N° d'ordre : 216-2000 Année 2000

THÈSE

présentée

devant l'**UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1**

pour l'obtention

du **DIPLÔME DE DOCTORAT**

(arrêté du 30 mars 1992)

soutenue publiquement le 10 novembre 2000 par

Olivier FRÉCON

Spécialité : MATHÉMATIQUES PURES

ÉTUDE DES GROUPES RÉSOLUBLES DE RANG DE MORLEY FINI

Rapporteurs : M. Gregory CHERLIN
M. Peter HAUCK

Jury : M. Alexandre V. BOROVIK
M. Otto H. KEGEL
M. Bruno POIZAT, directeur de thèse
M. Lluís PUIG
M. Frank O. WAGNER
M. John S. WILSON

Remerciements

Je tiens vivement à remercier Bruno Poizat et Tuna Altınel pour avoir dirigé mes travaux. Je remercie Bruno Poizat pour m'avoir posé des questions qui ont permis des avancées importantes dans ma thèse. Depuis le DEA, Tuna Altınel suit de très près mes recherches, et a toujours été très disponible. Son dévouement et ses encouragements m'ont apporté une aide très précieuse depuis le début. Je voudrais lui dire toute ma reconnaissance.

J'exprime ma profonde gratitude à Gregory Cherlin et Peter Hauck, qui ont accepté d'être rapporteurs, et ont eu la patience de lire ma thèse. Aussi, je remercie Otto H. Kegel de m'avoir mis en contact avec Peter Hauck, ainsi que pour l'intérêt qu'il a accordé à mes recherches.

Je suis également très reconnaissant envers Alexandre V. Borovik et Frank O. Wagner pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Que soient remerciés Lluís Puig et John S. Wilson pour l'honneur qu'ils me font de participer à mon jury.

Mes remerciements s'adressent aussi à toutes les personnes que j'ai cotoyées durant mes deux années de thèse à l'Institut Girard Desargues. Plus particulièrement, je remercie Eric Jaligot pour les nombreux échanges constructifs que nous avons eus.

Je remercie l'ensemble de mes proches pour tout le soutien apporté durant ces années d'études. Enfin, et surtout, pour m'avoir tant soutenu toutes ces années, un immense merci à Stéphanie.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Les groupes de rang de Morley fini sont, d'un point de vue modèle-théorique, les groupes qui vérifient les conditions maximales de stabilité. En particulier, on peut leur associer une notion de dimension abstraite : le *rang de Morley*. Les groupes de rang de Morley fini peuvent aussi être vus comme une généralisation des groupes algébriques : un groupe de rang de Morley fini est un groupe muni d'une dimension analogue à la dimension de Zariski, mais il n'agit pas nécessairement sur un espace vectoriel. Notamment, il n'y a pas un corps donné par avance qui permette de retrouver la structure du groupe.

L'étude des groupes de rang de Morley fini a commencé dans les années soixante-dix avec les travaux de A. Macintyre sur les groupes abéliens [49] et sur la théorie des corps [50]. Les années suivantes, la théorie s'est développée sous l'influence de Cherlin, Zil'ber, Poizat, Nesin, Borovik.... Comme nous le verrons dans la section 1.1, B. Poizat a obtenu une axiomatisation de la notion de groupe de rang de Morley fini. Il est donc désormais possible d'étudier les groupes de rang de Morley fini d'une façon très algébrique, en utilisant essentiellement des techniques provenant de la théorie des groupes finis.

La grande majorité des personnes qui travaillent sur le sujet essaient de classifier les groupes simples et infinis de rang de Morley fini. Plus précisément, ils cherchent à savoir si la conjecture de Cherlin-Zil'ber est vraie :

Conjecture de Cherlin-Zil'ber : Tout groupe simple et infini de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

Nous ne travaillons pas à cette conjecture, qui constitue habituellement le point central des études concernant les groupes de rang de Morley fini. Cependant, certains résultats du chapitre 2 ont déjà eu des applications dans des travaux concernant la conjecture de Cherlin-Zil'ber (cf. travaux de Eric Jaligot, [43]). Il est prévisible que les résultats du chapitre 2 auront beaucoup plus d'applications pour la conjecture de Cherlin-Zil'ber lorsque seront étudiés les FT-groupes simples[1] avec des 2-sous-groupes de Sylow finis, ce qui correspond à la recherche d'un analogue du théorème de Feit-Thompson pour les groupes infinis de rang de Morley fini.

Nous allons analyser les groupes de rang de Morley fini *résolubles*. Nous étudierons d'abord ceux qui sont *connexes* (chapitre 2). Leur comportement est très particulier, et l'analyse des groupes non connexes se fait de façon fort différente. Ceci s'illustre notamment par l'étude des *sous-groupes de Carter*, lesquels sont définis comme étant les sous-groupes localement nilpotents et autonormalisants. Un phénomène remarquable se produit : pour analyser les

[1]Groupe simple et infini de rang de Morley fini dont les sous-groupes définissables, connexes et propres maximaux sont tous résolubles

sous-groupes de Carter des groupes non connexes (et, plus généralement, la structure des groupes non connexes), nous devons renoncer à rester dans un contexte *définissable*. Nous introduisons la classe des sous-groupes *localement clos* (définition 3.1.1), ce qui correspond à une notion de définissabilité locale, et nous pouvons alors mieux comprendre la structure des groupes non connexes (chapitre 3). Ensuite, une analyse plus poussée des groupes non connexes nous amènera à considérer de nouvelles notions de *sous-groupes de Hall* (chapitre 4). Finalement, nous pourrons développer deux théories des formations : une pour les groupes connexes, et une pour les groupes non connexes. Ces théories unifient des résultats d'apparence très différentes, qui sont énoncés plus tôt dans la thèse (chapitre 5). Nous présentons brièvement le contenu de chaque chapitres.

Le chapitre 1 contient la liste de presque tous les résultats utilisés au cours de la thèse. Toutefois, il y a quelques exceptions : certains faits utilisés seulement une ou deux fois dans le texte n'avaient pas leur place dans ce chapitre, et sont donc énoncés à l'endroit où ils sont utilisés. Dans la section 1.1, on explique en détail ce qu'est un groupe de rang de Morley fini.

Le chapitre 2 est consacré à l'analyse des groupes de rang de Morley fini résolubles et *connexes*. Nous étudions notamment les sous-groupes de Carter. Dans le contexte des groupes connexes, l'étude se fait à partir des *sous-groupes anormaux* : un sous-groupe H d'un groupe G est *anormal* si $g \in \langle H, H^g \rangle$ pour tout $g \in G$. Nous donnons l'équivalence des sous-groupes anormaux minimaux et des sous-groupes de Carter dans le contexte des groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles (théorème 2.4.7). Nous analysons aussi les *centralisateurs généralisés* (définition 2.4.1) et le *radical quasiunipotent* (définition 2.7.4), qui constituent des notions importantes pour la suite. Le contenu des sections 2.1 à 2.6 a fait l'objet d'une publication à *Journal of Algebra* [31]. Aussi, la section 2.7 constitue une partie de l'article [32].

Dans le chapitre 3, on introduit une nouvelle classe de sous-groupes des groupes de rang de Morley fini : les *sous-groupes localement clos*. Cette classe de sous-groupes contient les sous-groupes définissables. Son introduction va nous permettre une analyse assez fine des groupes de rang de Morley fini résolubles *non connexes*. Notamment, nous allons pouvoir montrer que tout groupe de rang de Morley fini résoluble possède une unique classe de conjugaison de sous-groupes de Carter (théorème 3.6.6). Aussi, nous montrerons que les sous-groupes localement clos non triviaux possèdent des sections localement closes minimales normales (proposition 3.5.7). Cette propriété est fondamentale pour la suite. Par soucis de généralité, mais aussi pour montrer que cette classe de sous-groupes pourrait être utile pour analyser les groupes de rang de Morley fini non connexes et non résolubles, nous essayons de ne pas toujours nous restreindre aux groupes résolubles. Les sous-groupes localement clos ont été introduits dans [32], et l'essentiel des résultats du chapitre sont contenus dans l'article [30], lequel a été soumis à *Journal of Algebra*.

Le chapitre 4 concerne deux généralisations de la notion de *sous-groupe de Hall*. Les *π-sous-groupes de Hall* (ce sont les π-sous-groupes maximaux des groupes finis résolubles, pour π un ensemble d'entiers premiers) sont des objets d'une importance fondamentale en théorie des groupes finis résolubles. Leur conjugaison a été prouvée dans [4] pour les groupes de rang de Morley fini résolubles (et même, dans le contexte plus général des groupes ω-stables résolubles). Nous considérons ∞ comme un entier premier, et nous introduisons les notions de *π-sous-groupe de Hall généralisés* et de *sous-groupes π-couvrants de Hall* pour π un ensemble d'entiers premiers contenant éventuellement ∞. Ces notions généralisent la notion habituelle de sous-groupe de Hall. Les principaux résultats du chapitre 4 concernent la conjugaison des π-sous-groupes de Hall généralisés (théroème 4.1.18), et celle des sous-groupes π-couvrants de Hall (théorème 4.4.9). Nous montrerons aussi des analogues au théorème de Schur-Zassenhaus pour les sous-groupes de Hall généralisés (théorèmes 4.2.4 et 4.2.6), ce qui nous permettra d'analyser les sous-groupes de Hall généralisés dans les groupes quotients (corollaire 4.2.8). Nous poussons plus loin notre analyse des sous-groupes de Hall généralisés et des sous-groupes couvrants de Hall, et nous étudions les *bases de Sylow généralisés* et les *bases de Sylow couvrantes*. Celles-ci sont conjuguées (théorèmes 4.3.8 et 4.4.17). Le contenu des sections 4.1 à 4.3 sera publié à *Journal of Algebra* (article [32]), et la section 4.4 est une partie de [29].

La *théorie des formations* a eu un rôle très important dans le développement de la théorie des groupes finis résolubles. En effet, elle a donné un langage commun pour des résultats fondamentaux, mais aussi très distincts, de la théorie des groupes finis résolubles tels que le théorème de conjugaison des sous-groupes de Hall (cf. [69], p.250 th. 9.1.7) et celui d'existence et de conjugaison des sous-groupes de Carter (cf. [17]). Dans le chapitre 5, nous donnons un analogue de cette théorie pour les sous-groupes localement clos des groupes de rang de Morley fini résolubles. La plupart des résultats des chapitres précédents sont utilisés. Le théorème 5.3.14 unifie plusieurs résultats prouvés plus tôt dans la thèse, notamment le théorème d'existence et de conjugaison des sous-groupes de Carter et le théorème de conjugaison des π-sous-groupes de Hall lorsque π est un ensemble d'entiers premiers.

Les fortes particularités des groupes connexes font que l'on peut obtenir une théorie des formations spécifique aux groupes connexes, très différente de celle donnée pour les sous-groupes localement clos. Cette théorie, appelée *théorie des formations connexes*, est similaire à la théorie des formations des groupes finis établie par W. Gaschütz [34]. Dans la dernière section, nous montrons que la théorie des formations connexes a des liens avec la théories des formations des sous-groupes localement clos (proposition 5.6.5).

La théorie des formations pour les sous-groupes localement clos fait l'objet de [29]. La théorie des formations connexes constitue une partie de [31].

Nous finissons par un chapitre où sont écrites des questions que l'on se pose à la suite de cette thèse, ainsi qu'un rappel de certaines conjectures concernant les groupes de rang de Morley fini (résolubles).

Chapitre 1

Prérequis

Les quatre livres auxquels nous nous réfèrerons le plus souvent sont [69] pour la théorie des groupes en général, [10] et [64] pour les groupes de rang de Morley fini, et [80] pour des résultats plus généraux, concernant notamment les $\mathcal{M}_c$-*groupes* (définition 1.1.9) et les groupes stables.

Les notions et notations de ce chapitre sont toujours empruntées à l'un de ces quatre livres.

Pour tout groupe G, on note $G^0 = G^{(0)} = G$, pour tout ordinal i, $G^{i+1} = [G, G^i]$ et $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$ et, pour tout ordinal limite j, $G^j = \bigcap_{i<j} G^i$ et $G^{(j)} = \bigcap_{i<j} G^{(i)}$. Aussi, on note $G' = G^1 = G^{(1)}$ le sous-groupe *dérivé* de G.

Pour tout groupe G on note $Z(G) = C_G(G)$ le *centre* de G. Pour tout ordinal i on définit $Z_i(G)$: on note $Z_0(G) = 1$, pour tout ordinal j, $Z_{j+1}(G)/Z_j(G) = Z(G/Z_j(G))$ et, pour tout ordinal limite μ, $Z_\mu(G) = \bigcup_{j<\mu} Z_j(G)$. Alors il existe un plus petit ordinal α tel que $Z_\nu(G) = Z_\alpha(G)$ dès que ν est supèrieur ou égal à α. On note $Z_\infty(G) = Z_\alpha(G)$ et $Z_\infty(G)$ est appellé l'*hypercentre* de G. Un groupe G qui est égal son hypercentre est dit *hypercentral*. Si un sous-groupe H d'un groupe G est contenu dans l'hypercentre de G, on dit que H est *hypercentral dans* G.

Si U/V est un quotient de deux sous-groupes normaux d'un groupe G, on note $A_G(U/V)$ le groupe des automorphismes de U/V induits par G. Ainsi, $A_G(U/V)$ est isomorphe à $G/C_G(U/V)$. Par abus de langage, on considèrera $A_G(U/V) = G/C_G(U/V)$.

On dit qu'un élément x d'un groupe G est *de torsion*, s'il est d'ordre fini. Un groupe est *de torsion* si chacun de ses élément est de torsion.

Pour toute classe $\mathcal{G}$ de groupe, on appelle $\mathcal{G}$-*groupe* un élément de $\mathcal{G}$.

1.1 Groupes de rang de Morley fini

Nous allons définir un *groupe de rang de Morley fini* à partir de la notion d'*univers rangé*. Cette définition possède l'avantage de permettre un traitement axiomatique des groupes de rang de Morley fini. Mais ce n'est pas la définition originelle, laquelle peut être trouvée dans [63] (section 17.c, p.445). En effet, les groupes que nous définissons s'appelaient, au départ, *groupes de Borovik*, ou *groupes rangés*, et B. Poizat a montré que ceux-ci sont exactement les groupes de rang de Morley fini :

Fait 1.1.1. – **([64], corollaire 2.14 p.49 et théorème 2.15 p.54, Poizat)** *Les notions de groupes rangés (aussi appelés groupes de Borovik) et de groupes de rang de Morley fini coïncident.*

Un *univers* est une collection non vide $\mathcal{U}$ d'ensembles soumis à certaines conditions. Les ensembles appartenant à $\mathcal{U}$ sont appelés ensembles *définissables*. Aussi, une fonction entre deux ensemble définissables est dite *définissable* si son graphe l'est. Les conditions que doit satisfaire un univers sont les suivantes :

U1 – *Clôture par opérations booléennes :* Si A et B sont deux ensembles définissables, alors $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$ sont aussi définissables.
U2 – *Clôture par produits :* Si A et B sont deux ensembles définissables, alors leur produit cartésien, les deux projections canoniques π_A et π_B de $A \times B$ sur A et B respectivement, ainsi que les images de π_A et π_B des sous-ensembles définissables de $A \times B$, sont définissables. L'ensemble $\{(a, a) : a \in A\}$ est aussi définissable.
U3 – *Sous-ensembles finis :* Si a est un élément d'un ensemble définissable A, alors le singleton $\{a\}$ est définissable.
U4 – *Factorisation :* Si $E(x, y)$ est une relation d'équivalence définissable sur un ensemble définissable A (i.e. l'ensemble $E = \{(x, y) \in A^2 : E(x, y)\}$ est un sous-ensemble définissable de A^2), alors l'ensemble A/E des classes d'équivalences et la surjection canonique $A \longrightarrow A/E$ sont définissables.

Si $\mathcal{U}$ est un univers, alors une fonction $rk : \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathbb{N}$ est appelée un *rang* si les axiomes suivants sont satisfaits pour chaque ensembles définissables A et B de $\mathcal{U}$:

R1 – *Définition du rang :* $rk(A) \geq n + 1$ si et seulement s'il existe une infinité de sous-ensembles définissables et non vides de A, deux à deux disjoints et de rangs supèrieurs ou égaux à n.
R2 – *Définissabilité du rang :* Si f est une fonction définissable de A dans B, alors l'ensemble $\{b \in B : rk(f^{-1}(b)) = n\}$ est définissable pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
R3 – *Additivité du rang :* Si f est une surjection définissable de A dans B et si $rk(f^{-1}(b))$ est égal à un entier n pour chaque $b \in B$, alors $rk(A) = rk(B) + n$.
R4 – *Elimination des quanteurs infinis :* Pour toute fonction définissable f de A dans B, il existe un entier m tel que, pour tout $b \in B$, $f^{-1}(b)$ soit infini dès qu'il contient m éléments distincts.

Un univers $\mathcal{U}$ est dit *rangé* s'il existe un rang qui satisfait les axiomes ci-dessus. On remarque que la condition R1 détermine entièrement la fonction de rang. Signalons que B. Poizat a montré que les conditions R1, R2 et R4 impliquent la condition R3 ([64], p.55).

Si $\mathcal{L}$ est un langage du premier ordre et si $\mathcal{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure, on dit que $\mathcal{M}$ est une *structure rangée* si $\mathcal{M}$ est définissable dans un univers rangé. Le rang de $\mathcal{M}$ dépend alors de l'univers dans lequel il est considéré.

Si $\mathcal{M} = \langle G, ., ^{-1}, 1, ...\rangle$ est à la fois une structure rangée et un groupe (éventuellement avec une structure enrichie), on dit que $\mathcal{M}$, ou simplement G, est un *groupe rangé*. On définit de la même façon un *corps rangé*. Un groupe (resp. un corps) qui n'est considéré qu'avec sa structure de groupe (resp. de corps) est dit *pur*.

L'exemple principal d'univers rangé est celui des *ensembles constructibles* sur un corps algébriquement clos K, c'est-à-dire des combinaisons booléennes de fermés de Zariski des puissances de K. L'axiome U4 est assuré car il y a dans ce cas *élimination des imaginaires* selon un théorème de B. Poizat ([66] ou [63], théorème 16.21). Le fait que cet univers soit rangé peut être démontré en géométrie algébrique (cf. [42]). Dans ce cas, le rang correspond à la dimension de Zariski. Comme un groupe algébrique sur un tel corps K est constructible, c'est un groupe de rang de Morley fini. Aussi, pour que notre univers soit rangé, nous sommes obligés de considérer le corps de base K algébriquement clos. En effet, un théorème fondamental de la théorie des groupes de rang de Morley fini affirme qu'un corps infini de rang de Morley fini est algébriquement clos :

Fait 1.1.2. – **([50], Macintyre)** *Un corps infini de rang de Morley fini est algébriquement clos.*

Bien entendu, les groupes de rang de Morley fini ne sont pas tous algébriques puisqu'un produit direct de deux groupes algébriques, sur deux corps algébriquement clos de caractéristiques différentes, est de rang de Morley fini sans être algébrique. Si p désigne un entier premier, le *p-groupe de Prüfer*

$$Z_{p^\infty} = \{x \in \mathbb{C} : x^{p^n} = 1, n \in \mathbb{N}\}$$

est un autre exemple de groupe de rang de Morley fini non algébrique. A partir de tels exemples, ou en utilisant des méthodes beaucoup plus compliquées [8], il est possible de construire des groupes de rang de Morley fini non algébriques.

Cependant, les propriétés des groupes de rang de Morley fini se rapprochent tellement de celles des groupes algébriques que l'on pense que tous ceux qui sont simples et infinis sont algébriques. Nous en arrivons à la conjecture la plus importante concernant les groupes de rang de Morley fini :

Conjecture de Cherlin-Zil'ber : Tout groupe simple et infini de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

De très nombreux travaux vont dans le sens de cette conjecture. Mais on est encore loin de la solution. Les deux principaux obstacles à cette conjecture sont d'une part l'existence possible d'un *mauvais groupe simple*[1] ([19], [20], [13], [55]), d'autre part l'existence possible d'un *mauvais corps* :

Définition 1.1.3. – *Une structure $\langle K, +, ., T\rangle$ de rang de Morley fini est un* mauvais corps *si $\langle K, +, .\rangle$ est un corps et si T est un sous-groupe propre et infini de K^*.*

On ne sait pas s'il existe ou non de telles structures. Pendant longtemps, il a été conjecturé que de tels objets n'existent pas. Suite à certains travaux récents, B. Poizat a conjecturé leur existence en caractéristique nulle [65]. Par contre, F. O. Wagner a effectué certains travaux concernant les mauvais corps de caractéristique non nulle, et il conjecture qu'il n'existe pas de tels objets [78]. Comme cette thèse concerne les groupes de rang de Morley fini *résolubles*, les études sur les mauvais corps nous concernent directement. En effet, leur existence fournirait des groupes résolubles avec des propriétés non algébriques, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.1.4. – Si il existe un mauvais corps K de caractéristique nulle avec un sous-groupe multiplicatif T, infini, propre, définissable et sans torsion, alors $G = K_+ \rtimes T$ (où T agit linéairement sur K_+) est un groupe de rang de Morley fini sans torsion et non nilpotent.

Nous donnons maintenant quelques propriétés de bases sur le *rang*. Un exposé plus détaillé de ces propriétés peut être trouvé dans la section 4.2 de [10]. Fixons $\mathcal{U}$ un univers rangé avec un rang rk.

Fait 1.1.5. – **([10], lemmes 4.8, 4.9 et 4.10)** *Soient A et B deux ensembles définissables non vides de $\mathcal{U}$. Alors :*
i) $rk(A) = 0$ si et seulement si A est fini ;
ii) si $A \subseteq B$, alors $rk(A) \leq rk(B)$;
iii) $rk(A \cup B) = max(rk(A), rk(B))$.

