même. Montrer que, ou bien $f(a)=a$ et $f(b)=b$, ou bien $f(a)=b$ et $f(b)=a$.

Problème (14 points) (*La partie* **III** *est indépendante de* **I** *et* **II**).
On note :
– ℓ^1 l'espace de Banach des suites $s=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|x_n|$ soit convergente.

$$\ell^1 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ ; \ \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

– ℓ^∞ l'espace vectoriel normé des suites bornées $b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels.

$$\ell^\infty = \left\{ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \ ; \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n| < \infty \right\}$$

– On désigne par c_0 le sous espace vectoriel de ℓ^∞ constitué des suites dont la limite est nulle.
– Si $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ la norme de x est $\|x\| = \sum\limits_{n=0}^{\infty}|x_n|$. La norme de $b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ est $\|b\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|b_n|$
– Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $e_n=(\delta_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ est la suite telle que $\delta_{n,n}=1$ et $\delta_{n,p}=0$ si $n\neq p$.

I – Une application linéaire continue.

I-1. Soient $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1$ et $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty$. Montrer que $(a_nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^1. On pose $\varphi_a(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_n$. Justifier la convergence de cette série.

I-2. Montrer que l'application $\varphi_a : x\mapsto\varphi_a(x)$ de ℓ^1 dans $\mathbb{R}$, définie à la question I-1, est linéaire et continue.
Dans la suite on notera $E=\mathcal{L}_c(\ell^1,\mathbb{R})$ l'espace des applications linéaires continues de ℓ^1 dans $\mathbb{R}$ (formes linéaires continues).

I-3. Montrer que pour tout $a\in\ell^\infty$, on a $\|\varphi_a\|=\|a\|_\infty$ et que $\varphi : a\mapsto\varphi_a$ est une isométrie linéaire de ℓ^∞ dans E.

T.S.V.P. ▶▶▶

II – Surjectivité de φ.

On prouve dans cette partie du problème que φ est surjective.

II-1. Soit $u \in E$ une forme linéaire continue sur ℓ^1. On pose, pour n entier, $a_n = u(e_n)$. Montrer que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^∞. Trouver un majorant de $\|a\|_\infty$.

II-2. La suite $a \in \ell^\infty$ est toujours celle de la question **II-1**. Soit $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. On pose pour $N \in \mathbb{N}$

$$s_N = \sum_{k=0}^{N} x_k e_k$$

Calculer $u(s_N)$, montrer que la suite $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers s dans ℓ^1 et en déduire que

$$u(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$$

II-3. En conclure que φ est un isomorphisme linéaire isométrique de ℓ^∞ sur E et que ℓ^∞ est un espace de Banach.

III – Séries de fonctions.

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$.

III-1. Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}$ est uniformément convergente pour $x \in \mathbb{R}$. On note $f_a(x)$ sa somme pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f_a est continue et bornée.

III-2. Montrer que l'application linéaire $a \mapsto f_a$ de ℓ^1 dans l'espace $\mathcal{C}_B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions continues bornées, muni de la norme uniforme, est continue. Quelle est la norme de cette application ?

III-3. Trouver une condition sur $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui assure que f_a est une fonction dérivable, et donner alors une expression de la dérivée f'_a.

III-4. En notant toujours f_a la somme de la série de fonctions du **III-1**, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_a(t) e^{-int}\, dt$$

III-5. Dans cette question on munit ℓ^1 de la norme induite par celle de ℓ^∞. Montrer que l'application $a \mapsto f_a$ n'est pas continue. (On pourra étudier la suite $a_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{e_k}{k}$.)