Un ensemble définissable et non vide A est dit de *degré 1* si $rk(B) < rk(A)$ ou $rk(A \setminus B) < rk(A)$ pour chaque sous-ensemble définissable et non vide B de A. On dit que A est de *degré d* s'il est réunion de d sous-ensembles définissables de rang égal à $rk(A)$ et de degré 1. Chaque ensemble définissable et non vide A a un unique degré que l'on note $deg(A)$ ([10], lemmes 4.12 et 4.14).

[1]Groupe simple et infini de rang de Morley fini dont tous les sous-groupes propres et définissables sont nilpotents-par-fini

Fait 1.1.6. – **([10], lemmes 4.15, 4.16 et 4.17)** *Soient A et B deux ensembles définissables et non vides de $\mathcal{U}$. Alors :*

i) si $rk(A) > rk(B)$, alors $deg(A \cup B) = deg(A)$;

ii) si $A \subseteq B$ et $rk(A) = rk(B)$, alors $deg(A) \leq deg(B)$;

iii) si $f : A \longrightarrow B$ est une bijection définissable, alors A et B ont même rang et même degré.

Les rangs et degrés des produits cartésiens sont aussi donnés de façon naturelle.

Fait 1.1.7. – **([10], lemme 4.18)** *Soient A et B deux ensembles définissables et non vides de $\mathcal{U}$. Alors $rk(A \times B) = rk(A) + rk(B)$ et $deg(A \times B) = deg(A)deg(B)$.*

Un cas particulier des égalités précédentes sera souvent utilisé. Si G est un groupe de rang de Morley fini avec un sous-groupe définissable H, alors l'ensemble des cosets à gauche (ou à droite) G/H de H dans G est définissable et $rk(G/H) = rk(G) - rk(H)$. Cette égalité est appelée l'*égalité de Lascar*. En particulier, si $\phi : G \longrightarrow H$ est un homomorphisme définissable de groupe, on obtient $rk(G) = rk(\phi(G)) + rk(Ker(\phi))$.

L'existence d'un rang et d'un degré implique des contraintes algébriques aux groupes de rang de Morley fini. La plus fondamentale est la *condition de chaîne descendante* sur les sous-groupes définissables, ce qui veut dire que toute chaîne descendante de sous-groupes définissables est stationnaire.

Fait 1.1.8. – **([49], Macintyre)** *Un groupe de rang de Morley fini satisfait la condition de chaîne descendante sur ses sous-groupes définissables.*

La condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables s'applique aux centralisateurs des sous-ensembles des groupes de rang de Morley fini. Les groupes de rang de Morley fini sont donc des *$\mathcal{M}_c$-groupes* :

Définition 1.1.9. – *Un* $\mathcal{M}_c$-groupe *est un groupe qui vérifie la condition de chaîne descendante sur ses centralisateurs.*

Nous finissons cette section par une remarque sur les $\mathcal{M}_c$-groupes :

Remarque 1.1.10. – Tout sous-groupe d'un $\mathcal{M}_c$-groupe est un $\mathcal{M}_c$-groupe. En effet, si X est un sous-ensemble d'un $\mathcal{M}_c$-groupe G, alors il existe une partie finie X_0 de X tel que $C_G(X) = C_G(X_0)$.

1.2 Théorèmes fondamentaux

Définition 1.2.1. – *Une partie définissable A d'un groupe G de rang de Morley fini est dite* indécomposable *si, pour tout sous-groupe définissable H de G, ou bien les éléments de A se répartissent en une infinité de classes modulo H, ou bien sont tous contenus dans la même classe modulo H.*

Cette notion est liée à celle de *groupe connexe* :

Définition 1.2.2. – *Pour tout groupe G de rang de Morley fini, on note G° sa* composante connexe*, c'est-à-dire l'intersection de ses sous-groupes définissables d'indice fini. Par condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables de G, G° est un sous-groupe définissable et d'indice fini de G. On dit qu'un groupe G de rang de Morley fini est* connexe *si $G = G^\circ$.*

Remarque 1.2.3. – Un sous-groupe définissable H d'un groupe de rang de Morley fini est indécomposable si et seulement si il est connexe.

Le *théorème des indécomposables* de Zil'ber est un résultat fondamental de la théorie des groupes de rang de Morley fini :

Fait 1.2.4. – **([86], Théorème des indécomposables, Zil'ber)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini, I un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties indécomposables de G, chacune contenant l'élément neutre. Alors le groupe H engendré par les A_i pour $i \in I$ est définissable et connexe. En fait, il existe un entier $m \leq rk(H)$ et un m-uple $i_1, ..., i_m$ de I tel que $H = (A_{i_1}...A_{i_m})(A_{i_1}...A_{i_m})$.*

Nous donnons deux corollaires du théorème des indécomposables de Zil'ber :

Fait 1.2.5. – **([86], Zil'ber)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini, alors un sous-groupe de G engendré par un ensemble $\mathcal{G}$ de sous-groupes connexes et définissables de G est connexe et définissable et engendré par un nombre fini d'éléments de $\mathcal{G}$.*

Fait 1.2.6. – **([86], Zil'ber)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H un sous-groupe de G définissable et connexe et $X \subseteq G$. Alors $[H, X]$ est définissable et connexe. En particulier, pour tout $i \in \mathbb{N}$, H^i et $H^{(i)}$ sont définissables et connexes.*

Fait 1.2.7. – **([10], cor. 5.32 p.87)** *Si G est un groupe de rang de Morley fini, alors G^i et $G^{(i)}$ sont définissables pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Le fait suivant généralise le fait 1.2.7 :

Fait 1.2.8. – **([3], cor. 2.7, Altınel, Borovik, Cherlin)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini avec H et N deux sous-groupes définissables tels que H normalise N. Alors $[H, N]$ est un sous-groupe définissable de G.*

F. O. Wagner a donné une autre version du théorème des indécomposables de Zil'ber (fait 1.2.4) :

Fait 1.2.9. – **([78], Wagner)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini, et $\mathfrak{X}$ une famille de sous-ensembles définissables de G. Alors il existe un entier n, des éléments $X_0, ..., X_n$ de $\mathfrak{X}$ et un sous-groupe définissable H de G contenu dans $X_0^{\pm 1}...X_n^{\pm 1}$, tels que XH/H soit fini pour tout $X \in \mathfrak{X}$.*

Définition 1.2.10. – *Dans un groupe de rang de Morley fini G, la* clôture définissable *d'un sous-ensemble X de G est l'intersection des sous-groupes définissables de G qui contiennent X. On la note $d(X)$. Par condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables de G, c'est un sous-groupe définissable de G.*

On peut alors étendre la notion de composante connexe *aux sous-groupes des groupes de rang de Morley fini. Si H est un sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini, la* composante connexe *de H est $H^\circ = H \cap d(H)^\circ$.*

Fait 1.2.11. – **([10], lemme 5.37 p.89, Zil'ber)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et X et Y deux sous-groupes de G. Alors $[d(X), d(Y)] \leq d([X, Y])$.*

On appelle *section* d'un groupe G un groupe de la forme A/B où B est un sous-groupe de G et A un sous-groupe de $N_G(B)$. On définit les notions de *sous-groupes G-minimaux* et de *sections G-minimales* :

Définition 1.2.12. – *Si H est un sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini G, un sous-groupe* H-minimal *de G est un sous-groupe de G définissable, infini, normalisé par H qui est minimal pour ces conditions.*

Si G est un groupe de rang de Morley fini, une section A/B de G est définissable *si A et B sont définissables. Si H est un sous-groupe de G, la section définissable A/B est dite* H-minimale *si H normalise A et B et si A/B est infinie et ne contient pas proprement de section définissable et infinie normalisée par H.*

Fait 1.2.13. – **([9], Belegradek)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Si H est un sous-groupe normal contenant un élément non central de G°, alors H contient un sous-groupe G-minimal.*

On peut remarquer que les sous-groupes G-minimaux d'un groupe G de rang de Morley fini résoluble sont abéliens. Le fait suivant précise le structure de ces sous-groupes :

Fait 1.2.14. – **([7], Baldwin-Pillay ; [9], Belegradek)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H un sous-groupe de G et A un sous-groupe H-minimal de G. Alors A est soit un p-groupe élémentairement abélien, soit un groupe abélien divisible.*

1.3 Groupes nilpotents et résolubles

Le fait suivant est un exercice de [10] :

Fait 1.3.1. – **([10], ex. 8 p.98)** *Soit U un groupe de rang de Morley fini nilpotent. Si ϕ un endomorphisme définissable de U tel que $C_U(\phi) = 1$, alors $U = \{u^{-1}\phi(u) : u \in U\}$.*

Preuve. – La preuve se fait par induction sur la classe de nilpotence de U. En quotientant U par $Z(U)$, nous nous ramenons au cas où U est abélien. L'application $\psi : u \longmapsto u^{-1}\phi(u)$ est un isomorphisme définissable de U dans $\psi(U)$. On en déduit que $\psi(U)$ est un sous-groupe de U de même rang et même degré que U. On obtient $U = \psi(U) = \{u^{-1}\phi(u) : u \in U\}$. □

Nous donnons les définitions de *radical de Hirsch-Plotkin* et de *sous-groupe de Fitting* pour un groupe quelconque. Pour l'étude des groupes résolubles, ces notions sont très importantes.

Définition 1.3.2. – *Le* radical de Hirsch-Plotkin *d'un groupe G est le sous-groupe de G engendré par ses sous-groupes localement nilpotents normaux. On le note $HP(G)$.*

Le fait 1.3.3 montre que le radical de Hirsch-Plotkin est toujours un sous-groupe localement nilpotent :

Fait 1.3.3. – **([69], 12.1.2 p.343, Hirsch, Plotkin)** *Si deux sous-groupes A et B d'un groupe G sont localement nilpotents et se normalisent, alors AB est localement nilpotent.*

Définition 1.3.4. – *Dans un groupe G, le* sous-groupe de Fitting *$F(G)$ est le sous-groupe de G engendré par ses sous-groupes normaux et nilpotents.*

Pour un groupe résoluble quelconque, on a le résultat suivant :

Fait 1.3.5. – **([69], 5.4.4, p.144, Fitting)** *Pour tout groupe résoluble G, $C_G(F(G))$ est contenu dans $F(G)$.*

En général, le sous-groupe de Fitting n'est pas nilpotent. En effet, D. H. McLain a construit un groupe infini, non abélien et caractéristiquement simple G qui est engendré par ses sous-groupes normaux abéliens [52]. Le fait suivant montre que, dans le contexte des groupes de rang de Morley fini, le sous-groupe de Fitting est nilpotent :

Fait 1.3.6. – **([54], Nesin)** *Si G est un groupe de rang de Morley fini, son sous-groupe de Fitting $F(G)$ est nilpotent et définissable.*

Le fait 1.3.10 donne, en particulier, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément x d'un groupe résoluble quelconque G appartienne à $HP(G)$.

Définition 1.3.7. – *Pour tout groupe G et tout éléments $g_0, ..., g_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ de G, on note* $[g_0] = g_0$ *et* $[g_0, ..., g_{n+1}] = [[g_0, ..., g_n], g_{n+1}]$.

Si x et y sont deux éléments du groupe G, on note $[x,_0 y] = x$ et $[x,_{n+1} y] = [[x,_n y], y]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $H_0, ..., H_{n+1}$ sont des sous-groupes de G $(n \in \mathbb{N})$, on note $[H_0] = H_0$ et $[H_0, ..., H_{n+1}] = [[H_0, ..., H_n], H_{n+1}]$.

Remarque 1.3.8. – Soient G un groupe et $c \in \mathbb{N}$. Si $X \subseteq G$ engendre G, alors G^c est engendré par les conjugués de ses éléments de la forme $[x_0, ..., x_c]$ avec $x_0, ..., x_c$ des éléments de X. En particulier, G est nilpotent de classe au plus c si et seulement si $[x_0, ..., x_c] = 1$ pour tout éléments $x_0, ..., x_c$ de X.

Définition 1.3.9. – *Un élément g d'un groupe G est de* Engel gauche *si $[x,_n g] = 1$ pour tout x dans G, où n peut dépendre de x. Si n peut être choisi indépendemment de x, alors g est dit n-*Engel gauche*, ou* Engel gauche borné.

On note $L(G)$ l'ensemble des éléments de Engel gauche de G et $\overline{L}(G)$ l'ensemble des éléments de Engel gauche bornés de G.

Fait 1.3.10. – **([36], Gruenberg)** *Dans tout groupe résoluble G :*

(i) pour tout $x \in \overline{L}(G)$, $\langle x \rangle$ est un sous-groupe sous-normal de G ;

(ii) $L(G)$ coïncide avec $HP(G)$.

En fait, le résultat de Gruenberg dit plus que cela. Il dit que, pour tout groupe résoluble G, $\overline{L}(G)$ coïncide avec le *radical de Baer* de G. Celui-ci est défini comme étant le sous-groupe de G engendré par les sous-groupes cycliques sous-normaux de G. Nous ne ferons pas d'étude du radical de Baer puisque, dans notre contexte, ce sous-groupe coïncide avec le sous-groupe de Fitting. En effet, J. Derakhshan et F. O. Wagner ont montré ceci :

Fait 1.3.11. – **([80], lemme 1.4.1 p.90, Derakhshan, Wagner)** *Dans un $\mathcal{M}_c$-groupe résoluble G, $\overline{L}(G) = F(G)$.*

Si A et B sont deux sous-groupes d'un groupe G et si A et B se centralisent, on note $A * B$ le *produit central* de A et B.

La structure des groupes abéliens de rang de Morley fini a été déterminée par A. Macintyre :

Fait 1.3.12. – **([49], Macintyre)** *Soit G un groupe abélien de rang de Morley fini. Alors $G = D \oplus B$, où D est un sous-groupe divisible et B un sous-groupe d'exposant borné.*

Le fait suivant détérmine la structure des groupes nilpotents de rang de Morley fini, et généralise le fait ci-dessus :

Fait 1.3.13. – **([57], Nesin)** *Soit G un groupe nilpotent de rang de Morley fini. Alors $G = D * C$, $D = T \times N$ où*

D est définissable, connexe, caractéristique et divisible,

C est définissable et d'exposant borné,

T est la partie de torsion de D et est abélien et divisible,

N est un sous-groupe sans torsion.

De plus, si G est connexe, alors T est central dans G et C peut être choisi connexe et caractéristique.

En particulier, on remarque que, si G est un groupe de rang de Morley fini nilpotent et divisible, alors G' est sans torsion. Altınel, Borovik et Cherlin donnent un résultat plus général :

Fait 1.3.14. – **([2], prop. 5.3, Altınel, Borovik, Cherlin)** *Soit R un groupe connexe de rang de Morley fini tel que $F(R)^\circ$ soit divisible. Alors $[R, F(R)^\circ]$ est sans torsion.*

Le fait suivant dit, en particulier, que tout sous-groupe résoluble (resp. nilpotent) d'un groupe de rang de Morley fini est contenu dans un groupe de rang de Morley fini résoluble (resp. nilpotent).

Fait 1.3.15. – **([88], Zil'ber)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G. Si H est résoluble (resp. nilpotent) de classe n, alors $d(H)$ est aussi résoluble (resp. nilpotent) de classe exactement n.*

Le fait 1.3.16 est un résultat fondamental de la théorie des groupes de rang de Morley fini. Il permet de définir un corps infini dans tout groupe de rang de Morley fini résoluble et connexe. Ajoutons à cela que le fait 1.1.2 dit que ce corps est algébriquement clos. L'énoncé donné est celui de [64], théorème 3.7, p.79 :

Fait 1.3.16. – **([88], Zil'ber)** *Soit, dans une structure de rang de Morley fini, un groupe abélien définissable A possédant un groupe abélien infini définissable M d'automorphismes. Si A est M-minimal, il existe un corps K infini définissable, et une structure définissable de K-espace vectoriel de dimension un sur A, tels que M agisse K-linéairement : $A = K_+$, $M \subseteq K^*$.*

Par la suite on aura aussi parfois besoin d'un corollaire du fait ci-dessus :

Fait 1.3.17. – **([88], Zil'ber)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini, connexe et résoluble et A un sous-groupe G-minimal de G. Alors, pour tout $a \in A \setminus \{1\}$, $C_G(a) = C_G(A)$.*

Le fait suivant donne une information cruciale sur la structure des groupes de rang de Morley fini résolubles et connexes. Il sera sans cesse utilisé dans cette thèse.

Fait 1.3.18. – **([58], Nesin ; [87], Zil'ber)** *Si G est un groupe de rang de Morley fini, connexe et résoluble, G' est nilpotent. En particulier, G' centralise tout sous-groupe G-minimal de G.*

Le fait 1.3.19 est un théorème de Nesin qui donne encore plus de renseignements sur les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles. Il s'agit d'une conséquence du fait 1.3.18.

Fait 1.3.19. – **([56], Nesin)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini, connexe et résoluble. Alors $G/F(G)^\circ$ (et, donc, $G/F(G)$) est un groupe divisible et abélien.*

Le fait 1.3.20, avec le fait 1.3.18, montre qu'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G est nilpotent si et seulement si $G/G^{(2)}$ est nilpotent :

Fait 1.3.20. – **([69], th. 5.2.10 p.129, Hall)** *Si un groupe G a un sous-groupe normal et nilpotent N tel que G/N' soit nilpotent, alors G est nilpotent.*

On finit cette section par un résultat de Nesin qui détermine la structure de certains groupes de rang de Morley fini résolubles et connexes :

Fait 1.3.21. – **([10], lemme 9.14 p.150, Nesin)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini, connexe, résoluble, tel que $Z(G)$ soit fini et G' soit G-minimal. Alors $G = G' \rtimes T$ pour un sous-groupe abélien, divisible, définissable, connexe T qui contient $Z(G)$. De plus, deux compléments sont conjugués.*

1.4 Les sous-groupes de Hall

Nous commençons cette section par deux résultats généraux sur les groupes localement finis :

Fait 1.4.1. – **([47], lemme 1.A.2 p.2)** *Les extensions des groupes localement finis par des groupes localement finis sont localement finies.*

Le fait 1.4.2 est un résultat de base sur les groupes résolubles de torsion. Il sera souvent utilisé par la suite sans être mentionné explicitement.

Fait 1.4.2. – **([10], ex. 10 p.5)** *Soit G un groupe résoluble. Alors G est localement fini si et seulement si il est de torsion.*

Preuve. – Il suffit de montrer que, si G est de torsion, G est localement fini. Comme un groupe abélien de torsion est localement fini, $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ est localement fini pour tout $i \in \mathbb{N}$. Le fait 1.4.1 permet de conclure. □

A partir de maintenant, nous noterons $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers premiers. Si π est un sous-ensemble de $\mathcal{P}$, on note π' le complémentaire de π dans $\mathcal{P}$. Aussi, pour tout $p \in \mathcal{P}$, on note $p' = \{p\}'$.

Fait 1.4.3. – **([35], th. 2.3, p.177)** *Soient $p \in \mathcal{P}$, P un p-groupe fini et abélien et A un p'-groupe d'automorphisme de P. Alors nous avons $P = C_P(A) \times [P, A]$.*

Une preuve du fait suivant est donnée dans [3], fait 2.12 :

Fait 1.4.4. – **([10], ex. 10 p.93, Borovik, Nesin)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors la clôture définissable d'un sous-groupe cyclique de G est un produit direct d'un groupe divisible par un groupe cyclique fini.*

Pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}$, on appelle *$\pi$-tore* tout π-groupe abélien et divisible. Pour un p-tore T ($p \in \mathcal{P}$), la dimension du groupe des éléments d'ordre p de T, considéré comme espace vectoriel sur le corps premier, s'appelle la *taille* de T.

Fait 1.4.5. – **([14], Borovik, Poizat)** *Les sous-p-tores d'un groupe de rang de Morley fini sont de taille finie, bornée par un certain entier m.*

Fait 1.4.6. – **([14], Borovik, Poizat)** *Soient $p \in \mathcal{P}$ et T un p-tore dans un groupe G de rang de Morley fini, alors $[N_G(T) : C_G(T)] < \infty$ et même, il existe un entier c tel que $[N_G(T) : C_G(T)] \leq c$ pour tout p-tore T de G.*

Fait 1.4.7. – **([14], Borovik, Poizat)** *Soient $p \in \mathcal{P}$ et P un p-sous-groupe localement fini d'un groupe G de rang de Morley fini. Alors P satisfait les propriétés suivantes :*

i) P° est nilpotent et $P^\circ = B * T$ est le produit central d'un groupe nilpotent B d'exposant borné et d'un p-tore T.

ii) Si $P \neq 1$, $Z(P) \neq 1$ et P satisfait la condition de normalisateur.

iii) Si P est infini et est d'exposant fini, alors $Z(P)$ contient une infinité d'éléments d'ordre p et P est nilpotent.

Pour tout groupe G et tout entier premier p, un *p-sous-groupe de Sylow* de G est un p-sous-groupe maximal de G. Notons que, si p désigne un entier premier, un p-sous-groupe localement fini P d'un groupe de rang de Morley fini n'est pas nécessairement nilpotent :

Exemple 1.4.8. – Si on considère le groupe $G = \mathbb{C}^* \rtimes \langle i \rangle$ où i désigne une involution qui inverse $\mathbb{C}^*$. Alors les 2-sous-groupes de Sylow de G sont de la forme $P = \mathbb{Z}_{2^\infty} \rtimes \langle i_0 \rangle$ où i_0 est une involution qui inverse $\mathbb{Z}_{2^\infty}$. Pourtant P est localement fini et P n'est pas nilpotent.

Pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}$ et pour tout groupe localement résoluble G, on appelle *π-sous-groupe de Hall* un π-sous-groupe maximal de G. Cette définition est différente de celle donnée habituellement pour les groupes finis, mais les deux définitions sont équivalentes dans le cas des groupes finis *résolubles* ([69], p.245 et th. 9.1.7 p.250).

Fait 1.4.9. – **([11], Borovik, Nesin)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini, connexe et résoluble, $p \in \mathcal{P}$ et $\pi \subseteq \mathcal{P}$. Alors les p-sous-groupes de Sylow de G et les π-sous-groupes de Hall normaux de G sont connexes.*

Fait 1.4.10. – **([4], Altınel, Cherlin, Corredor, Nesin)** *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}$ et G un groupe avec un sous-groupe normal A tel que G/A soit un π-groupe localement fini. On suppose A abélien, sans π-élément non trivial et π-divisible. Si A satisfait la condition de chaîne descendante sur les centralisateurs des sous-ensembles de G, alors :*

1. *A a un complément dans G ;*
2. *Deux compléments sont conjugués.*
3. *Tout sous-groupe H de G avec $H \cap A = 1$ est contenu dans un complément de A.*

Les résultats de [4] sont énoncés, en général, pour les groupes ω-stables résolubles. Nous énonçons ces résultats dans le contexte où nous allons les utiliser : les groupes de rang de Morley fini résolubles.

Fait 1.4.11. – **([4], Altınel, Cherlin, Corredor, Nesin)** *Soit π un ensemble de nombres premiers. Alors deux π-sous-groupes de Hall d'un groupe résoluble de rang de Morley fini sont conjugués.*

Fait 1.4.12. – **([4], Altınel, Cherlin, Corredor, Nesin)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, $N \trianglelefteq G$, et soit H un π-sous-groupe de Hall de G pour un ensemble π de nombres premiers. Alors :*

1. *$H \cap N$ est un π-sous-groupe de Hall de N, et tous les π-sous-groupes de Hall de N sont de cette forme.*
2. *Si N satisfait une des conditions suivantes :*

(i) N est un π-groupe ;

(ii) N est un π'-groupe π-divisible satisfaisant la condition de chaîne descendante sur les centralisateurs dans G ;

(iii) N est définissable ;

alors HN/N est un π-sous-groupe de Hall de G/N, et tous les π-sous-groupes de Hall de G/N sont de cette forme.

Fait 1.4.13. – **([11], Borovik, Nesin)** *Soient π un ensemble d'entiers premiers, A un groupe abélien, H le π-sous-groupe de Hall de A et X un π'-groupe fini d'automorphismes de A. Si H a un complément dans A, alors H a un complément X-invariant dans A.*

1.5 Les sous-groupes de Carter

Les trois faits suivants montrent que, pour un $\mathcal{M}_c$-groupe localement fini, être localement nilpotent équivaut à être hypercentral. On rappelle qu'un groupe G vérifie la *condition de normalisateur* si aucun sous-groupe propre de G n'est autonormalisant.

Fait 1.5.1. – **([15], Bryant)** *Soit G un $\mathcal{M}_c$-groupe localement nilpotent et localement fini. Alors G est nilpotent-par-fini et hypercentral.*

Fait 1.5.2. – **([69], 12.2.4 p.351)** *Soit G un groupe hypercentral. Alors G vérifie la condition de normalisateur.*

Fait 1.5.3. – **([69], 12.2.2 p.350, Plotkin)** *Soit G un groupe qui vérifie la condition de normalisateur. Alors G est localement nilpotent.*

R. W. Carter a étudié dans [17] les sous-groupes nilpotents et autonormalisants des groupes finis résolubles. Il a prouvé que tout groupe fini et résoluble possède une unique classe de conjugaison de sous-groupes nilpotents et autonormalisants. Ces sous-groupes sont désormais appelés *sous-groupes de Carter*. Leur étude s'est avérée fondamentale pour l'analyse des groupes finis résolubles. Cette notion a été généralisée, dans plusieurs directions, à des classes de groupes infinies. Pour les groupes stables, F. O. Wagner a obtenu certains résultats en utilisant la même définition de sous-groupes de Carter. Son travail sur les sous-groupes de Carter s'établit dans un contexte plus général que celui des groupes de rang de Morley fini : les $\mathfrak{R}$-*groupes*. Les $\mathfrak{R}$-groupes sont des groupes stables sur lesquels, en général, il n'est pas possible de définir un rang, mais qui ont des propriétés proches de celles des groupes munis d'un rang. La notion de $\mathfrak{R}$-groupe a été introduite par Frank O. Wagner. Nous énonçons les résultats de F. O. Wagner dans notre contexte :

Fait 1.5.4. – **([79], Wagner)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors G a un sous-groupe de Carter C. Si K est un sous-groupe définissable de G contenant C°, alors $C \cap K$ est un sous-groupe de Carter de K. Si D est un sous-groupe nilpotent de K d'indice fini dans le normalisateur de sa composante connexe D°, alors D° est conjugué à C° dans K. De plus $K = K'(C \cap K)$ et $C = N_G(C^\circ)$.*

Fait 1.5.5. – **([79], Wagner)** *Soient G et C comme ci-dessus, et K un sous-groupe de G contenant C. Alors K est autonormalisant, et pour tout sous-groupe définissable normal L de K avec quotient nilpotent K/L le produit LC est égal à K.*

Fait 1.5.6. – **([79], Wagner)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Supposons que C soit un sous-groupe de Carter de G. Si K est un sous-groupe définissable de G contenant C°, alors tous les sous-groupes de Carter de K sont conjugués.*

Ces trois résultats ne seront pas utilisés. Nous fournirons une autre approche que celle de F. O. Wagner aux sous-groupes de Carter. Pour nous, la définition de sous-groupe de Carter sera la suivante :

Définition 1.5.7. – *Un* sous-groupe de Carter *d'un groupe est un sous-groupe localement nilpotent et autonormalisant.*

La notion de sous-groupe de Carter est l'un des thèmes centraux de la thèse. Nous avons choisi la définition 1.5.7 plutôt que celle de R. W. Carter, car un groupe de rang de Morley fini résoluble non connexe ne possède pas toujours de sous-groupe nilpotent et autonormalisant. Ceci est illustré par les deux exemples suivants :

Exemple 1.5.8. – Considérons le pur groupe $\mathbb{C}^*$ et $G = \mathbb{C}^* \rtimes \langle i \rangle$ où i désigne une involution qui inverse $\mathbb{C}^*$. Alors les sous-groupes de Carter de G sont exactement ses 2-sous-groupes de Sylow. Pourtant, les 2-sous-groupes de Sylow de G ne sont pas nilpotents, ni définissables.

F. O. Wagner avait donné dans [77] un exemple de groupe G résoluble, connexe et non nilpotent de rang de Morley 3 avec un automorphisme ϕ d'ordre 4 tel que $gg^{\phi}g^{\phi^2}g^{\phi^3} = 1$ pour tout $g \in G$. Ce groupe nous permet d'obtenir un exemple de groupe de rang de Morley fini résoluble *sans centre* avec des sous-groupes de Carter non nilpotents :

Exemple 1.5.9. – **([77], Wagner)** Soient K un corps algébriquement clos de caractéristique distincte de 2 et $U = (K_+ \oplus K_+) \rtimes K^*$, où la multiplication de U est définie par $(x, y, z).(a, b, c) = (cx + a, c^{-1}y + b, zc)$. Alors $\phi : (x, y, z) \longmapsto (-y, x, z^{-1})$ est un automorphisme d'ordre 4 de U et, si on considère $G = U \rtimes \langle \phi \rangle$, G est un groupe de rang de Morley fini résoluble *sans centre*. Aussi les sous-groupes de Carter de G sont exactement les 2-sous-groupes de Sylow de G, lesquels ne sont pas nilpotents.

La définition 1.5.7 équivaut à celle de R. W. Carter dans un groupe de rang de Morley fini résoluble et connexe (théorème 2.4.7). Elle permet de démontrer le théorème d'existence et de conjugaison des sous-groupes de Carter pour les groupes non nécessairement connexes (théorème 3.6.6), et correspond à d'autres thèmes centraux de cette thèse qui seront développés dans le chapitre 3.

1.6 $\mathfrak{U}$-groupes

La notion de $\mathfrak{U}$-*groupe* a été introduite par A. D. Gardiner, B. Hartley et M. J. Tomkinson dans [33]. Cette classe de groupes sera très importante pour nous, car tout sous-groupe localement fini d'un groupe de rang de Morley fini résoluble est un $\mathfrak{U}$-groupe (fait 1.6.3). L'étude des groupes de rang de Morley fini résolubles faite dans [4] nécessitait aussi l'usage des résultats concernant les $\mathfrak{U}$-groupes.

Définition 1.6.1. – *Une classe $\mathcal{S}$ de groupes est dite S-*close *si, pour tout $G \in \mathcal{S}$, tous les sous-groupes de G appartiennent à $\mathcal{S}$.*

La classe $\mathfrak{U}$ des $\mathfrak{U}$-groupes est la plus grande classe S-close de groupes localement finis satisfaisant les conditions :

$(U1)$ si $G \in \mathfrak{U}$, alors G possède une série $1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_n = G$ avec des facteurs localement nilpotents ;

$(U2)$ si $G \in \mathfrak{U}$ et si $\pi \subseteq \mathcal{P}$, alors les π-sous-groupes de Hall de G sont conjugués dans G.

Signalons que B. Hartley a montré dans [38] que $(U2)$ implique $(U1)$.

Le fait suivant montre que tout quotient d'un $\mathfrak{U}$-groupe est un $\mathfrak{U}$-groupe.

Fait 1.6.2. – **([33], lemme 2.1, Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}$, G un $\mathfrak{U}$-groupe, N un sous-groupe normal de G et S un π-sous-groupe de Hall de G. Alors SN/N est un π-sous-groupe de Hall de G/N et tous les π-sous-groupes de Hall de G/N sont de cette forme. En particulier, G/N est un $\mathfrak{U}$-groupe.*

Fait 1.6.3. – **([16], Bryant, Hartley)** *Un $\mathcal{M}_c$-groupe localement fini et résoluble est un $\mathfrak{U}$-groupe. En particulier, si G est un $\mathcal{M}_c$-groupe localement fini et résoluble, si N est un sous-groupe normal de G et si S est un π-sous-groupe de Hall de G pour $\pi \subseteq \mathcal{P}$, alors SN/N est un π-sous-groupe de Hall de G/N et tous les π-sous-groupes de Hall de G/N sont de cette forme.*

Nous donnons le théorème concernant les sous-groupes de Carter dans les $\mathcal{M}_c$-groupes localements finis résolubles. Il provient de la section 5 de [33] (où il est donné pour les $\mathfrak{U}$-groupes) et du fait qu'un $\mathcal{M}_c$-groupe résoluble et localement fini est un $\mathfrak{U}$-groupe.

Fait 1.6.4. – **([33], section 5, Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *Tout quotient d'un $\mathcal{M}_c$-groupe localement fini résoluble G a un sous-groupe de Carter C et deux tels sous-groupes sont conjugués. De plus, si N est un sous-groupe normal de G tel que G/N soit localement nilpotent, $G = NC$.*

Chapitre 2

Groupes connexes

Dans l'étude des groupes de rang de Morley fini, il est important de bien connaître ceux qui sont connexes et résolubles pour plusieurs raisons. D'abord, en ce qui concerne cette thèse, notre étude des groupes de rang de Morley fini résolubles et non nécessairement connexes demandera une bonne compréhension de la structure des groupes connexes. Nous le verrons dans les chapitres suivants. Ensuite, et surtout, les applications concernant l'étude des groupes connexes dépassent le cadre des groupes résolubles puisqu'il y a des applications dans certains travaux concernant la conjecture de Cherlin-Zil'ber. En effet, certains résultats démontrés ici (concernant notamment les *centralisateurs généralisés*, définition 2.4.1) sont utilisés par Eric Jaligot dans [43]. Cela est dû au fait que l'étude des "petits" groupes simples demande de très bonnes connaissances des groupes résolubles. Les applications des résultats concernant les groupes résolubles connexes devraient être encore plus importantes lorsque seront étudiés les *FT-groupes simples*[1] avec des 2-sous-groupes de Sylow finis.

Dans ce chapitre, on considère les *sous-groupes anormaux* : un sous-groupe H d'un groupe G est *anormal* dans G si $g \in \langle H, H^g \rangle$ pour tout $g \in G$. Cette notion a été utilisée par R. W. Carter dans [17] pour démontrer l'existence et la conjugaison des sous-groupes nilpotents et autonormalisants des groupes résolubles finis. Ces sous-groupes, appelés désormais *sous-groupes de Carter* (définition 1.5.7), ont largement contribué au développement de la théorie des groupes résolubles finis. F. O. Wagner a démontré des analogues de ces résultats pour certaines classes de groupes stables, dont les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles (voir faits 1.5.4, 1.5.5 et 1.5.6). Nous montrons que, dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, les sous-groupes de Carter sont exactement les sous-groupes anormaux minimaux (théorème 2.4.7). Ceci nous permet d'obtenir une nouvelle preuve de l'existence et de la conjugaison de sous-groupes de Carter. De plus, comme un sous-groupe anormal d'un groupe résoluble et connexe est connexe (proposition 2.1.7), nous montrons qu'un sous-groupe de Carter est connexe. Ceci nous permet de montrer que les sous-groupes de Carter sont préservés par quotientement (corollaire 2.4.8). Aussi, nous obtenons plusieurs caractérisations des sous-groupes anormaux et des sous-groupes anormaux minimaux (théorèmes 2.2.9, 2.4.7 et 2.5.1).

Nous étudions aussi les *centralisateurs généralisés* (définition 2.4.1). Cette notion a été introduite par T. A. Peng dans [61]. Nous montrons qu'un centralisateur généralisé d'un sous-groupe nilpotent d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble est définissable et connexe (corollaire 2.4.5), et même, qu'il est anormal (corollaire 2.6.2). Aussi, nous montrons qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de centralisateurs généralisés de sous-groupes nilpotents (théorème 2.6.10). On déduit de cette analyse des résultats sur les normalisateurs des sous-groupes de Hall (corollaires 2.6.13 et 2.6.14). Nous finissons ce chapitre par une étude du *radical quasiunipotent* (définition 2.7.4).

[1] Groupe simple et infini de rang de Morley fini dont les sous-groupes définissables, connexes et propres maximaux sont tous résolubles

2.1 Sous-groupes anormaux

On donne les définitions des notions d'*anormalité* et de *déf-anormalité* :

Définition 2.1.1. – *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On dit que H est* anormal *dans G si, pour tout $g \in G$, g appartient à $\langle H, H^g \rangle$. Si G est de rang de Morley fini, on dit que H est* déf-anormal *dans G si, pour tout $g \in G$, g appartient à $d(H, H^g)$.*

Remarque 2.1.2. – Si H est un sous-groupe anormal d'un groupe G, alors H est autonormalisant et H contient l'hypercentre de G. En particulier, si G est nilpotent, G n'a pas de sous-groupe anormal propre.

De plus, si N est un sous-groupe normal de G, HN/N est anormal dans G/N. Donc, si G/N est nilpotent, on a $G = HN$, en particulier $G = G'H$.

2.1.1 Existence des sous-groupes anormaux propres

Il suit directement de la définition que tout groupe est anormal dans lui-même. Ici, on se pose la question de l'existence de sous-groupe anormal *propre*. Nous montrons qu'en fait, un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G possède un sous-groupe anormal propre si et seulement si G n'est pas nilpotent (corollaire 2.1.5).

Lemme 2.1.3. – *Si, dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G, un sous-groupe G-minimal A est non central et a un complément H, alors $G = \langle H, H^g \rangle$ pour tout $g \in G \setminus H$. En particulier, H est un sous-groupe anormal propre de G.*

Preuve. – Par hypothèse, on a $G = A \rtimes H$. Remarquons d'abord que H est autonormalisant. Il suffit de montrer que $N_A(H) = 1$. Comme A n'est pas central dans G, le fait 1.3.17 donne $A \cap Z(G) = 1$. En particulier, on a $C_A(H) = 1$ et, comme $N_A(H) = C_A(H)$, H est autonormalisant.

Ainsi, si $g \in G \setminus H$, $\langle H, H^g \rangle \cap A$ est un sous-groupe normal et non trivial de G. Donc, puisque $A \cap Z(G) = 1$, $\langle H, H^g \rangle \cap A$ contient un sous-groupe G-minimal d'après le fait 1.2.13. A étant G-minimal, on a le résultat. □

Proposition 2.1.4. – *Tout groupe G de rang de Morley fini connexe, résoluble et non nilpotent a un sous-groupe normal, définissable et connexe W tel que $(G/W)'$ soit G/W-minimal et $Z(G/W)$ fini.*

Preuve. – Par induction sur le rang de G. Comme $G^{(2)}$ est définissable et connexe (fait 1.2.6) et comme $G/G^{(2)}$ n'est pas nilpotent (faits 1.3.18 et 1.3.20), l'hypothèse d'induction permet de supposer G 2-résoluble. D'après le fait 1.2.6, G^i est définissable et connexe pour tout $i \in \mathbb{N}$, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $G^k = G^{k+1}$. G n'étant pas nilpotent il existe un sous-groupe normal, définissable et connexe A de G dans G^k tel que G^k/A soit G/A-minimal. Comme G/A n'est pas nilpotent, l'hypothèse d'induction permet de supposer G^k G-minimal. Aussi il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $Z_l(G)^\circ = Z_{l+1}(G)^\circ$. Alors $G/Z_l(G)^\circ$ n'est pas nilpotent et a un centre fini donc, par hypothèse d'induction, on peut supposer le centre de G fini. Il suffit alors de montrer $G' = G^k$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe un sous-groupe B/G^k G/G^k-minimal dans G'/G^k. G n'étant pas nilpotent, il existe $g \in G \setminus C_G(G^k)$. Comme G est 2-résoluble et comme B est contenu dans G', $C_B(g)$ est normal dans G. Aussi

$$\begin{array}{cccc} ad_g : & B & \longrightarrow & G^k \\ & b & \longmapsto & [b, g] \end{array}$$

est un homomorphisme définissable et $C_B(g) = Kerad_g$. Mais $C_{G^k}(g) = 1$ d'après le fait 1.3.17 et G/G^k centralise B/G^k. Donc $[G, C_B(g)] \leq G^k \cap C_B(g) = 1$ et $C_B(g)$ est central dans G. En particulier $C_B(g)$ est fini et $rkB = rkB/C_B(g) \leq rkG^k$, ce qui est absurde puisque B/G^k est infini. □

Corollaire 2.1.5. – *Un groupe de rang de Morley fini G connexe et résoluble possède un sous-groupe anormal propre si et seulement si G n'est pas nilpotent.*

Preuve. – Si G est nilpotent, la remarque 2.1.2 dit que G ne possède pas de sous-groupe anormal propre. Réciproquement, soit W un sous-groupe de G comme dans la proposition 2.1.4. G/W a un sous-groupe anormal propre H/W d'après le fait 1.3.21 et le lemme 2.1.3. H est alors un sous-groupe anormal propre de G. □

2.1.2 Connexité

Nous montrons qu'un sous-groupe anormal d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble est toujours définissable et connexe (proposition 2.1.7). Cette information est fondamentale pour l'étude des sous-groupes anormaux. C'est elle qui rend possible la plupart des preuves par induction (sur le rang de G) que nous serons amenés à faire. De plus, cette information donne un lien entre les notions d'anormalité et de déf-anormalité (corollaire 2.1.8).

Lemme 2.1.6. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini, connexe, résoluble, tel que $Z(G)$ soit fini et G' soit G-minimal. Si H est un sous-groupe anormal ou définissable et déf-anormal de G, alors $H = G$ ou H est un complément de G' dans G. En particulier, H est définissable et connexe.*

Preuve. – Si H est définissable et déf-anormal dans G alors, comme G' est définissable (fait 1.2.6), $G'H$ est un sous-groupe de G définissable et normal. H étant déf-anormal dans G, on obtient $G = G'H$. Si H est anormal dans G, on a encore $G = G'H$ d'après la remarque 2.1.2. Dans les deux cas, comme G' est abélien, on en déduit que $G' \cap H$ est normal dans G. Or $G' \cap Z(G) = 1$ d'après le fait 1.3.21. Donc, si H n'est pas un complément de G' dans G, $G' \cap H$ contient un sous-groupe G-minimal d'après le fait 1.2.13. On en déduit que H contient G', donc $H = G$. Le fait 1.3.21 donne la connexité de H. □

Proposition 2.1.7. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble avec un sous-groupe H qui est anormal ou définissable et déf-anormal. Alors H est définissable et connexe.*

Preuve. – Par induction sur le rang de G. Soit A un sous-groupe G-minimal. HA/A est soit définissable et déf-anormal soit anormal. Par hypothèse d'induction HA/A, donc HA, est définissable et connexe. Donc l'hypothèse d'induction permet de supposer $G = HA$. Alors $H \cap A$ est normal dans G. Si A est central dans G alors A est contenu dans H et $G = H$, donc il n'y a rien à faire. Sinon $A \cap Z(G) = 1$ d'après le fait 1.3.17 et on peut supposer $Z(G)$ fini. Si $A \cap H \neq 1$, $A \cap H$ contient un sous-groupe G-minimal d'après le fait 1.2.13, donc $G = H$ et il n'y a rien à faire. On peut alors supposer $A \cap H = 1$. Si $G' = A$, le lemme 2.1.6 donne le résultat. Sinon on a $G' \cap H \neq 1$. G' étant connexe, $G' \cap H$ est infini, en particulier $G' \cap H$ n'est pas central dans G. Mais $G' \cap H$ est normal dans H et le fait 1.3.18 dit que G' centralise A, donc $G' \cap H$ est normal dans G. D'après le fait 1.2.13, $G' \cap H$ contient un sous-groupe G-minimal B. Alors H/B est anormal ou définissable et déf-anormal dans G/B et l'hypothèse d'induction donne le résultat. □

Corollaire 2.1.8. – *Les notions d'anormalité et de déf-anormalité sont équivalentes pour tout sous-groupe définissable d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G.*

Preuve. – D'après la proposition 2.1.7 il suffit de montrer qu'un sous-groupe définissable et déf-anormal H de G est anormal. Soit $g \in G$. Alors $\langle H, H^g \rangle$ est définissable et connexe d'après la proposition 2.1.7 et le fait 1.2.5. Donc $g \in d(H, H^g) = \langle H, H^g \rangle$ et H est anormal. □

2.2 Sous-groupes anormaux minimaux

Dans cette section, nous prouvons le théorème 2.2.9. Il donne l'existence d'une unique classe de conjugaison de sous-groupes anormaux minimaux dans les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles. Il donne aussi des caractérisations des sous-groupes anormaux minimaux et, surtout, un lien avec les sous-groupes de Carter.

Remarque 2.2.1. – Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble alors, comme les sous-groupes anormaux de G sont définissables d'après la proposition 2.1.7, tout sous-groupe anormal de G contient un sous-groupe anormal minimal.

Lemme 2.2.2. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, A un sous-groupe G-minimal non central de G et H un sous-groupe de G tel que $G = HA$. Alors H est anormal dans G. De plus, soit $G = H$, soit A intersecte trivialement H.*

Preuve. – Si $A \cap H = 1$, le lemme 2.1.3 permet de conclure. Sinon, comme A n'est pas central dans G, $A \cap Z(G) = 1$ d'après le fait 1.3.17. Mais $A \cap H$ est normal dans G puisque $G = HA$, donc $A \cap H$ contient un sous-groupe G-minimal d'après le fait 1.2.13. Alors A est contenu dans H et $G = H$. □

Corollaire 2.2.3. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, A un sous-groupe G-minimal et H un sous-groupe de G tels que $G = C_G(A)H$, $Z(G)^\circ \leq H$ et tel que HA soit définissable et connexe. Alors H est anormal dans HA. De plus, soit A est contenu dans H, soit A intersecte trivialement H.*

Preuve. – Si A est contenu dans H, il n'y a rien à démontrer. Sinon A n'est pas central dans G puisque $Z(G)^\circ \leq H$. Alors A ne centralise pas H puisque $G = C_G(A)H$. Donc A n'est pas central dans HA. Mais, comme $G = C_G(A)H$, A est HA-minimal. Alors le lemme 2.2.2 donne le résultat. □

Corollaire 2.2.4. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-groupe définissable, connexe et propre de G qui est maximal pour ces propriétés. Alors H est normal ou anormal dans G.*

Preuve. – Par induction sur le rang de G. Soit A un sous-groupe G-minimal de G. Supposons que H ne soit pas normal dans G. Si A est contenu dans H, l'hypothèse d'induction appliquée à G/A donne le résultat. Sinon, $Z(G)^\circ$ est contenu dans H par maximalité de H et A n'est pas central dans G. Alors le lemme 2.2.2 donne le résultat. □

Définition 2.2.5. – *Un sous-groupe H d'un groupe G est sous-anormal si il existe $n \in \mathbb{N}$ et des sous-groupes $(H_i)_{0\leq i\leq n}$ de G tels que $H_0 = G$, $H_n = H$ et, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, H_i est un sous-groupe anormal de H_{i-1}.*

Pour prouver la proposition 2.2.7, nous utilisons le fait suivant. Dans [69] il est donné pour les groupes finis, mais la même démonstration marche pour tous les groupes.

Fait 2.2.6. – **([69], lemme 9.2.12 p.258, Taunt)** *Soient G un groupe, H un sous-groupe de G et N un sous-groupe normal de G. Si H est anormal dans HN et si HN est anormal dans G, alors H est anormal dans G.*

Proposition 2.2.7. – *Dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G, tout sous-groupe sous-anormal H est anormal.*

Preuve. – On remarque qu'un sous-groupe sous-anormal est définissable et connexe d'après la proposition 2.1.7. On suppose que G est un contrexemple de rang minimal avec un sous-groupe sous-anormal et non anormal H de rang maximal. Par maximalité du rang de H, H est anormal dans un sous-groupe anormal K de G. Par la remarque 2.1.2, $G = G'K$ et $K = K'H$, donc $G = G'H$. Soit A un sous-groupe G-minimal de G. Alors le fait 1.3.18 dit que $G = C_G(A)H$. Mais $Z(G)$ est contenu dans K, donc dans $Z(K)$, puisque K est anormal dans G. Aussi $Z(K)$ est contenu dans H et, ainsi, H contient $Z(G)$. Par le corollaire 2.2.3, H est anormal dans HA. Mais HA/A est anormal dans KA/A qui est lui-même anormal dans G/A. Donc HA/A est anormal dans G/A d'après la minimalité du rang de G. En conséquence HA est anormal dans G. Le fait 2.2.6 permet de conclure. □

Définition 2.2.8. – *On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe G* couvre *une section A/B de G si $(A \cap H)B/B = A/B$ et on dit que H* évite *A/B si $A \cap H \leq B$.*

Théorème 2.2.9. – *Dans un groupe G de rang de Morley fini connexe et résoluble les sous-groupes anormaux minimaux existent et sont conjugués.*

De plus, pour tout sous-groupe H de G, les conditions suivantes sont équivalentes :

(*i*) *H est un sous-groupe anormal minimal de G ;*

(*ii*) *H est un sous-groupe de Carter de G, et H est définissable et connexe ;*

(*iii*) *Il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite $(A_i)_{i=0,...,n}$ de sous-groupes de G tel que A_{i+1}/A_i soit G/A_i-minimal pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$ et tel que $A_0 = 1$, $A_n = G$ et H couvre un quotient de la forme A_{i+1}/A_i (pour $i \in \{0, ..., n-1\}$) si et seulement si A_{i+1}/A_i est central dans G/A_i.*

Preuve. – *1)* (*i*) *implique* (*ii*).

La proposition 2.1.7 dit que H est définissable et connexe. La proposition 2.2.7 dit que H est sous-anormal minimal. Donc H n'a pas de sous-groupe anormal propre et le corollaire 2.1.5 montre que H est nilpotent. On a montré que H est un sous-groupe de Carter de G.

2) Les sous-groupes anormaux minimaux de G existent et sont conjugués.

L'existence est donnée par la remarque 2.2.1. On montre la conjugaison par induction sur le rang de G. Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes anormaux minimaux de G. H_1 et H_2 contiennent chacun $Z(G)$, et $H_1/Z(G)$ et $H_2/Z(G)$ sont anormaux et nilpotents dans $G/Z(G)$. Donc $H_1/Z(G)$ et $H_2/Z(G)$ sont anormaux minimaux dans $G/Z(G)$. Si $Z(G)$ est infini l'hypothèse d'induction donne le résultat. Donc on peut supposer $Z(G)$ fini. Soit A un sous-groupe G-minimal de G. Alors H_1A/A et H_2A/A sont des sous-groupes anormaux et nilpotents de G/A. Donc ce sont des sous-groupes anormaux minimaux de G/A. Par hypothèse d'induction ils sont conjugués et on peut supposer $H_1A = H_2A$. Aussi H_1 et H_2 sont des sous-groupes anormaux nilpotents de H_1A, donc des sous-groupes anormaux minimaux de H_1A. Par hypothèse d'induction on peut alors supposer $G = H_1A$. Comme H_1 est nilpotent et comme $Z(G)$ est fini, $C_{H_1}(A)$ est fini et, d'après le fait 1.2.6 et le fait 1.3.18, $G' = A$. Aussi les intersections $A \cap H_1$ et $A \cap H_2$ sont finies, donc centrales dans G. Le fait 1.3.17 dit que $A \cap Z(G) = 1$. Ainsi $A \cap H_1 = A \cap H_2 = 1$ et le fait 1.3.21 donne le résultat.

3) (*ii*) *implique* (*i*).

Par induction sur le rang de G. Soient $g \in G$ et $U = \langle H, H^g \rangle$. Montrons que g appartient à U. On peut supposer $U \neq G$. Comme H est définissable et connexe, U est définissable et connexe d'après le fait 1.2.5. L'hypothèse d'induction appliquée à U montre que H et H^g sont des sous-groupes anormaux minimaux de U. D'après *2)* il existe $u \in U$ tel que $H^u = H^g$. On obtient $gu^{-1} \in N_G(H) = H$ et $g \in U$, ce qui finit la preuve de *3)*.

4) (i) implique (iii).

On va montrer que H couvre une section G-minimale de G si et seulement si elle est centralisée par G. Soit A/B une section G-minimale de G centralisée par G. HB/B étant anormal dans G/B, HB/B contient A/B. Ainsi H couvre toutes les sections G-minimales centralisées par G. Supposons que H couvre une section G-minimale A/B non centralisée par G. Comme G' centralise A/B d'après le fait 1.3.18 et comme $G = G'H$ d'après la remarque 2.1.2, A/B est H-minimale et n'est pas centralisée par H. Ceci contredit le fait que H soit anormal minimal puisqu'un sous-groupe anormal minimal est nilpotent d'après *1)*.

5) (iii) implique (i).

Montrons que $G/A_i = C_{G/A_i}(A_{i+1}/A_i)HA_i/A_i$ pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$. On peut supposer $i = 0$. Supposons G distinct de $C_G(A_1)H$. Alors il existe $j \in \{0, ..., n-1\}$ tel que $A_j \leq C_G(A_1)H$ et $A_{j+1} \nleq C_G(A_1)H$. $C_G(A_1)H$ étant normal dans G d'après le fait 1.3.18, $(C_G(A_1)H \cap A_{j+1})^\circ = A_j$ d'après la minimalité de A_{j+1}/A_j. Comme G' centralise A_1 (fait 1.3.18), le fait 1.2.6 donne

$$[G, A_{j+1}] \leq (G' \cap A_{j+1})^\circ \leq (C_G(A_1) \cap A_{j+1})^\circ = A_j$$

A_{j+1}/A_j est donc centrale dans G/A_j et, par conséquent, couverte par H, ce qui contredit le choix de j.

Montrons que H est nilpotent. Supposons le contraire. Alors il existe un plus grand $i \in \{0, ..., n-1\}$ tel que la section $(H \cap A_{i+1})A_i/A_i$ ne soit pas centralisée par H. En particulier G ne centralise pas A_{i+1}/A_i et $(H \cap A_{i+1})A_i/A_i < A_{i+1}/A_i$ d'après l'hypothèse faite sur H. Comme $G/A_i = C_{G/A_i}(A_{i+1}/A_i)HA_i/A_i$, $(H \cap A_{i+1})A_i/A_i$ est normal dans G/A_i. Comme A_{i+1}/A_i est G/A_i-minimal, $(H \cap A_{i+1})A_i/A_i$ est fini et central dans G/A_i, ce qui est contradictoire.

Il suffit alors de montrer que H est anormal. On va le montrer par induction sur le rang de G. Par hypothèse d'induction HA_1/A_1 est un sous-groupe anormal de G/A_1, donc HA_1 est définissable et connexe d'après la proposition 2.1.7. Supposons A_1 central dans G. Alors A_1 est contenu dans H et $H = HA_1$ est anormal. Donc on peut supposer A_1 non central dans G. Comme $G = C_G(A_1)H$, A_1 n'est pas central dans HA_1. D'après le lemme 2.2.2, H est anormal dans HA_1. Le fait 2.2.6 permet de conclure. $\square$

2.3 Le sous-groupe de Frattini°

Dans un groupe G, le *sous-groupe de Frattini* est défini comme étant l'intersection des sous-groupes propres maximaux de G. Nous introduisons une version connexe du sous-groupe de Frattini pour les groupes de rang de Morley fini connexes : le *sous-groupe de Frattini°*. Cette notion permettra d'établir une *théorie des formations connexes* dans les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles (chapitre 5). Mais le sous-groupe de Frattini° va aussi être un outil important pour étudier les *centralisateurs généralisés* dans la section 2.4.

Définition 2.3.1. – *On définit le* sous-groupe de Frattini° $Fratc(G)$ *d'un groupe de rang de Morley fini connexe G comme l'intersection de ses sous-groupes propres, définissables et connexes maximaux.*

L'étude du sous-groupe de Frattini des groupes finis utilise beaucoup la théorie de Sylow. Dans notre contexte, la théorie de Sylow est inefficace à cause des éléments d'ordre infini. Il s'avère que nous pouvons remplacer la théorie de Sylow par la théorie des sous-groupes anormaux, et nous obtenons des analogues de certains résultats concernant les groupes finis.

Les lemmes suivants montrent que, si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, $Fratc(G)$ vérifie les propriétés de base du sous-groupe de Frattini d'un groupe fini.

Lemme 2.3.2. – *Dans un groupe de rang de Morley fini connexe G, pour tout sous-groupe définissable H de G, l'égalité $G = Fratc(G)H$ implique $G = H$.*

Preuve. – Supposons $H \neq G$. H° est contenu dans un sous-groupe K propre, définissable et connexe maximal de G. En particulier K contient $Fratc(G)$ et on a $G = Fratc(G)K = K$, ce qui est contradictoire. □

Lemme 2.3.3. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et N un sous-groupe définissable et normal. Si N est contenu dans $Fratc(G)$, alors $Fratc(G/N) = Fratc(G)/N$.*

Preuve. – Si K/N (resp. U) est un sous-groupe propre, définissable et connexe maximal de G/N (resp. G), alors il en est de même pour K° (resp. UN/N) dans G (resp. G/N). □

Lemme 2.3.4. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors G est nilpotent si et seulement si $G/Fratc(G)$ est nilpotent.*

Preuve. – Il suffit de montrer que, si $G/Fratc(G)$ est nilpotent, alors G est nilpotent. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors G a un sous-groupe anormal propre H d'après la proposition 2.1.5 et $G = Fratc(G)H$ d'après la remarque 2.1.2. Ainsi $G = H$ d'après le lemme 2.3.2 et le choix de H est contredit. □

Définition 2.3.5. – *Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe, on note $FFratc(G)$ le sous-groupe qui vérifie $FFratc(G)/Fratc(G) = F(G/Fratc(G))$.*

Proposition 2.3.6. – *Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, $F(G) = FFratc(G)$.*

Preuve. – Montrons que $(FFratc(G))^\circ$ est nilpotent. Par la remarque 2.2.1, $(FFratc(G))^\circ$ possède un sous-groupe anormal minimal C. Comme $(FFratc(G))^\circ/(Fratc(G))^\circ$ est nilpotent, la remarque 2.1.2 dit que $(FFratc(G))^\circ = (Fratc(G))^\circ C$. Par le théorème 2.2.9 et l'argument de Frattini, on obtient $G = Fratc(G)N_G(C)$. Le lemme 2.3.2 dit alors que C est normal dans G, en particulier dans $(FFratc(G))^\circ$. C étant anormal dans $(FFratc(G))^\circ$, on trouve $C = (FFratc(G))^\circ$ et $(FFratc(G))^\circ$ est nilpotent puisque C l'est (proposition 2.1.5).

Pour prouver le lemme il suffit de montrer que $FFratc(G)$ est nilpotent. Supposons le contraire. Par ce qui précède, $FFratc(G)/F(G)$ est fini et il existe $p \in \mathcal{P}$ qui divise l'ordre de ce quotient. Soit S un p-sous-groupe de Sylow de $FFratc(G)$. Alors $SFratc(G)/Fratc(G)$ est le p-sous-groupe de Sylow de $FFratc(G)/Fratc(G)$ d'après le fait 1.4.12. S étant nilpotent (faits 1.4.2, 1.4.7 et 1.4.9), $d(S)$ l'est aussi (fait 1.3.15) et $d(S)$ normalise S. Mais les p-sous-groupes de Sylow de $d(S)Fratc(G)$ sont conjugués dans $d(S)Fratc(G)$ par le fait 1.4.11. L'argument de Frattini montre qu'alors $G = Fratc(G)N_G(S)$. Mais $N_G(S)(= N_G(d(S)))$ est définissable, donc le lemme 2.3.2 dit que S est normal dans G. On en déduit que S est contenu dans $F(G)$. Mais ceci contredit le fait 1.4.12. □

Proposition 2.3.7. – *Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, alors on a $F(G)' \leq Fratc(G)$. En particulier $G/Fratc(G)$ est 2-résoluble et $F(G/G^{(2)}) = F(G)/G^{(2)}$.*

Preuve. – Soit H un sous-groupe propre, définissable et connexe maximal de G. Il faut montrer que H contient $F(G)'$. Si H est normal dans G, G' est contenu dans H, donc on peut supposer H anormal d'après le corollaire 2.2.4. Alors $G = F(G)H$ d'après la remarque 2.1.2 et le fait 1.3.19. Donc $H \cap F(G)$ est d'indice infini dans $F(G)$. H est donc un sous-groupe propre de $N_{F(G)}(H \cap F(G))^\circ H$ et la maximalité de H dans G montre que $H \cap F(G)$ est normal dans G et, en particulier, dans $F(G)$. Soit U le sous-groupe de G tel que $U/(H \cap F(G)) = Z(F(G)/(H \cap F(G)))$. Alors le groupe $U/(H \cap F(G))$ est infini et $UH = G$ par maximalité de H. Ainsi $F(G) = U(H \cap F(G)) = U$ et le résultat suit de cette égalité. □

2.4 Centralisateurs généralisés I

Nous donnons d'abord la définition du *centralisateur généralisé.*

Définition 2.4.1. – *Soient G un groupe et A un sous-groupe de G. Nous définissons le* centralisateur généralisé *$E_A(g)$ d'un élément g de $N_G(A)$ comme étant l'ensemble des éléments x de A tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[x,_n g] = 1$. Si X est un sous-ensemble de $N_G(A)$, on note $E_A(X)$ l'intersection des $E_A(x)$ pour $x \in X$.*

Cette notion a été introduite, sans être nommée, par T. A. Peng dans [61]. Dans un groupe quelconque, ou même fini et abélien-par-nilpotent, un centralisateur généralisé n'a aucune raison d'être un sous-groupe, comme le montre l'exemple 2.4.2.

Exemple 2.4.2. – **([62], Peng)** Soient $A = \langle a, b |\ a^3 = b^3 = 1,\ ab = ba\rangle$ et $D = \langle c, d, e |\ c^2 = d^2 = e^2 = 1,\ cd = dc,\ c^e = d\rangle$ (D est le groupe diédral d'ordre 8). On considère $G = A \rtimes D$ où D agit sur A de la façon suivante :

$$a^c = a^{-1},\ b^c = b,\ a^e = b.$$

Alors G est un groupe abélien-par-nilpotent et $E_G(c)$ n'est pas un sous-groupe de G.

En effet, d'une part on a $[ae, c, c] = [[a, c]^e[e, c], c] = [bdc, c] = 1$ et $[e, c, c] = [dc, c] = 1$. D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $[ae.e,_k c] = [a,_k c] = a^{(-2)^k} \neq 1$.

T. A. Peng a introduit dans [61] la notion de *E-groupe*, qui est un groupe G dans lequel $E_G(x)$ est un sous-groupe de G pour tout $x \in G$. C'est un sujet qui dépasse le cadre des groupes résolubles puisque H. Heineken ([40]) et C. Casolo ([18]) ont étudié les E-groupes simples (finis). Le résultat qui nous intéresse le plus est le suivant :

Fait 2.4.3. – **([40], Heineken)** *Tout groupe (localement nilpotent)-par-abélien est un E-groupe.*

En particulier, d'après le fait 1.3.18, toute section d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble est un E-groupe.

Nous allons voir qu'en fait, si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble alors, pour tout $x \in G$, $E_G(x)$ est un sous-groupe définissable et connexe de G.

Proposition 2.4.4. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et g un élément de G. Alors $E_G(g)$ est un sous-groupe définissable et connexe de G et g est un élément de Engel gauche borné dans $E_G(g)$.*

Preuve. – Nous faisons la preuve par induction sur le rang de G. Si g appartient à $F(G)$, il n'y a rien à faire. Donc on peut supposer $g \notin F(G)$. Alors $g(Fratc(G))^\circ$ n'est pas contenu dans $F(G/(Fratc(G))^\circ)$ d'après la proposition 2.3.6. Supposons $Fratc(G)$ infini. Par hypothèse d'induction, $E/(Fratc(G))^\circ = E_{G/(Fratc(G))^\circ}(g(Fratc(G))^\circ)$ est un sous-groupe définissable et connexe de $G/(Fratc(G))^\circ$, et $g(Fratc(G))^\circ$ est un élément de Engel gauche borné de $E/(Fratc(G))^\circ$. Le fait 1.3.11 donne $g(Fratc(G))^\circ \in F(E/(Fratc(G))^\circ)$, et E est un sous-groupe propre de G. Comme $E_G(g)$ est contenu dans E, l'hypothèse d'induction appliquée à E donne le résultat. On peut donc supposer $Fratc(G)$ fini.

Soit A un sous-groupe G-minimal de G. Par hypothèse d'induction on peut supposer qu'il existe un entier n tel que gA soit n-Engel gauche dans G/A. Mais il existe un sous-groupe définissable et connexe propre maximal U de G qui ne contient pas A puisque $(Fratc(G))^\circ = 1$. Alors $G = AU$ et $A \cap U$ est fini, donc central puisque A est abélien. Si g centralise A, g est $(n+1)$-Engel gauche dans G et $g \in F(G)$ (fait 1.3.11), ce qui est contradictoire. Donc $C_A(g) = 1$ et $A \cap U$ est trivial d'après le fait 1.3.17. Or $g = au$ pour un élément a de A et un élément u de U. Comme $C_A(g) = 1$, $C_A(u)$ est trivial et $A = \{[b, u^{-1}] : b \in A\}$ d'après le fait 1.3.1. Donc il existe $b \in A$ tel que $g = [b, u^{-1}]u = u^b \in U^b$ et on peut supposer $U = U^b$. Comme $E_{G/A}(gA) = G/A$, U est contenu dans $E_G(g)$ et $G = AE_G(g)$. Mais on a $C_A(g) = 1$, donc $E_A(g) = 1$ et, comme $E_G(g)$ est un sous-groupe de G (faits 1.3.18 et 2.4.3), on obtient $U = E_G(g)$. Comme $G = A \rtimes U$ et comme gA est n-Engel gauche dans G/A, on en déduit que g est n-Engel gauche dans $E_G(g)$. □

Le corollaire suivant dit, en particulier, qu'un sous-groupe localement nilpotent d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble est nilpotent.

Corollaire 2.4.5. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-ensemble de G qui engendre un sous-groupe localement nilpotent. Alors $E_G(H) = E_G(d(H))$ est définissable et connexe et H est contenu dans $F(E_G(H))$. En particulier, $d(H)$ est nilpotent et l'ensemble des sous-groupes nilpotents de G est inductif.*

Preuve. – Nous faisons la preuve par induction sur le rang de G. Si H est contenu dans $F(G)$, nous avons $E_G(H) = G = E_G(d(H))$ et il n'y a rien à faire. Sinon il existe $h \in H \setminus F(G)$. Mais h est un élément Engel gauche bornée de $E_G(h)$ d'après la proposition 2.4.4 et $h \in F(E_G(h))$ d'après le fait 1.3.11. Donc on a $E_G(h) < G$ et, comme $H \subseteq E_G(h)$ puisque H engendre un sous-groupe localement nilpotent, l'hypothèse d'induction s'applique à $E_G(h)$ du fait que $E_G(h)$ est connexe d'après la proposition 2.4.4. □

Corollaire 2.4.6. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, A un sous-groupe définissable de G et H un sous-ensemble de $N_G(A)$ qui engendre un sous-groupe localement nilpotent. Alors $E_A(H) = E_A(d(H))$ est un sous-groupe définissable de A et, si $H \leq A$, H est contenu dans $F(E_A(H))$.*

Preuve. – Suit directement du corollaire 2.4.5. □

Nous pouvons alors préciser un peu plus que le théorème 2.2.9 le rapport entre les sous-groupes de Carter et les sous-groupes anormaux minimaux.

Théorème 2.4.7. – *Dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G, pour tout sous-groupe H de G, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *H est anormal minimal ;*

(ii) *H est un sous-groupe de Carter de G ;*

(iii) *H est un sous-groupe définissable, nilpotent et d'indice fini dans son normalisateur.*

En particulier, G possède une unique classe de conjugaison de sous-groupes de Carter et les sous-groupes de Carter de G sont connexes.

Preuve. – Le théorème 2.2.9 montre que (i) implique (ii). Si H est un sous-groupe de Carter de G, le corollaire 2.4.5 dit que $d(H)$ est nilpotent. Par condition de normalisateur dans $d(H)$, on obtient $H = d(H)$ et H est définissable, donc (ii) implique (iii).

Montrons que (iii) implique (i). $E_G(H)$ est définissable et connexe, et H est contenu dans $F(E_G(H))$ d'après le corollaire 2.4.5. On en déduit que $E_G(H)$ est nilpotent et égal à H. En particulier, H est connexe et H est un sous-groupe de Carter de G. Le théorème 2.2.9 dit que H est un sous-groupe anormal minimal de G.

Le théorème 2.2.9 permet de finir la preuve du théorème. □

Nous finissons avec un corollaire qui montre que les résultats d'existence et de conjugaison des sous-groupes de Carter se généralisent à tous les quotients des groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles.

Corollaire 2.4.8. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, C un sous-groupe de Carter de G et N un sous-groupe normal (non nécessairement définissable) de G. Alors CN/N est un sous-groupe de Carter de G/N et tous les sous-groupes de Carter de G/N sont de cette forme. En particulier les sous-groupes de Carter de G/N sont conjugués.*

Preuve. – D'après le théorème 2.4.7, CN est anormal, donc autonormalisant. Alors CN/N est aussi autonormalisant. Mais CN/N est nilpotent donc CN/N est un sous-groupe de Carter de G/N.

Montrons, par induction sur le rang de G, que tout sous-groupe de Carter de G/N est de cette forme. Si N est central, il n'y a rien a faire. Sinon N contient un sous-groupe G-minimal A d'après le fait 1.2.13. Soit K/N un sous-groupe de Carter de G/N. Alors $(K/A)/(N/A)$ est un sous-groupe de Carter de $(G/A)/(N/A)$ et, par hypothèse d'induction, $K/A = (L/A)(N/A)$ pour un sous-groupe de Carter L/A de G/A. D'après le théorème 2.4.7, L/A est anormal dans G/A. Donc L est anormal dans G et la remarque 2.2.1 dit que L contient un sous-groupe anormal minimal C de G. $L = AC$ d'après la remarque 2.1.2, donc $K = LN = CN$. Le théorème 2.4.7 permet de conclure. □

Dans la section 2.6, nous continuerons l'étude des centralisateurs généralisés.

2.5 Caractérisations des sous-groupes anormaux

Maintenant que nous avons caractérisé les sous-groupes anormaux minimaux des groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles, nous pouvons donner des caractérisations des sous-groupes anormaux. Aussi, nous allons donner un résultat de connexité des sous-groupes anormaux (proposition 2.5.5), lequel généralise la proposition 2.1.7.

Théorème 2.5.1. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-groupe de G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) H est anormal ;

(ii) H contient un sous-groupe de Carter de G ;

(iii) H est définissable et connexe et il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite décroissante $(H_i)_{0\leq i\leq n}$ de sous-groupes de G tel que $H_0 = G$, $H_n = H$ et, pour tout $i = 1, ..., n$, H_i est un sous-groupe propre définissable et connexe maximal de H_{i-1} qui n'est pas normal dans H_{i-1}.

De plus, l'entier n de l'assertion (iii) ne dépend pas de la suite $(H_i)_{0\leq i\leq n}$ choisie.

Lemme 2.5.2. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-groupe anormal de G. Alors H couvre ou évite toute section G-minimale A/B de G.*

Preuve. – HB/B étant anormal dans G/B, on peut supposer $B = 1$. Le fait 1.3.18 et la remarque 2.1.2 donnent $G = C_G(A)H$. Comme H est définissable et connexe (proposition 2.1.7), le corollaire 2.2.3 donne le résultat. □

Lemme 2.5.3. – *Soient G un groupe, $k \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i=0,...,k}$ une suite croissante de sous-groupes normaux de G tels que $A_0 = 1$ et $A_k = G$. Soit $\mathcal{U}$ la famille des sous-groupes H de G qui vérifient l'assertion :*

Pour tout $i = 0, ..., k-1$, H couvre ou évite A_{i+1}/A_i.

Pour tout $H \in \mathcal{U}$ on note $n(H)$ le nombre de sections A_{i+1}/A_i ($i \in \{0, ..., k-1\}$) couvertes par H. Soient H et K deux éléments de $\mathcal{U}$ tels que $H < K$. Alors il existe $L \in \mathcal{U}$ tel que $H \leq L < K$ et $n(L) = n(K) - 1$.

Preuve. – Montrons que $n(H) < n(K)$. Il faut trouver une section de la forme A_{i+1}/A_i avec $i \in \{0, ..., k-1\}$ qui est couverte par K et pas par H. Il existe un plus petit $j \in \{1, ..., k\}$ tel que $H \cap A_j$ soit distinct de $K \cap A_j$. Alors $H \cap A_{j-1} = K \cap A_{j-1}$, et $(H \cap A_j)A_{j-1}/A_{j-1}$ est strictement contenu dans $(K \cap A_j)A_{j-1}/A_{j-1}$. On en déduit que H évite A_j/A_{j-1} et K couvre A_j/A_{j-1}.

Montrons l'existence de L. Soit l le plus grand entier tel que K couvre A_l/A_{l-1} et tel que H évite A_l/A_{l-1}. Soit $L = H(K \cap A_{l-1})$. Alors, pour tout $i \in \{1, ..., l-1\}$ (resp. $i \in \{l, ..., k\}$),

L couvre A_i/A_{i-1} si et seulement si K (resp. H) couvre A_i/A_{i-1}, et L évite A_i/A_{i-1} si et seulement si K (resp. H) évite A_i/A_{i-1}. En particulier, L appartient à $\mathcal{U}$. Mais L couvre toutes les sections A_i/A_{i-1} ($i \in \{1, ..., k\}$) qui sont couvertes par K sauf pour $i = l$, donc $n(L) = n(K) - 1$. □

Preuve du théorème 2.5.1. – Le théorème 2.4.7 dit que (i) et (ii) sont équivalents. Le fait que (iii) implique (i) suit du lemme 2.2.4 et de la proposition 2.2.7.

Montrons que (i) implique (iii). Supposons que l'on ait une suite strictement décroissante $(H_i)_{i=0,...,n}$ ($n \in \mathbb{N}$) de sous-groupes de G avec $H_0 = G$ et $H_n = H$. Alors, pour tout $i = 1, ..., n$, H_i est anormal dans H_{i-1}. En particulier, H_i n'est pas normal dans H_{i-1}. Aussi la proposition 2.1.7 montre que H_i est définissable et connexe pour tout $i = 0, ..., n$. Par finitude du rang de G on peut supposer n maximal, ce qui prouve (iii).

Nous montrons la seconde partie du théorème. Soient n et m deux entiers et $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(K_j)_{0 \leq j \leq m}$ deux suites décroissantes de sous-groupes de G tels que $H_0 = K_0 = G$ et $H_n = K_m = H$ et, pour tout $i = 1, ..., n$ et tout $j = 1, ..., m$, H_i (resp. K_j) est un sous-groupe propre, définissable et connexe maximal de H_{i-1} (resp. K_{j-1}) qui n'est pas normal dans H_{i-1} (resp. K_{j-1}). Il faut alors montrer qu'on a nécessairement $n = m$. Soit $(A_i)_{0 \leq i \leq k}$ une suite croissante de sous-groupes normaux de G tels que A_{i+1}/A_i soit G-minimale pour tout $i = 0, ..., k-1$, $A_0 = 1$ et $A_k = G$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des sections de la forme A_{i+1}/A_i avec $i \in \{0, ..., k-1\}$. Montrons par induction sur i que, pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, H_i évite exactement i sections de $\mathcal{A}$. Comme on peut montrer le même résultat pour la suite $(K_j)_{0 \leq j \leq m}$ et comme $H_n = K_m = H$, on aura montré le résultat. Soit $i \in \{0, ..., n-1\}$ tel que H_i évite exactement i sections de $\mathcal{A}$. Le lemme 2.5.2 dit que H_i couvre les autres sections de $\mathcal{A}$ et le lemme 2.5.3 que H_{i+1} évite exactement $i+1$ sections de $\mathcal{A}$. Ainsi $H_n = H$ évite exactement n sections de $\mathcal{A}$. □

Lemme 2.5.4. – *On suppose que G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et que $(A_i)_{i=0,...,n}$ est une suite strictement croissante de sous-groupes définissables, connexes et normaux de G telle que $A_0 = 1$ et $A_n = G$. Si H est un sous-groupe définissable de G qui vérifie :*

Pour tout $i = 0, ..., n-1$, H couvre ou évite A_{i+1}/A_i.

Alors H est connexe.

Preuve. – On fait la preuve par induction sur n. On peut supposer $n \geq 1$. $H \cap A_{n-1}$ est connexe par hypothèse d'induction, donc $H^\circ \cap A_{n-1} = H \cap A_{n-1}$. Si H évite A_n/A_{n-1}, H est contenu dans A_{n-1}, et H est connexe. Sinon on a $A_n = HA_{n-1} = H^\circ A_{n-1}$ et H° couvre A_n/A_{n-1}. Ainsi, pour tout $i = 0, ..., n-1$, H° couvre ou évite A_{i+1}/A_i. Aussi on a montré que H° couvre autant de sections de la forme A_{i+1}/A_i ($i = 0, ..., n-1$) que H. Le lemme 2.5.3 donne alors le résultat. □

Proposition 2.5.5. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, H un sous-groupe anormal de G et A un sous-groupe définissable, connexe et normal de G. Alors $A \cap H$ est définissable et connexe.*

Preuve. – H est définissable d'après la proposition 2.1.7 donc $A \cap H$ aussi. Soit $(A_i)_{i=0,...,n}$ une suite croissante de sous-groupes de G tel que $A_0 = 1$, $A_n = G$ et A_{i+1}/A_i soit G-minimal pour tout $i = 0, ..., n-1$ et telle qu'il existe $j \in \{0, ..., n\}$ pour lequel $A = A_j$. Alors le lemme 2.5.2 dit que H couvre ou évite A_{i+1}/A_i pour tout $i = 0, ..., n-1$, donc $A \cap H$ aussi. Le lemme 2.5.4 donne le résultat. □

2.6 Centralisateurs généralisés II

Nous commençons cette section par la proposition 2.6.1 qui sera très utile pour ce qui suit, notamment le corollaire 2.6.2 qui montre que les centralisateurs généralisés forment une famille de sous-groupes anormaux.

Proposition 2.6.1. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, N un sous-groupe normal de G (non nécessairement définissable) et X un sous-ensemble de G qui engendre un sous-groupe nilpotent H de G. Alors $E_{G/N}(XN/N) = E_G(H)N/N$.*

Preuve. – Nous faisons la preuve par induction sur le rang de G. Soit $E/N = E_{G/N}(XN/N)$. Il suffit de montrer $E/N \leq E_G(H)N/N$. Si N est central dans G, on a $E/N = E_G(X)/N$. Le corollaire 2.4.5 donne $E_G(X) = E_G(H)$, d'où $E/N = E_G(H)/N$. On peut donc supposer $N \not\leq Z(G)$. Le fait 1.2.13 dit que N contient un sous-groupe G-minimal A. Par hypothèse d'induction, on peut supposer $N = A$. Le corollaire 2.4.5 dit que E est définissable et connexe. Alors, si $E \neq G$, l'hypothèse d'induction donne le résultat. On peut donc supposer $E/N = G/N$. Aussi, le corollaire 2.4.5 donne $E/N = E_{G/N}(HN/N)$, et on peut supposer $X = H$. Si $H \leq F(G)$, il n'y a rien à faire. Donc on peut supposer $H \not\leq F(G)$.

Soit $F = (Fratc(G))^\circ$. Montrons qu'on peut supposer $F = 1$. D'après la proposition 2.3.6, HF/F n'est pas contenu dans $F(G/F)$. Le corollaire 2.4.5 donne $E_{G/F}(HF/F) < G/F$. Comme $E_{G/F}(HF/F)$ est définissable et connexe (corollaire 2.4.5), l'hypothèse d'induction montre que $E_{G/F}(HF/F) = E_G(H)F/F$. Si $F \neq 1$, l'hypothèse d'induction appliquée à G/F donne

$$E_{G/F}(HF/F)(NF/F)/(NF/F) = E_{(G/F)/(NF/F)}((HNF/F)/(NF/F))$$

On en déduit

$$(E_G(H)F/F)(NF/F)/(NF/F) = E_{(G/F)/(NF/F)}((HNF/F)/(NF/F)),$$

ce qui prouve $E_G(H)NF/NF = E_{G/NF}(HNF/NF)$ et $E \leq E_G(H)NF$. Comme on a $E = G$, on obtient $G = E_G(H)NF$. Donc le lemme 2.3.2 donne $G = E_G(H)N$, et on peut supposer $F = 1$.

Alors il existe un sous-groupe U de G définissable, connexe et propre maximal de G qui ne contient pas N. Ainsi $G = NU$ et $N \cap U$ est fini, donc central. Comme N est G-minimal et non central, le fait 1.3.17 donne $N \cap U = 1$. Si H centralise N, on a $E_G(H) = G$ puisque $E_{G/N}(HN/N) = G/N$. Le corollaire 2.4.5 contredit alors $H \not\leq F(G)$, donc il existe $h \in H \setminus C_G(N)$. Aussi, on a $h = nu$ pour $n \in N$ et $u \in U$. Comme $C_N(h) = 1$, $C_N(u)$ est trivial d'après le fait 1.3.17 et le choix de h. Le fait 1.3.1 dit qu'alors $N = \{[x, u^{-1}] : x \in N\}$. Ainsi il existe $x \in N$ tel que $n = [x, u^{-1}]$, et $h = [x, u^{-1}]u = u^x \in U^x$. Comme $E_{G/N}(HN/N) = G/N$, $E_G(h)$ contient U^x. Mais $C_N(h) = 1$, donc $E_G(h) = U^x$ et $E_G(H)$ est contenu dans U^x. Comme $E_{G/N}(HN/N) = G/N$, on a $E_G(H) = U^x$ et le résultat suit de cette égalité. □

Corollaire 2.6.2. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-groupe nilpotent de G. Alors $E_G(H)$ est anormal dans G.*

Preuve. – On fait la preuve par induction sur le rang de G. Soit A un sous-groupe G-minimal. Alors la proposition 2.6.1 donne $E_G(HA/A) = E_G(H)A/A$ et $E_G(HA/A)$ est anormal dans G/A par hypothèse d'induction. D'après le fait 2.2.6, il suffit de montrer que $E_G(H)$ est anormal dans $E_G(H)A$. Comme $E_G(H)A$ est définissable et connexe (corollaire 2.4.5), on peut supposer $G = E_G(H)A$ par hypothèse d'induction. Si A est central dans G, alors $G = E_G(H)$ et il n'y a rien à démontrer. Sinon le lemme 2.2.2 donne le résultat. □

Le fait 1.4.3 montre que, si P est un groupe abélien fini et si A est un groupe d'automorphisme de P tel que $(|P|, |A|) = 1$, alors $P = C_P(A) \times [P, A]$. La proposition 2.6.4 peut être vu comme un analogue de ce résultat. Elle permet de mieux connaître la structure des groupes 2-résolubles (corollaire 2.6.7).

Lemme 2.6.3. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, A un sous-groupe normal de G, définissable, abélien et centralisé par G', $g \in G$ et*

$$\begin{array}{rccc} ad_g : & A & \longrightarrow & A \\ & a & \longmapsto & [a,g] \end{array}$$

Alors il existe un entier n tel que $A = (ad_g)^n(A) \times E_A(g)$ et tel que $(ad_g)^n(A)$ soit connexe.

Preuve. – Nous faisons la preuve par induction sur le rang de G. Comme $E_G(g)$ est anormal dans G d'après le corollaire 2.6.2, $AE_G(g)$ l'est aussi. Alors $AE_G(g)$ est définissable et connexe d'après la proposition 2.1.7 et, par hypothèse d'induction, on peut supposer $G = AE_G(g)$. Comme ad_g est un homomorphisme définissable de groupe, la suite $((ad_g)^i(A))_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de sous-groupes définissables de A. On en déduit qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(ad_g)^m(A) = (ad_g)^{m+1}(A)$. D'après la proposition 2.4.4 il existe un entier k tel que $(ad_g)^k(E_G(g)) = 1$. Soient $n = max(m,k)$ et $I = (ad_g)^n(A)$. Comme $(ad_g)^n_{|I}$ est un homomorphisme définissable de groupe, $rkI = rk(ad_g)^n_{|I}(I) + rkKer(ad_g)^n_{|I} = rkI + rkE_I(g)$ et $E_I(g)$ est fini.

Montrons que I est connexe. Comme G' centralise A, I est normal dans G. Alors la proposition 2.6.1 donne $E_{G/I}(gI) = E_G(g)I/I$. Comme $I = (ad_g)^n(A)$, A/I est contenu dans $E_{G/I}(gI)$, et on en déduit $G = IE_G(g)$ puisque $G = AE_G(g)$. $E_G(g)$ étant définissable et connexe (proposition 2.4.4), on a $G = I^\circ E_G(g)$. En particulier, on obtient $I/I^\circ = E_I(g)I^\circ/I^\circ$, et la proposition 2.6.1 donne $I/I^\circ = E_{I/I^\circ}(gI^\circ)$. Alors, d'après la proposition 2.4.4, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(ad_g)^{k_0}(I)$ soit contenu dans I°. Comme on a $ad_g(I) = I$ par choix de I, on obtient $I = I^\circ$ et I est connexe.

La proposition 2.5.5 donne la connexité de $E_I(g)$. $E_I(g)$ étant fini, on obtient $E_I(g) = 1$. Comme $G = IE_G(g)$, on a prouvé $A = I \times E_A(g)$. □

Proposition 2.6.4. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, A un sous-groupe de G définissable, normal, abélien et centralisé par G' et H un sous-groupe nilpotent de G. Alors $A = E_A(H) \times F$ où F désigne le plus petit groupe de la suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où $F_0 = A$ et $F_{i+1} = [F(E_G(H)), F_i]$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Aussi, F est un sous-groupe normal, définissable et connexe de G.*

Preuve. – Comme on a $G = G'E_G(H)$ (remarque 2.1.2 et corollaire 2.6.2), F_i est un sous-groupe normal de G pour tout $i \in \mathbb{N}$. De plus, le fait 1.2.7 montre que F_i est définissable pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ceci montre, en particulier, l'existence de F. Comme F/F° est fini, F/F° est central dans G/F° et le choix de F montre que F est connexe. On fait la preuve par induction sur le rang de G. Comme $E_G(H)$ est anormal dans G, $AE_G(H)$ est anormal dans G et, par la proposition 2.1.7, $AE_G(H)$ est définissable et connexe. Alors, par hypothèse d'induction, on peut supposer $G = AE_G(H)$. Comme on a $H \leq F(E_G(H))$ (corollaire 2.4.5), on a $A/F = E_{A/F}(HF/F)$ et $G/F = E_{G/F}(HF/F)$. La proposition 2.6.1 donne $G = FE_G(H)$. En particulier, on a $A = FE_A(H)$ et il reste à montrer $E_F(H) = 1$. On peut donc supposer $A = F$. Si H est contenu dans $F(G)$, on a $F = 1$ et $G = E_G(H)$. Donc on peut supposer qu'il existe $h \in H \setminus F(G)$. D'après le fait 1.3.11, $E_G(h)$ est distinct de G. Soit

$$\begin{array}{rccc} ad_h : & A & \longrightarrow & A \\ & a & \longmapsto & [a,h] \end{array}$$

Le lemme 2.6.3 dit que $A = (ad_h)^n(A) \times E_A(h)$ pour un certain entier n et $(ad_h)^n(A)$ est connexe. Alors, comme on a $G = AE_G(H) = AE_G(h)$ et comme G est distinct de $E_G(h)$, $(ad_h)^n(A)$ n'est pas trivial et, par connexité de $(ad_h)^n(A)$, $(ad_h)^n(A)$ est infini. Soit

$I = (ad_h)^n(A)$. Comme on a $[F(E_G(H)), A] = A$ et comme $F(E_G(H))I/I$ est contenu dans $F(E_{G/I}(HI/I))$, on obtient $[F(E_{G/I}(HI/I)), A/I] = A/I$. L'hypothèse d'induction appliquée à A/I donne $E_{A/I}(HI/I) = 1$ et, comme $E_{A/I}(HI/I) = E_A(H)I/I$ d'après la proposition 2.6.1, $E_A(H)$ est contenu dans I. Mais $E_A(h)$ contient $E_A(H)$ et intersecte trivialement I. Donc $E_A(H)$ est trivial. $\square$

Définition 2.6.5. – *Pour tout groupe G, on note $G^{\mathcal{N}}$ l'intersection des sous-groupes normaux H de G tels que G/H soit nilpotent.*

L'opérateur défini ci-dessus s'avère particulièrement intéressant lorsque, pour un groupe G, $G/G^{\mathcal{N}}$ est nilpotent. Par exemple, par la remarque ci-dessous, c'est le cas si G est de rang de Morley fini. Nous montrerons que c'est vrai pour une classe plus générale de groupes (proposition 3.5.12).

Remarque 2.6.6. – Si G est un groupe de rang de Morley fini, le fait 1.2.7 et la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables de G montrent que $G^i = G^{\mathcal{N}}$ pour un certain entier i et que $G^{\mathcal{N}}$ est définissable. De plus, si G est connexe, le fait 1.2.6 dit que $G^{\mathcal{N}}$ est connexe.

Corollaire 2.6.7. – *Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et 2-résoluble, alors $G = G^{\mathcal{N}} \rtimes C$ pour tout sous-groupe de Carter C de G.*

Preuve. – D'après la remarque 2.6.6, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $G^{\mathcal{N}} = G^i$. Il suffit de prendre, dans la proposition 2.6.4, $A = G^i$ et $H = C$. Comme $E_G(C) = C$ puisque C est nilpotent et autonormalisant, la proposition 2.6.4 et la remarque 2.1.2 donnent le résultat. $\square$

Un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble peut avoir une infinité de classes de conjugaisons de sous-groupes anormaux.

Exemple 2.6.8. – On note $G = (\oplus_{i=0}^n K^+) \rtimes K^*$ ($n \in \mathbb{N}^*$) où K désigne un corps algébriquement clos et où K^* agit linéairement sur $\oplus_{i=0}^n K^+$. On choisit $\mathcal{H} = (H_i)_{i \in I}$ une famille infinie de sous-espaces vectoriels, deux à deux distincts, de $\oplus_{i=0}^n K^+$. Pour tout $i \in I$, on note $U_i = H_i \rtimes K^*$. Alors, comme H_i est normal dans G pour tout $i \in I$, les sous-groupes $(U_i)_{i \in I}$ de G sont deux à deux non conjugués. Pourtant, ils forment une famille de sous-groupes anormaux de G puisque K^* est anormal dans G.

Le théorème 2.6.10 montre que, par contre, il ne peut pas y avoir une infinité de classes de conjugaisons de centralisateurs généralisés de sous-groupes nilpotents.

Lemme 2.6.9. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, A un sous-groupe G-minimal de G et E_0 et E_1 deux centralisateurs généralisés de sous-groupes nilpotents de G tels que $G = AE_0 = AE_1$ et tels que $A \cap E_0$ et $A \cap E_1$ soient finis. Alors E_0 et E_1 sont conjugués et $G = A \rtimes E_0 = A \rtimes E_1$.*

Preuve. – On fait la preuve par induction sur le rang de G. Les intersections $A \cap E_0$ et $A \cap E_1$ sont triviales d'après la proposition 2.5.5 et le corollaire 2.6.2. Si $F(G)^\circ = A$, alors $Z(G)$ est fini et $G' = A$ d'après le fait 1.3.19, donc le fait 1.3.21 donne le résultat. Ainsi on peut supposer $F(G)^\circ \neq A$. Alors E_0 contient un sous-groupe G-minimal B. Soient X un sous-ensemble de G tel que $E_1 = E_G(X)$ et $x \in X$. Alors on a $F(G/A) = F(E_1)A/A$ puisque $G = A \rtimes E_1$, et on en déduit, par le fait 1.3.11, que xA appartient à $F(G/A)$. Mais la section BA/A est G/A-minimale, donc centrale dans $F(G/A)$ d'après le fait 1.3.19 et, en particulier, est centralisée par xA. Alors $[B, x]$ est contenu dans $A \cap B = 1$ et x centralise B, d'où $B \leq E_G(x)$. Ceci prouve que B est contenu dans $E_G(X) = E_1$. L'hypothèse d'induction donne le résultat dans le quotient G/B, donc dans G. $\square$

Théorème 2.6.10. – *Un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de centralisateurs généralisés de sous-groupes nilpotents. De plus, ce nombre est borné par* $2^{rkG^{\mathcal{N}}}$.

Preuve. – Supposons que G soit un contrexemple de rang minimal au théorème. Alors $G^{\mathcal{N}}$ contient un sous-groupe G-minimal A. Par minimalité du rang de G, G/A a au plus $2^{rkG^{\mathcal{N}}-rkA}$ classes de conjugaisons de centralisateurs généralisés de sous-groupes nilpotents. Par la proposition 2.6.1, il existe un centralisateur généralisé E/A de G/A tel que E contienne E_0, E_1 et E_2 trois centralisateurs généralisés de sous-groupes nilpotents non conjugués deux à deux et qui vérifient $E = AE_0 = AE_1 = AE_2$. En particulier il y en a deux qui intersectent finiment A. Le lemme 2.6.9 donne alors une contradiction. □

Nous donnons deux corollaires à ce théorème.

Corollaire 2.6.11. – *Un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de sous-groupes nilpotents maximaux.*

Preuve. – Soit F un sous-groupe nilpotent maximal de G (il existe d'après le corollaire 2.4.5). Alors $F = F(E_G(F))$ et le théorème 2.6.10 donne le résultat. □

Le corollaire 2.6.13 donne des renseignements concernant les sous-groupes de Hall. Avant de l'énoncer nous donnons le lemme suivant.

Lemme 2.6.12. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, $\pi \subseteq \mathcal{P}$, B le plus grand π-sous-groupe définissable, connexe et d'exposant borné de $F(G)$, R un π-sous-groupe de Hall de G et C un sous-groupe de Carter de R. Alors $N_G(R) = BE_G(C)$.*

Preuve. – R est localement fini d'après le fait 1.4.2. D'après le fait 1.3.19, R' est contenu dans $F(G)^{\circ}$, donc R' est contenu dans $B * T$, où T est la somme directe des p-tores de $F(G)$ pour $p \in \mathcal{P}$, d'après le fait 1.3.13. Mais T est central dans G puisque G est connexe (fait 1.4.6), donc R^2 est contenu dans B et $R = BC$ d'après le fait 1.6.4. Par l'argument de Frattini, on a $N_G(R) = BN_G(C)$. Il suffit alors de montrer $E_G(C) = N_G(C)$. D'après le corollaire 2.4.5, C est nilpotent. Donc, comme $[C, N_G(C)] \leq C$, $N_G(C)$ est contenu dans $E_G(C)$, aussi C est contenu dans $F(E_G(C))$. Soit S le π-sous-groupe de Hall de $F(E_G(C))$, nécessairement S contient C. Alors BS est un π-sous-groupe de G qui contient R, donc $R = BS$ et S est contenu dans R. On en déduit que $N_S(C) = C$ et, par la condition de normalisateur dans S, $C = S$. Ceci prouve que C est normal dans $E_G(C)$, d'où le résultat. □

Corollaire 2.6.13. – *Un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de normalisateurs de sous-groupes de Hall.*

Preuve. – Suit directement du lemme 2.6.12 et du théorème 2.6.10. □

Le lemme 2.6.12 nous permet aussi d'obtenir la généralisation suivante du fait 1.4.9.

Corollaire 2.6.14. – *Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et si R est un sous-groupe de Hall de G, alors $N_G(R)$ est anormal dans G. En particulier R est connexe.*

Preuve. – D'après le lemme 2.6.12 et le corollaire 2.6.2, $N_G(R)$ est anormal dans G. Alors $N_G(R)$ est en particulier définissable et connexe d'après la proposition 2.1.7 et R est connexe d'après le fait 1.4.9. □

2.7 Le radical quasiunipotent

Le *radical quasiunipotent* (définition 2.7.4) a été introduit par Borovik et analysé par Altseimer et Berkman dans [5]. Il constitue un outil très important pour l'étude des groupes de rang de Morley fini résolubles. Il s'agit d'un sous-groupe définissable et connexe de $F(G)$ qui ne contient pas de $\mathcal{P}$-tore. Comme en témoigne le fait 2.7.2, la notion de *sous-groupe quasiunipotent* est une imitation de la notion de sous-groupe unipotent pour les groupes algébriques.

Le fait 1.3.19 dit que, si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, $G/F(G)$ est abélien et divisible. Nous montrerons que nous avons le même résultat lorsque l'on quotiente G par son radical quasiunipotent (proposition 2.7.9).

Définition 2.7.1. – **([5], déf. 2.1, Borovik)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Un sous-groupe définissable, connexe et nilpotent U de G est* quasiunipotent *si U ne contient pas de $\mathcal{P}$-tore.*

Fait 2.7.2. – **([5], lemme 2.4, Altseimer, Berkman)** *Si G est un groupe algébrique connexe qui n'interprète pas de mauvais corps, alors les sous-groupes quasiunipotents maximaux de G sont les sous-groupes unipotents maximaux de G.*

Fait 2.7.3. – **([5], lemme 2.3, Altseimer, Berkman)** *Un sous-groupe quasiunipotent U d'un groupe de rang de Morley fini peut être écrit sous la forme $U = B \times D$, où B et D sont définissables, B est d'exposant borné et D est sans torsion.*

Définition 2.7.4. – **([5], déf. 3.3)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini. On définit par $Q(G) = \langle U | U \trianglelefteq G, U \text{ est quasiunipotent } \rangle$ le* radical quasiunipotent *de G.*

Le fait 1.2.5 montre que le radical quasiunipotent d'un groupe de rang de Morley fini est définissable et connexe. La remarque 2.7.6 dit même qu'il s'agit d'un sous-groupe quasiunipotent.

Dans [5], le fait suivant est donné avec l'hypothèse "G n'interprète pas de mauvais corps". Or la preuve n'utilise pas cette hypothèse, nous donnons alors l'énoncé suivant :

Fait 2.7.5. – **([5], lemme 3.5, Altseimer, Berkman)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini nilpotent. Alors $Q(G)$ est le seul sous-groupe quasiunipotent maximal de G.*

Remarque 2.7.6. – Si G est un groupe de rang de Morley fini, on a $Q(G) \leq F(G)$, donc $Q(G) = Q(F(G))$. On déduit alors du fait 2.7.5 que, pour tout groupe de rang de Morley fini G, $Q(G)$ est quasiunipotent.

Lemme 2.7.7. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et nilpotent. Alors G' est quasiunipotent.*

Preuve. – Comme G' est définissable et connexe (fait 1.2.6), il suffit de montrer que G' ne contient pas de $\mathcal{P}$-tore. D'après le fait 1.3.13, $G = B * D$ où B et D sont définissables et connexes, B est d'exposant borné et D est divisible. Donc on a $G' = B' * D'$. Or D' est sans torsion d'après le fait 1.3.13 et, comme B' est d'exposant borné, G' ne contient pas de $\mathcal{P}$-tore. □

Lemme 2.7.8. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors $G^{\mathcal{N}}$ est quasiunipotent.*

Preuve. – D'après le fait 1.2.6, il suffit de montrer que $G^{\mathcal{N}}$ ne contient pas de $\mathcal{P}$-tore. D'après le fait 1.3.13, $F(G)^\circ$ est un produit central de deux sous-groupes D et C définissables, connexes et caractéristiques avec D divisible et C d'exposant borné. Soit $F/C = F(G/C)^\circ$.

Alors F contient $F(G)^\circ$ et $F/F(G)^\circ$ est un sous-groupe définissable et connexe de $G/F(G)^\circ$. Comme $G/F(G)^\circ$ est abélien et divisible (fait 1.3.19), $F/F(G)^\circ$ est aussi abélien et divisible. Comme $F(G)^\circ/C(\cong D/(D\cap C))$ est divisible, on en déduit que F/C est divisible-par-divisible. F/C étant nilpotent, F/C est divisible. Alors le fait 1.3.14 dit que $[G/C, F/C]$ est sans torsion. Or $G^{\mathcal{N}}C/C$ est contenu dans $G'C/C$, donc dans F/C (fait 1.3.19). Alors $[G/C, G^{\mathcal{N}}C/C] = G^{\mathcal{N}}C/C$ est sans torsion. Mais $G^{\mathcal{N}}C/C$ est isomorphe à $G^{\mathcal{N}}/(G^{\mathcal{N}}\cap C)$ et $G^{\mathcal{N}}\cap C$ est d'exposant borné. Donc $G^{\mathcal{N}}$ ne contient pas de $\mathcal{P}$-tore. $\square$

Proposition 2.7.9. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors $G/Q(G)$ est abélien et divisible.*

Preuve. – Montrons que $G/Q(G)$ est abélien. D'après le théorème 2.4.7, G a un sous-groupe de Carter C et C est connexe. Alors le corollaire 2.4.8 donne $G = G^{\mathcal{N}}C$. On en déduit que $G' = G^{\mathcal{N}}C'$. Or le fait 1.3.18 dit que G' est nilpotent. Donc, d'après le fait 2.7.5, G' a un unique sous-groupe quasiunipotent maximal $Q(G')$. Mais le lemme 2.7.7 dit que C' est quasiunipotent, et le lemme 2.7.8 dit qu'il en est de même pour $G^{\mathcal{N}}$. Donc $G' = G^{\mathcal{N}}C' = Q(G')$ est quasiunipotent et normal dans G, et G' est contenu dans $Q(G)$.

Montrons que $G/Q(G)$ est divisible. D'après le fait 1.3.13, $F(G)^\circ$ possède un sous-groupe B définissable, caractéristique et d'exposant borné avec $F(G)^\circ/B$ divisible. En particulier, B est un sous-groupe quasiunipotent normal de G. On en déduit que $F(G)^\circ/Q(G)$ est divisible. Mais le fait 1.3.19 dit que $G/F(G)^\circ$ est divisible. Donc $G/Q(G)$ est abélien et divisible-par-divisible. Ceci prouve que $G/Q(G)$ est divisible. $\square$

Chapitre 3

Sous-groupes localement clos

La non connexité d'un groupe de rang de Morley fini rend souvent délicate la généralisation des théorèmes connus pour les groupes connexes. Pour franchir les obstacles qui apparaissent, il ne suffit pas voir ces groupes comme des extensions finies des groupes connexes. En effet, ils doivent être vus comme des groupes de rang de Morley fini où les propriétés globales d'un groupe connexe n'existent que localement. Pour étudier les propriétés structurelles des groupes connexes, nous introduisons donc les notions de *sous-groupes localement clos* et de *sections localement closes* (définition 3.1.1). D'un point de vu modèle-théorique, ces définitions correspondent à une notion de définissabilité locale (lemme 3.1.22). D'un point de vu groupe-théorique, ce sont les quotients entre deux sous-groupes définissables-par-localement finis (lemme 3.1.9). Il s'agit surtout d'une classe de groupes qui nous permet d'analyser les groupes non connexes. L'utilité de ces notions est mieux comprise dans le contexte résoluble. Toutefois, la section 3.9 sera consacrée à l'étude des 2-sous-groupes de Sylow dans les sections localement closes non nécessairement résolubles.

L'étude des sous-groupes de Carter illustre bien le phénomène décrit ci-dessus. Nous les avons définis comme étant les sous-groupes *localement nilpotents* et autonormalisants. Dans un groupe connexe et résoluble, les sous-groupes de Carter sont *nilpotents*, et ils ont la particularité d'être définissables et connexes (théorème 2.4.7). Cependant, un groupe non connexe peut avoir des sous-groupes de Carter non nilpotents et non définissables (exemple 1.5.8). A priori, la non définissabilité des sous-groupes de Carter rend très délicate la généralisation du théorème 2.4.7 aux groupes non connexes. L'introduction des sous-groupes localement clos rend possible la généralisation de ce résultat aux groupes non connexes (théorème 3.6.6 (i)). Cela tient au fait que les sous-groupes de Carter sont localement clos (corollaire 3.4.19).

Les sections localement closes sont un cadre de travail naturel pour l'étude des groupes de rang de Morley fini. En effet, les deux classes de sous-groupes des groupes de rang de Morley auxquels on est le plus souvent amené à s'intéresser sont les sous-groupes définissables et les sous-groupes localement finis. Or, la classe des sections localement closes regroupe ces deux classes de groupes et, de plus, possède l'avantage d'être close par produit normal (lemme 3.1.11). Aussi, l'essentiel des propriétés des groupes de rang de Morley fini résolubles ont un analogue pour les sections localement closes des groupes de rang de Morley fini résolubles. Par exemple, le théorème de conjugaison des sous-groupes de Hall (fait 1.4.11) reste vrai pour les section localement closes résolubles (théorème 3.2.5). C'est d'ailleur un résultat fondamental pour la suite. Un autre résultat important pour la suite est l'existence de sections localement closes minimales normales dans les sections localement closes (proposition 3.5.7). Ces sections, appelées *sections d_{loc}-minimales*, sont analogues aux sous-groupes G-minimaux pour les groupes G de rang de Morley fini.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. D'abord nous donnons les propriétés générales des sous-groupes localement clos et des sections localement closes. Puis nous montrons le théorème de conjugaison des sous-groupes de Hall pour les sections localement closes résolubles (théorème 3.2.5). Dans la section 3.3, nous montrons des propriétés des sections localement closes et localement nilpotentes. Ensuite, nous analysons les sous-groupes localement résolubles des sections localement closes. Il s'avère que ce sont des sous-groupes résolubles (corollaire 3.4.12). Dans la section 3.5, nous montrons l'existence de sections localement closes minimales normales (proposition 3.5.7). Le théorème d'existence et de conjugaison des sous-groupes de Carter pour les sections localement closes résolubles est donné dans la section suivante (théorème 3.6.6 (*i*)). Dans la section 3.7, nous analysons les sections localement closes qui ont leurs p-sous-groupes localement finis nilpotents pour tout entier premier p. Il s'agit d'une condition de finitude qui confère des propriétés particulières aux groupes qui la vérifient. En particulier, l'ensemble de leurs sous-groupes nilpotents est inductif (proposition 3.7.5). Dans la section qui suit, nous donnons des informations supplémentaires concernant les centralisateurs généralisés. Nous montrons que, dans une section localement close et (localement nilpotente)-par-abélienne, ce sont des sections localement closes (proposition 3.8.1). Nous finissons ce chapitre en montrant que la conjugaison des 2-sous-groupes de Sylow tient, sans hypothèse de résolubilité sur les sections localement closes (proposition 3.9.7). Cette dernière section permet d'espérer que la notion de section localement close aura des conséquences concrètes dans l'étude des groupes non résolubles.

3.1 Généralités et clôture locale

Définition 3.1.1. – *Un sous-groupe H d'un groupe de rang de Morley fini G est dit* localement clos *si, pour toute partie finie X de H, $d(X) \leq H$.*

On appelle section localement close *un groupe qui est un quotient de deux sous-groupes localement clos.*

Le lemme 3.1.9 caractérise les sous-groupes localement clos des groupes de rang de Morley fini comme étant exactement les sous-groupes *définissables-par-localement finis.* Les appellations "sous-groupe localement clos" et "clôture locale" (définition 3.1.14) ont été suggérées par B. Poizat, en particulier suite à une remarque de sa part sur la clôture locale (lemme 3.1.22).

Remarque 3.1.2. – Une réunion croissante de sous-groupes définissables n'est, en général, pas un sous-groupe définissable, sauf si chaque sous-groupe considéré est connexe. En effet, si on considère le pur groupe $\mathbb{C}^*$ et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'ensemble des racines 2^n-ième de l'unité, alors la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$ dont la réunion n'est pas définissable. Par contre, il suit directement de la définition d'un sous-groupe localement clos, que toute réunion croissante de sous-groupes localement clos est localement close.

Nous définissons trois opérateurs sur les sous-groupes d'un groupe de rang de Morley fini. Ils se comportent parfois comme une composante connexe.

Définition 3.1.3. – *Soit H un sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini G. On note $H^+ = \langle d(h)^\circ : h \in H\rangle$, $H^\pm = \langle d(X)^\circ : X$ partie finie de $H\rangle$ et $H^- = \langle U \leq H : U$ est définissable et connexe $\rangle$.*

En général, pour un sous-groupe H d'un groupe de rang de Morley fini, H^+ n'est pas contenu dans H :

Exemple 3.1.4. – Considérons le pur groupe $\mathbb{C}_+$. On choisit un élément x dans $\mathbb{C}_+ \setminus \{0\}$ et on note $H = \langle x\rangle$. Alors $d(x) = \mathbb{C}_+$, et on obtient $H^- = \{0\}$ et $H^+ = H^\pm = \mathbb{C}_+$.

Par contre, trouver un sous-groupe H d'un groupe de rang de Morley fini avec $H^+ \neq H^\pm$ est équivalent à trouver un sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini qui est de torsion sans être localement fini (cf. lemme 3.1.6 (*ii*) et (*iii*)). Cette question est ouverte.

Lemme 3.1.5. – *Si H est un sous-groupe d'un groupe G de rang de Morley fini, alors :*

(i) H^+, $H^\pm$ et H^- sont définissables, connexes et normalisés par H ;

(ii) $(H^+)^+ = H^+$, $(H^\pm)^\pm = H^\pm$ et $(H^-)^- = H^-$;

(iii) si A est un sous-groupe définissable de G normalisé par H, alors $(HA/A)^+ = H^+A/A$ et $(HA/A)^\pm = H^\pm A/A$;

($i\nu$) $H^+ = d(u_0, ..., u_n)$ pour des éléments $u_0, ..., u_n$ de $H \cap H^+$;

(ν) HH^+/H^+ est un groupe de torsion ;

(νi) $HH^\pm/H^\pm$ est un groupe localement fini ;

(νii) $H^\pm = d(X)^\circ$ pour une partie finie X de H.

Preuve. – (i) est une conséquence du fait 1.2.5 et (i) montre que $(H^-)^- = H^-$.

Montrons (iii). Pour tout $h \in H$, si on note $\overline{h}$ la classe de h modulo A, on a $d(\overline{h})^\circ = d(h)^\circ A/A$. On en déduit $(HA/A)^+ = H^+A/A$. Aussi, si X désigne un sous-ensemble fini de H, alors on a $d(XA/A)^\circ = d(X)^\circ A/A$, d'où $(HA/A)^\pm = H^\pm A/A$.

Montrons $(H^+)^+ = H^+$ et ($i\nu$). Le fait 1.2.5 montre qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des élément $h_0, ..., h_n$ de H tels que $H^+ = \langle d(h_0)^\circ, ..., d(h_n)^\circ \rangle$. Pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, il existe $m_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $h_i^{m_i} \in d(h_i)^\circ$. Notons $u_i = h_i^{m_i}$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$. Alors, pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, $d(u_i)$ est d'indice fini dans $d(h_i)$, donc $d(u_i) = d(h_i)^\circ$ et $H^+ = \langle d(u_0), ..., d(u_n) \rangle$. On en déduit que $(H^+)^+$ contient H^+. H^+ étant définissable d'après (i), on a $(H^+)^+ \leq H^+$, d'où l'égalité. Le fait que H^+ soit définissable montre aussi que $H^+ = d(u_0, ..., u_n)$. Mais $u_0, ..., u_n$ appartiennent à $H \cap H^+$. Donc on a prouvé ($i\nu$).

Les assertions (ν) et (νi) suivent directement des définitions de H^+ et $H^\pm$.

Finissons la preuve de (ii). D'après (i), $H^\pm$ est définissable, donc $H^\pm$ contient $(H^\pm)^\pm$. Il reste à montrer $H^\pm \leq (H^\pm)^\pm$. Comme (νi) dit que $H^\pm/(H^\pm)^\pm$ et $HH^\pm/H^\pm$ sont localement finis, $HH^\pm/(H^\pm)^\pm$ est aussi localement fini (fait 1.4.1). Alors, si X est une partie finie de H, $\langle X \rangle (H^\pm)^\pm/(H^\pm)^\pm = d(X)(H^\pm)^\pm/(H^\pm)^\pm$ est fini. On en déduit que $d(X)^\circ$ est un sous-groupe de $(H^\pm)^\pm$, d'où $H^\pm \leq (H^\pm)^\pm$.

Il reste à montrer (νii). D'après le fait 1.2.5, $H^\pm$ est définissable et connexe, et il existe $l \in \mathbb{N}^*$ et des parties finies $X_1, ..., X_l$ de H telles que $H^\pm = \langle d(X_1)^\circ, ..., d(X_l)^\circ \rangle$. On note $X = \cup_{i=1}^l X_i$. Alors $d(X)^\circ$ est contenu dans $H^\pm$. Comme $d(X_i)^\circ \leq d(X)^\circ$ pour tout $i \in \{1, ..., l\}$, on obtient $H^\pm = d(X)^\circ$, ce qui prouve (νii). □

Le lemme suivant caractérise H^+ et $H^\pm$ pour les sous-groupes localement clos.

Lemme 3.1.6. – *Si H est un sous-groupe localement clos d'un groupe G de rang de Morley fini, alors :*

(i) $H^+ \leq H^\pm \leq H^- \leq H$;

(ii) $H^\pm$ est le plus petit sous-groupe normal et localement clos de H tel que $H/H^\pm$ soit localement fini ;

(iii) H^+ est le plus petit sous-groupe normal et localement clos de H tel que H/H^+ soit de torsion.

Preuve. – Le lemme 3.1.5 (νii) dit qu'il existe une partie finie X de H telle que $H^\pm = d(X)^\circ$. Pour montrer (i), il suffit de montrer $H^\pm \leq H^-$. Comme H contient $d(X)$ puisque H est localement clos, H^- contient $d(X)^\circ = H^\pm$.

Montrons (ii). Le lemme 3.1.5 (νi) montre que $H/H^\pm$ est localement fini. Soit U un sous-groupe localement clos et normal de H avec H/U localement fini. Montrons que U contient $H^\pm$. H normalise $U^\pm$ et, d'après (i), U contient $U^\pm$. Comme $U/U^\pm$ est localement fini d'après le lemme 3.1.5 (νi), $H/U^\pm$ est localement fini (fait 1.4.1). Alors $\langle X \rangle U^\pm/U^\pm$ est fini et $\langle X \rangle U^\pm$ est définissable. On en déduit que $H^\pm (= d(X)^\circ)$ est contenu dans $U^\pm$. Ceci prouve que U contient $H^\pm$.

Montrons (iii). Le lemme 3.1.5 (ν) montre que H/H^+ est de torsion. Soit U un sous-groupe localement clos et normal de H avec H/U de torsion. Montrons que U contient H^+.

H normalise U^+ et, d'après (i), U contient U^+. Comme U/U^+ est de torsion d'après le lemme 3.1.5 (ν), H/U^+ est aussi de torsion. Alors, pour tout $h \in H$, $\langle h\rangle U^+/U^+$ est fini et $\langle h\rangle U^+$ est définissable. On en déduit que $d(h)^\circ$ est contenu dans U^+ et H^+ est contenu dans U^+. Ceci prouve que U contient H^+. $\square$

Le corollaire suivant dit que $H^+ = H^\pm$ pour tout sous-groupe localement clos H d'un groupe de rang de Morley fini résoluble. Par la suite nous étudierons essentiellement les groupes résolubles. C'est pour cela nous allons si peu nous intéresser à $H^\pm$ par la suite.

Corollaire 3.1.7. – *Si H est un sous-groupe localement clos d'un groupe G de rang de Morley fini résoluble, alors*
(i) *H/H^+ est localement fini ;*
(ii) *$H^+ = H^\pm$.*

Preuve. – L'assertion (i) suit directement du lemme 3.1.5 (ν) et du fait 1.4.2. L'assertion (ii) est conséquence de (i) et du lemme 3.1.6 (ii). $\square$

Corollaire 3.1.8. – *Si H est un sous-groupe localement clos d'un groupe G de rang de Morley fini, alors H/H^- est localement fini.*

Preuve. – Le lemme 3.1.6 (i) dit que H^- contient $H^\pm$. Comme $H/H^\pm$ est localement fini d'après le lemme 3.1.5 (νi), on a le résultat. $\square$

La caractérisation suivante des sous-groupes localement clos est fondamentale pour tout ce qui suit.

Lemme 3.1.9. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G. Alors H est localement clos si et seulement si H est définissable-par-localement fini.*

Preuve. – Supposons H localement clos. Le lemme 3.1.5 (i) dit que H^- est un sous-groupe définissable et normal de H. Comme le corollaire 3.1.8 dit que H/H^- est localement fini, on a le résultat.

Réciproquement, supposons H définissable-par-localement fini. Soient X une partie finie de H et U un sous-groupe normal et définissable de H avec H/U localement fini. Alors $\langle X\rangle U/U$ est fini. Donc $\langle X\rangle U$ est définissable. En particulier on a $d(X) \leq \langle X\rangle U \leq H$ et H est localement clos. $\square$

Corollaire 3.1.10. – *Si H est un sous-groupe d'un groupe G de rang de Morley fini, alors H est localement clos si et seulement si $H^\pm \leq H$. En particulier, si G est résoluble, H est localement clos si et seulement si $H^+ \leq H$.*

Preuve. – Si H est localement clos, le lemme 3.1.6 (i) donne $H^\pm \leq H$.

Réciproquement, supposons $H^\pm$ contenu dans H. D'après le lemme 3.1.9, il suffit de montrer que H est définissable-par-localement fini. $H^\pm$ est un sous-groupe définissable et normal dans H d'après le lemme 3.1.5 (i). Le lemme 3.1.5 (νi) dit que $H/H^\pm$ est localement fini, et H est localement clos.

Si G est résoluble, le corollaire 3.1.7 (ii) donne $H^\pm = H^+$, d'où le résultat. $\square$

Lemme 3.1.11. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H et K deux sous-groupes localement clos de G tels que H normalise K. Alors HK est localement clos.*

Preuve. – Comme $H(HK)^-/(HK)^-$ et $K(HK)^-/(HK)^-$ sont localement finis d'après le corollaire 3.1.8, $HK/(HK)^-$ est localement fini (fait 1.4.2). Alors HK est définissable-par-localement fini et le lemme 3.1.9 dit que HK est localement clos. $\square$

Corollaire 3.1.12. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H un sous-groupe de G et E un sous-groupe de H. Alors E possède un unique plus grand sous-groupe localement clos normal dans H.*

Lemme 3.1.13. – *Dans un groupe de rang de Morley fini, toute intersection de sous-groupes localement clos est localement close.*

Preuve. – Soient I un ensemble, $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes localement clos d'un groupe de rang de Morley fini G et $H = \bigcap_{i\in I} H_i$. Si X est une partie finie de H, alors $d(X)$ est contenue dans H_i pour tout $i \in I$ puisque H_i est localement clos pour tout $i \in I$ et on trouve $d(X) \leq H$. On en déduit que H est localement clos. □

Nous pouvons alors définir la *clôture locale*.

Définition 3.1.14. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et X une partie de G. La* clôture locale *$d_{loc}(X)$ de X dans G est le plus petit sous-groupe localement clos de G qui contienne X.*

Remarque 3.1.15. – Si une partie Y d'un groupe G de rang de Morley fini normalise une partie X de G, alors Y normalise $d_{loc}(X)$.

Lemme 3.1.16. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et X une partie de G. Alors $d_{loc}(X) = \langle X\rangle^{\pm}\langle X\rangle$ et $d_{loc}(X)/\langle X\rangle^{\pm}$ est localement fini. En particulier, si X est fini, $d_{loc}(X) = d(X)$.*

Preuve. – Le lemme 3.1.5 (νi) dit que $\langle X\rangle\langle X\rangle^{\pm}/\langle X\rangle^{\pm}$ est localement fini. Comme $\langle X\rangle^{\pm}$ est définissable (lemme 3.1.5 (i)), on en déduit que $\langle X\rangle\langle X\rangle^{\pm}$ est définissable-par-localement fini. Alors $\langle X\rangle\langle X\rangle^{\pm}$ est localement clos (lemme 3.1.9) et $d_{loc}(X) \leq \langle X\rangle\langle X\rangle^{\pm}$. Mais le lemme 3.1.6 ($i$) donne $\langle X\rangle^{\pm} \leq d_{loc}(X)$. Donc on obtient $d_{loc}(X) = \langle X\rangle\langle X\rangle^{\pm}$ et $d_{loc}(X)/\langle X\rangle^{\pm}$ est localement fini. □

Comme la suite sera essentiellement consacrée aux groupes résolubles, on donne aussi la version "résoluble" du lemme 3.1.16.

Corollaire 3.1.17. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et X une partie de G. Alors $d_{loc}(X) = \langle X\rangle^{+}\langle X\rangle$ et $d_{loc}(X)/\langle X\rangle^{+}$ est localement fini.*

Preuve. – Ceci suit du corollaire 3.1.7 (ii) et du lemme 3.1.16. □

Nous montrons qu'un sous-groupe localement clos H contient la clôture définissable $d(X)$ de toute partie définissable X de H (corollaire 3.1.20).

Lemme 3.1.18. – *Si X est un sous-ensemble définissable d'un groupe G de rang de Morley fini, alors $X\langle X\rangle^{-}/\langle X\rangle^{-}$ est fini. En particulier, $\langle X\rangle/\langle X\rangle^{-}$ est finiment engendré.*

Preuve. – D'après le fait 1.2.9, il existe un sous-groupe définissable U de $\langle X\rangle$ tel que XU/U soit fini. Donc XU°/U° est fini et, comme on a $U^{\circ} \leq \langle X\rangle^{-}$, $X\langle X\rangle^{-}/\langle X\rangle^{-}$ est fini. □

Corollaire 3.1.19. – *Si X est un sous-ensemble définissable d'un groupe G de rang de Morley fini, alors $d(X) = d_{loc}(X)$.*

Preuve. – On peut supposer $G = d(X)$. Comme X normalise $\langle X\rangle^{-}$, $\langle X\rangle^{-}$ normal dans G. Quitte à quotienter G par $\langle X\rangle^{-}$, on peut supposer $\langle X\rangle^{-} = 1$. Alors le lemme 3.1.18 dit que X est fini. Le lemme 3.1.16 permet de conclure. □

Corollaire 3.1.20. – *Si H est un sous-groupe localement clos d'un groupe de rang de Morley fini, alors H contient la clôture définissable $d(X)$ de toute partie définissable X de H.*

Preuve. – Comme H est localement clos, $d_{loc}(X)$ est contenu dans H. Le corollaire 3.1.19 donne le résultat. □

On obtient aussi un résultat sur les sous-groupes localement finis et engendrés par un sous-ensemble définissable :

Corollaire 3.1.21. – *Soit X un sous-ensemble définissable d'un groupe G de rang de Morley fini. Si $\langle X\rangle$ est localement fini, alors $\langle X\rangle$ est définissable.*

Preuve. – Le lemme 3.1.18 dit que $\langle X\rangle/\langle X\rangle^-$ est finiment engendré. Comme c'est un groupe localement fini, $\langle X\rangle/\langle X\rangle^-$ est fini et $\langle X\rangle$ est définissable. □

Le lemme 3.1.22 a été démontré par B. Poizat. Il permet de voir la clôture locale comme une réunion de sous-groupes plutôt que comme une intersection de sous-groupes.

Lemme 3.1.22. – **(B. Poizat)** *Si G est un groupe de rang de Morley fini et si A est une partie de G alors, pour toute partie finie U de $d_{loc}(A)$, il existe une partie finie X_U de A telle que $U \subseteq d(X_U)$. En particulier,*

$$d_{loc}(A) = \bigcup_{X \text{ partie finie de } A} d(X)$$

Preuve. – Le lemme 3.1.16 donne $d_{loc}(A) = \langle A\rangle^{\pm}\langle A\rangle$. Donc il existe une partie finie A_0 de A telle que $\langle A\rangle^{\pm}\langle A_0\rangle$ contienne U. Le lemme 3.1.5 (νii) dit qu'il existe une partie finie A_1 de $\langle A\rangle$ telle que $\langle A\rangle^{\pm} = d(A_1)^\circ$. Mais chaque élément de A_1 s'écrit comme un produit fini d'éléments de A et d'inverses d'éléments de A. Donc il existe une partie finie A_2 de A tel qu'on ait $A_1 \subseteq \langle A_2\rangle$. On note $X_U = A_0 \cup A_2$. Alors U est contenu dans $d(X_U)$. □

Corollaire 3.1.23. – *Soit X un sous-ensemble définissable d'un groupe G de rang de Morley fini. Si toute partie finie de X engendre un sous-groupe nilpotent (resp. résoluble), $d(X)$ est localement nilpotent (resp. localement résoluble).*

Preuve. – Le corollaire 3.1.19 donne $d(X) = d_{loc}(X)$. Soit U une partie finie de $d(X)$. Le lemme 3.1.22 dit qu'il existe une partie finie X_U de X avec $U \subseteq d(X_U)$. Comme le fait 1.3.15 dit que $d(X_U)$ est nilpotent (resp. résoluble), on obtient le résultat. □

Lemme 3.1.24. – *Soient U un sous-groupe d'un groupe G de rang de Morley fini et V un sous-groupe d'indice fini de U. Alors $V^{\pm} = d_{loc}(V)^{\pm} = U^{\pm} = d_{loc}(U)^{\pm}$. En particulier, si G est résoluble, $V^+ = d_{loc}(V)^+ = U^+ = d_{loc}(U)^+$.*

Preuve. – U normalise un sous-groupe V_0 de V d'indice fini dans U. Alors on a $V_0^{\pm} \leq V^{\pm} \leq U^{\pm}$ et $d_{loc}(V_0)^{\pm} \leq d_{loc}(V)^{\pm} \leq d_{loc}(U)^{\pm}$. Donc on peut supposer $V = V_0$ et il suffit de montrer que $d_{loc}(U)^{\pm}$ est contenu dans $V^{\pm}$.

Comme U normalise V, U normalise $V^{\pm}$. Mais $VV^{\pm}/V^{\pm}$ est un sous-groupe d'indice fini de $UV^{\pm}/V^{\pm}$ et $VV^{\pm}/V^{\pm}$ est localement fini (lemme 3.1.5 (νi)). Donc $UV^{\pm}/V^{\pm}$ est aussi localement fini et $UV^{\pm}$ est localement clos. Ceci prouve que $d_{loc}(U)$ est contenu dans $UV^{\pm}$. Le lemme 3.1.6 (ii) donne $d_{loc}(U)^{\pm} \leq V^{\pm}$.

Si G est résoluble, le corollaire 3.1.7 (ii) donne $V^+ = d_{loc}(V)^+ = U^+ = d_{loc}(U)^+$. □

Voici l'analogue localement clos du fait 1.2.8.

Lemme 3.1.25. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H et K deux sous-groupes de G localement clos. Si H normalise K, alors $[H, K]$ est localement clos.*

Preuve. – On fait la preuve par induction sur le rang et le degré de G. On peut supposer $G = d(HK)$. Alors $[H,K]^-$ est normal dans G et, si $[H,K]^- \neq 1$, $[H,K]/[H,K]^-$, donc $[H,K]$, est localement clos par hypothèse d'induction. Donc on peut supposer $[H,K]^- = 1$. Comme, d'après le fait 1.2.6, $[H,K^-]$ et $[H^-,K]$ sont définissables, connexes et contenus dans $[H,K]$, $[H,K^-] = [H^-,K] = 1$. Montrons que $[H,K]$ est localement fini. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u_0,...,u_n$ des éléments de $[H,K]$. Alors il existe des entiers m et l et des éléments $h_0,...,h_m$ de H et $k_0,...,k_l$ de K tels que, si $U = \langle h_0,...,h_m\rangle$ et si $V = \langle k_0,...,k_l\rangle$, $u_0,...,u_n$ appartiennent à $[U,V]$. H/H^- et K/K^- étant localement fini, UH^-/H^- et VK^-/K^- sont finis. On en déduit que l'ensemble $\{[u,v] : u \in U, v \in V\}$ est fini et, comme il est contenu dans K et comme K/K^- est localement fini, $[U,V]VK^-/K^-$ est fini. Ainsi $[U,V]VK^-$ est définissable. Comme $[U,V]VK^-$ est normalisé par UH^- et comme UH^- est définissable, le fait 1.2.8 dit que le sous-groupe $[UH^-,[U,V]VK^-]$ est définissable. Or il est contenu dans $[H,K]$ et on a $[H,K]^- = 1$, donc il est fini. On en déduit la finitude de $[U,V]$. □

Corollaire 3.1.26. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G localement clos. Alors, pour tout ordinal α, H^α et $H^{(\alpha)}$ sont localement clos.*

Preuve. – Ceci suit des lemmes 3.1.13 et 3.1.25. □

Nous montrerons que si H est un sous-groupe localement clos d'un groupe de rang de Morley fini, alors il existe des entiers k_1 et k_2 tels que $H^{(k_1)} = H^{(k_1+1)}$ et $H^{k_2} = H^{k_2+1}$ (propositions 3.4.13 et 3.5.12).

Définition 3.1.27. – *Pour tout groupe G et tout sous-groupe H de G, on appelle* clôture normale *de H dans G le sous-groupe de G engendré par les conjugués de H dans G.*

Fait 3.1.28. – **([35], cf. th. 2.1 (iii), p.18)** *Pour tout groupe G et tout sous-groupe H de G, la clôture normale de H dans G est $H[H,G]$.*

Corollaire 3.1.29. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et $H \leq K$ deux sous-groupes de G localement clos. Alors la clôture normale de H dans K est localement close.*

Preuve. – Ceci suit du fait 3.1.28 et des lemmes 3.1.11 et 3.1.25. □

Comme le montrent les deux exemples suivants, une section localement close d'un groupe G de rang de Morley fini n'est, en général, pas un $\mathcal{M}_c$-groupe. Par contre, nous allons montrer que les centralisateurs des sections localement closes sont des sections localement closes (proposition 3.1.33).

Exemple 3.1.30. – **([84], section 5, Wehrfritz)** On considère un corps algébriquement clos F de caractéristique $p \neq 0$ et E un sous-groupe additif de F tel que $F = E \oplus \langle 1\rangle$. On note

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} : a \in F, b \in F, c \in F \right\},$$

$$T_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} : m \in F \right\}$$

et

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} : m \in E \right\}.$$

Alors T est un p-groupe 2-nilpotent de rang de Morley 3. Nous avons les égalités $Z(T) = T_1 = C_T(T/R) = T'$. Nous montrons que le groupe quotient $G = T/R$ n'est pas un $\mathcal{M}_c$-groupe. Comme $T_1 = C_T(T/R)$, nous avons $Z(G) = T_1/R$ et $Z(G)$ est cyclique d'ordre p. Aussi, comme $G' = T'/R = T_1/R$, G' est cyclique d'ordre p et, pour tout élément x de G, $C_G(x)$ est d'indice fini dans G. Comme G est infini, G ne peut pas être un $\mathcal{M}_c$-groupe.

L'exemple suivant, qui est très proche du précédent, montre qu'on peut même choisir le groupe de rang de Morley 2 :

Exemple 3.1.31. – Nous reprenons les notations de l'exemple précédent. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ v & u^{p^n} & 1 \end{pmatrix} : u \in F, v \in F \right\}$$

Alors H est un sous-groupe 2-nilpotent de T et H est de rang de Morley 2 et d'exposant p. De plus, on a $T_1 = C_H(H/R)$ et $T_1 = H'$. Nous montrons que le groupe quotient $G_0 = H/R$ n'est pas un $\mathcal{M}_c$-groupe. Comme $T_1 = C_H(H/R)$, nous avons $Z(H) = T_1/R$ et $Z(H)$ est cyclique d'ordre p. Aussi, comme $G_0' = H'/R = T_1/R$, G' est cyclique d'ordre p et, pour tout élément x de G_0, $C_{G_0}(x)$ est d'indice fini dans G_0. Comme G_0 est infini, G_0 ne peut pas être un $\mathcal{M}_c$-groupe.

Fait 3.1.32. – **([69], 1.6.11, p. 36)** *Si G est un groupe finiment engendré et si H est un sous-groupe d'indice fini dans G, alors H est finiment engendré.*

Proposition 3.1.33. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H/K une section localement close de G. Alors, pour tout sous-ensemble X de H, $C_{H/K}(XK/K)$ est une section localement close.*

Preuve. – On peut supposer $G = d(H)$. Quitte à quotienter G par K^-, on peut supposer $K^- = 1$. Le corollaire 3.1.8 dit que K est localement fini. Aussi, le fait 1.2.6 montre que $[H^-, K]$ est un sous-groupe définissable et connexe de K, et alors $[H^-, K] = 1$. Notons $C/K = C_{H/K}(XK/K)$ et montrons que C est localement clos. D'après le lemme 3.1.13 on peut supposer $X = \{x\}$ pour $x \in H$. Soit C_0 une partie finie de C. Alors $d(C_0)$ est un sous-groupe de H et $d(C_0)^\circ$ est contenu dans H^-. Donc $d(C_0)^\circ$ centralise K. Montrons que $d(C_0)^\circ$ centralise $d(x)^\circ$. Soit $C_1 = \langle C_0 \rangle^\circ$. Alors on a $d(C_1) = d(C_0)^\circ$ et il suffit de montrer que $d(C_1)$ centralise $d(x)^\circ$. Le fait 3.1.32 dit que C_1 est finiment engendré. Il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^j \in d(x)^\circ$. Alors $x^j (\in H^-)$ centralise K. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note

$$\begin{array}{cccc} ad_i : & C_1 & \longrightarrow & K \\ & c & \longmapsto & [c, x^i] \end{array}$$

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ad_i est un homomorphisme de groupes et, donc, $ad_i(C_1)$ est un sous-groupe finiment engendré de K. K étant localement fini, $ad_i(C_1)$ est fini pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Comme C_1 et x^j centralisent K, $d(C_1, x^j)$ centralise $ad_j(C_1)$. On note $\overline{x^j}$ la classe de x^j modulo $ad_j(C_1)$. Alors $C_1 ad_j(C_1)/ad_j(C_1)$ centralise $\overline{x^j}$. Donc $d(C_1)ad_j(C_1)/ad_j(C_1)$ centralise aussi $\overline{x^j}$ et on obtient $[d(C_1), x^j] \leq ad_j(C_1)$. Comme $d(C_1)$ est connexe, le fait 1.2.6 dit que $[d(C_1), x^j]$ est un sous-groupe connexe du groupe fini $ad_j(C_1)$. On en déduit que $d(C_1)$ centralise x^j. Comme $\langle x \rangle d(x^j)/d(x^j)$ est fini, $d(x^j) = d(x)^\circ$. On a montré que $d(C_1)$ centralise $d(x)^\circ$.

On obtient $[C_1, d(x)] = [C_1, \langle x \rangle] = \langle ad_i(C_1) : i \in \{-j+1, ..., 0, ..., j-1\} \rangle$, ce qui prouve que $[C_1, d(x)]$ est fini. Le fait 1.2.11 donne $[d(C_1), d(x)] = [C_1, d(x)]$. Or on a $d(C_1) = d(C_0)^\circ$ et le fait 1.2.6 dit que $[d(C_1), d(x)]$ est connexe. On en déduit que $d(C_1)$ centralise $d(x)$. On obtient $[d(C_0), x] = [\langle C_0 \rangle, x] \leq K$ et $d(C_0)$ est contenu dans C. On a montré que C est localement clos. □

Corollaire 3.1.34. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H/K une section localement close de G. Alors, pour tout ordinal α, $Z_\alpha(H/K)$ est une section localement close de G. En particulier, l'hypercentre de H/K est une section localement close de G.*

Preuve. – Supposons le corollaire faux. Alors il existe un plus petit ordinal β tel que $Z_\beta/K = Z_\beta(H/K)$ ne soit pas une section localement close de G. Comme une réunion croissante de sections localement closes est localement close, β ne peut pas être un ordinal limite. Soient ν l'ordinal tel que $\beta = \nu + 1$ et $Z_\nu/K = Z_\nu(H/K)$. Alors on a $Z_\beta/Z_\nu = Z(H/Z_\nu) = C_{H/Z_\nu}(H/Z_\nu)$. Comme Z_ν est localement clos par minimalité de β, la proposition 3.1.33 dit que Z_β est localement clos, ce qui est contradictoire. $\square$

3.2 Sous-groupes de Hall

Nous donnons un analogue au théorème de conjugaison des sous-groupes de Hall (fait 1.4.11) pour les sections localement closes des groupes de rang de Morley fini résolubles (théorème 3.2.5). On rapelle que $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des entiers premiers.

Fait 3.2.1. – **([11], Borovik, Nesin)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G normal et définissable. Si $x \in G$ est tel que sa classe modulo H soit un p-élément de G/H, alors le coset xH contient un p-élément.*

Le lemme suivant généralise le fait ci-dessus.

Lemme 3.2.2. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}$, G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G localement clos. Si $x \in N_G(H)$ est tel que sa classe modulo H soit un π-élément de $N_G(H)/H$, alors le coset xH contient un π-élément.*

Preuve. – Comme H/H^- est localement fini (corollaire 3.1.8) et comme la classe de x modulo H est d'ordre fini, $\langle x\rangle H^-/H^-$ est fini. Alors $\langle x\rangle H^-$ est définissable et $d(x) \leq \langle x\rangle H^-$. Mais, d'après le fait 1.4.4, on a $d(x) = D \times \langle u\rangle$ pour un groupe divisible D et un élément de torsion u. En particulier on a $D = d(x)^\circ \leq H^-$, d'où $\langle x\rangle H^- = \langle u\rangle H^-$ et $\langle x\rangle H = \langle u\rangle H$. Mais, u étant de torsion, on a $\langle u\rangle = \langle u_1\rangle \times \langle u_2\rangle$ pour un π-élément u_1 et un π'-élément u_2. Comme l'ordre de $\langle x\rangle H/H$ est un π-nombre, on obtient $\langle x\rangle H = \langle u\rangle H = \langle u_1\rangle H$. Ainsi, xH contient un élément v de $\langle u_1\rangle$, et v est un π-élément. $\square$

La preuve du lemme suivant est très proche de celle d'un corollaire de la première section de [4].

Lemme 3.2.3. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini, $\pi \subseteq \mathcal{P}$ et K un sous-groupe de G localement clos. On suppose que K a un π-sous-groupe de Hall central R. Alors $C_{K/R}(XR/R) = C_K(X)R/R$ pour tout sous-ensemble X de $N_G(R)$.*

Preuve. – Il suffit de montrer que $C_K(X)R/R$ contient $C_{K/R}(XR/R)$. Soient X un sous-ensemble de $N_G(R)$, $x \in X$ et $\overline{x}$ sa classe modulo R. Soit $u \in K$ tel que $\overline{u}$ centralise XR/R. Alors on a $[x, u] \in R$. Donc il existe un π-nombre n_x tel que $[x, u]^{n_x} = 1$. R étant central dans K, on a $[x, u^{n_x}] = 1$ et $u^{n_x} \in C_K(x)$. Mais il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_k$ des éléments de X tels que $C_K(X) = C_K(x_1, ..., x_k)$. Soit $m = n_{x_1}n_{x_2}...n_{x_k}$. Alors m est un π-nombre et $u^m \in C_K(X)$. En particulier, $d(u)/C_{d(u)}(X)$ est un π-groupe cyclique. Le lemme 3.2.2 donne l'existence d'un π-élément r de $d(u)$ tel que $d(u) = \langle r\rangle C_{d(u)}(X)$. Comme K est localement clos, $d(u)$ est contenu dans K et $R \cap d(u)$ est l'unique π-sous-groupe de Hall de $d(u)$. On en déduit $r \in R$ et $u \in RC_K(X)$, d'où $\overline{u} \in C_K(X)R/R$. $\square$

Lemme 3.2.4. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}$, G un groupe de rang de Morley fini et R un sous-groupe localement clos de G avec un sous-groupe abélien, normal, localement clos et π-divisible A tel que R/A soit un π-groupe localement fini. Alors les π-sous-groupes maximaux de R sont conjugués et, si S est l'un d'eux, $R/A = SA/A$.*

Preuve. – Soient B le π-sous-groupe de Hall de A et S_1 et S_2 deux π-sous-groupes maximaux de R. Alors B est normal dans R et B est contenu dans S_1 et S_2. Aussi, A/B est π-divisible. Par choix de B, A/B ne possède pas de π-élément non trivial et on a $S_1/B \cap A/B = S_2/B \cap A/B = 1$. D'après le lemme 3.2.3, A/B satisfait la condition de chaîne descendante sur les centralisateurs des sous-ensembles de R. Le fait 1.4.10 dit que S_1/B et S_2/B sont contenus dans des compléments Q_1/B et Q_2/B de A/B dans R/B, et Q_1/B et Q_2/B sont conjugués dans R/B. Mais Q_1/B et Q_2/B sont des π-groupes et, comme B est aussi un π-groupe, Q_1 et Q_2 sont des π-sous-groupes de R. Comme S_1 et S_2 sont des π-sous-groupes maximaux de R contenus dans Q_1 et Q_2 respectivement, on obtient $S_1 = Q_1$ et $S_2 = Q_2$. On en déduit le résultat. □

Le théorème 3.2.5 et le corollaire 3.2.6 généralisent les faits 1.4.11 et 1.4.12, et les preuves sont analogues.

Théorème 3.2.5. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}$, G un groupe de rang de Morley fini résoluble et H/K une section localement close de G. Alors les π-sous-groupes de Hall de H/K sont conjugués.*

Preuve. – La preuve se fait par induction sur le rang et le degré de G. On peut supposer $G = d(H)$. Quitte à quotienter G par K^-, on peut supposer $K^- = 1$. Supposons d'abord $K = 1$. Comme H/H^+ est localement fini d'après le corollaire 3.1.7 (i), le fait 1.6.3 permet de supposer $H^+ \neq 1$. Soit A un sous-groupe H-minimal contenu dans H^+. Soient S_1 et S_2 deux π-sous-groupes de Hall de H et R_1 et R_2 deux sous-groupes de H tels que R_1/A et R_2/A soient deux π-sous-groupes de Hall de H/A contenant S_1 et S_2 respectivement. Par hypothèse d'induction R_1/A et R_2/A sont conjugués. Donc on peut supposer $R_1 = R_2$. Si A est localement fini, alors R_1 l'est aussi et le fait 1.6.3 donne le résultat. Sinon, le fait 1.2.14 dit que A est divisible. Le lemme 3.2.4 donne la conjugaison de S_1 et S_2 dans R_1.

Maintenant, on suppose $K \neq 1$. Soient S_1/K et S_2/K deux π-sous-groupes de Hall de H/K. Comme $K^- = 1$, S_1 et S_2 sont localement fini et contenus dans des $\mathcal{P}$-sous-groupes de Hall R_1 et R_2 de H. Ce qui précède permet de supposer $R_1 = R_2$. Le fait 1.6.3 donne le résultat. □

Corollaire 3.2.6. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}$, G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G, N/K un sous-groupe normal de H/K et R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K. Alors :*

(i) $R/K \cap N/K$ est un π-sous-groupe de Hall de N/K ;

(ii) si N est localement clos, RN/N est un π-sous-groupe de Hall de H/N et tous les π-sous-groupes de Hall de H/N sont de cette forme.

Preuve. – (i) suit directement du théorème 3.2.5.

Pour prouver (ii) on peut supposer $K = 1$. On considère un π-sous-groupe de Hall S/N de H/N qui contient RN/N et on prouve, par induction sur le rang r de N^-, que $S/N = RN/N$. Si $r = 0$, alors S est localement fini et le fait 1.6.3 donne le résultat. Sinon N^- contient un sous-groupe H-minimal A. Par hypothèse d'induction, on peut supposer $N = A$. Le fait 1.6.3 permet de supposer A non localement fini. Alors le fait 1.2.14 dit que A est divisible. Le lemme 3.2.4 donne le résultat. □

3.3 Sous-groupes localement nilpotents

Nous cherchons des analogues aux faits 1.3.15 et 1.3.13 pour les sections localement closes (propositions 3.3.1 et 3.3.6).

Proposition 3.3.1. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H/K une section localement close de G et L/K un sous-groupe de H/K. Si L/K est nilpotent de classe c, alors $d_{loc}(L)/K$ est aussi nilpotent de classe c. Si L/K est localement nilpotent, $d_{loc}(L)/K$ est localement nilpotent.*

Preuve. – Quitte à quotienter H par K^-, on peut supposer $K^- = 1$. Supposons L/K nilpotent de classe c. Montrons que $d_{loc}(L)/K$ est aussi nilpotent de classe c. Soit U une partie finie de $d_{loc}(L)$. Le lemme 3.1.22 dit qu'il existe une partie finie X de L avec $U \subseteq d(X)$. Alors $\langle X\rangle K/K$ est nilpotent de classe au plus c. Comme $\langle X\rangle^c$ est contenu dans $d(X)^c$, le fait 1.2.7 donne $d(\langle X\rangle^c) \leq d(X)^c$. Aussi, le fait 1.2.11 donne $d(X)^c \leq d(\langle X\rangle^c)$. On en déduit $d(X)^c = d(\langle X\rangle^c)$. Soit Y l'ensemble des éléments de $\langle X\rangle$ de la forme $[x_0, ..., x_c]$ avec $x_0, ..., x_c$ des éléments de X. La remarque 1.3.8 dit que $\langle X\rangle^c$ est engendré par les conjugués des éléments de Y par des éléments de $\langle X\rangle$. Le fait 1.2.6 dit que $[d(X)^\circ, K]$ est un sous-groupe définissable et connexe de K. Comme $K^- = 1$, $d(X)^\circ$ centralise K et, comme Y est contenu dans K, on en déduit que $\langle X\rangle^c$ est finiment engendré. K étant localement fini (corollaire 3.1.8), $\langle X\rangle^c$ est fini et on obtient $d(X)^c = d(\langle X\rangle^c) = \langle X\rangle^c \leq K$. On a montré que $\langle U\rangle K/K$ est nilpotent de classe au plus c. La remarque 1.3.8 montre que $d_{loc}(L)/K$ est nilpotent de classe c.

Supposons L/K localement nilpotent. Montrons que $d_{loc}(L)/K$ est localement nilpotent. Soit U une partie finie de $d_{loc}(L)$. Le lemme 3.1.22 dit qu'il existe une partie finie X de L avec $U \subseteq d(X)$. Comme $\langle XK/K\rangle$ est nilpotent, ce qui précède montre que $d_{loc}(XK)/K$ est nilpotent. Donc $d(X)K/K$ et $\langle UK/K\rangle$ sont nilpotents. On en déduit que $d_{loc}(L)/K$ est localement nilpotent. $\square$

Corollaire 3.3.2. – *Si H/K est une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini, alors tout sous-groupe localement nilpotent maximal de H/K est une section localement close.*

Corollaire 3.3.3. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H/K une section localement close de G. Alors $HP(H/K)$ est une section localement close de G.*

Preuve. – Le fait 1.3.3 dit que $HP(H/K)$ est localement nilpotent, et la proposition 3.3.1 permet de conclure. $\square$

Lemme 3.3.4. – *Si G est un groupe de rang de Morley fini nilpotent-par-fini avec $G = d(X)$ pour un sous-ensemble fini X de G, alors G° est divisible.*

Preuve. – D'après le fait 1.3.13, $G^\circ = D * C$ pour deux sous-groupes définissables et caractéristiques D et C de G° avec D divisible et C d'exposant borné. Donc G/D est localement fini et $\langle XD/D\rangle$ est fini. Comme on a $G/D = d(X)/D = d(\langle XD/D\rangle)$, G/D est fini et $G^\circ = D$. $\square$

Corollaire 3.3.5. – *Soit H un sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini. Si H^+ est nilpotent, alors H^+ est divisible.*

Preuve. – Le lemme 3.1.5 ($i\nu$) dit qu'il existe une partie finie X de H telle que $H^+ = d(X)$. Comme H^+ est connexe, le lemme 3.3.4 donne la divisibilité de H^+. $\square$

La proposition 3.3.6 est analogue au fait 1.3.13.

Proposition 3.3.6. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H/K une section localement close et localement nilpotente de G. Alors $H/K^- = H^+K^-/K^- * R/K^-$ où R/K est le sous-groupe de torsion maximal de H/K. De plus, H^+K^-/K^- est nilpotent et divisible et $H^+K^-/K^- = H^\pm K^-/K^-$.*

Preuve. – Quitte à quotienter H par K^-, on peut supposer $K^- = 1$. Donc K et R sont localement finis. Comme $H/H^\pm$ est localement fini d'après le corollaire 3.1.5 (νi), $H/H^\pm R$ est aussi localement fini. Mais R contient toute la torsion de H. Donc le lemme 3.2.2 dit que $H/H^\pm R$ ne possède pas d'élément de torsion. On en déduit $H = H^\pm R$. Comme $K^- = 1$, le fait 1.2.6 dit que $H^\pm$ centralise K. Mais $H^\pm K/K$ est localement nilpotent, donc $H^\pm$ aussi et on en déduit que $H^{\pm}$ est nilpotent par le corollaire 2.4.5. Le corollaire 3.1.7 (ii) et le lemme 3.1.5 (ii) donnent $(H^{\pm})^+ = (H^{\pm})^{\pm} = H^{\pm}$. Comme on a $(H^{\pm})^+ \leq H^+ \leq H^{\pm}$, on obtient $H^+ = H^{\pm}$. Le corollaire 3.3.5 dit que H^+ est divisible.

Il faut alors montrer que H^+ centralise R. D'après le lemme 3.1.5 ($i\nu$), il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $h_1, ..., h_m$ des éléments de H^+ tels que $H^+ = d(h_1, ..., h_m)$. Soient $r \in R$ et $i \in \{1, ..., m\}$. Alors on a $[r, h_i] \in R \cap H^+$ et il existe $l_{r,i} \in \mathbb{N}^*$ tel que $[r, h_i]^{l_{r,i}} = 1$. Comme H^+ est nilpotent et divisible, le fait 1.3.13 dit que H^+ centralise sa torsion et, R étant localement fini, on a $R \cap H^+ \leq Z(H^+)$. Donc $[r, h_i]$ est central dans H^+ et on a $[r, h_i^{l_{r,i}}] = [r, h_i]^{l_{r,i}} = 1$. Ainsi $h_i^{l_{r,i}}$ centralise r. On en déduit que $D_0 = d(h_i^{l_{r,i}} : i = 1, ..., m)$ centralise r. Considérons $D_1 = D_0[D_0, H^+]$ la clôture normale de D_0 dans H^+ (fait 3.1.28). Alors D_1 est définissable d'après le fait 1.2.6, et H^+/D_1 est nilpotent et divisible. Le fait 1.3.13 dit que H^+/D_1 centralise ses éléments de torsion. On en déduit que $\langle h_i : i = 1, ..., m\rangle D_1/D_1$ est un sous-groupe central de H^+/D_1. Mais $\langle h_i : i = 1, ..., m\rangle D_1/D_1$ est un sous-groupe de H^+/D_1 engendré par un nombre fini d'éléments de torsion de H^+/D_1. Donc $\langle h_i : i = 1, ..., m\rangle D_1/D_1$ est fini. Ceci prouve que $\langle h_i : i = 1, ..., m\rangle D_1$ est définissable et $d(h_i : i = 1, ..., m)$ est contenu dans $\langle h_i : i = 1, ..., m\rangle D_1$. Comme $H^+ = d(h_i : i = 1, ..., m)$, on obtient $H^+ = \langle h_i : i = 1, ..., m\rangle D_1$ et, par connexité de H^+, $H^+ = D_1$. Comme D_1 est la clôture normale de D_0 dans H^+ et comme H^+ est nilpotent, on en déduit $H^+ = D_0$ et H^+ centralise r. Ceci étant vrai pour tout $r \in R$, H^+ centralise R. □

3.4 Sous-groupes localement résolubles

Il est montré dans [4] qu'un groupe ω-stable localement résoluble est résoluble. Il est aussi connu qu'un $\mathcal{M}_c$-groupe localement fini et localement résoluble est résoluble (fait 3.4.1). Dans cette section on montre un analogue de ces résultats pour les sections localement closes des groupes de rang de Morley fini (corollaire 3.4.12). En particulier, le corollaire 3.4.12 généralise un résultat de Wehrfritz qui dit qu'un quotient localement résoluble d'un groupe linéaire et localement fini est résoluble ([84], H 5).

Fait 3.4.1. – **([16], Bryant, Hartley)** *Un $\mathcal{M}_c$-groupe localement fini et localement résoluble est résoluble.*

Lemme 3.4.2. – *Soient G un groupe et X un ensemble de générateurs de G. Si X est de cardinalité infinie $\aleph$, alors on a $Card\, G = \aleph$.*

Preuve. – Soient $Y_0 = X \cup X^{-1}$ et $Y_{i+1} = \{zy : z \in Y_i, y \in Y_0\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors on a $Card\, Y_i = \aleph$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Or G est la réunion des Y_i pour $i \in \mathbb{N}$, d'où le résultat. □

Lemme 3.4.3. – *L'ensemble des sous-groupes résolubles d'un groupe de rang de Morley fini est inductif.*

Preuve. – Supposons qu'il existe un contrexemple G de rang et degré minimal. Soient $\aleph$ un cardinal et $(H_\alpha)_{\alpha<\aleph}$ une suite croissante de sous-groupes résolubles de G tel qu'aucun sous-groupe résoluble de G ne contienne tous les H_α pour $\alpha < \aleph$. Pour tout $\alpha < \aleph$ on note $K_\alpha = d(H_\alpha)$. On note K la réunion des K_α pour $\alpha < \aleph$. Alors K n'est pas résoluble. Par finitude du rang de G il existe $\beta < \aleph$ tel que K_β° contienne K_α° pour tout $\alpha < \aleph$. On en déduit que K normalise K_β°. Or, par minimalité de G, on a $G = d(K)$. Donc G normalise K_β°. Comme K_β est résoluble d'après le fait 1.3.15, la suite $(H_\alpha K_\beta^\circ / K_\beta^\circ)_{\alpha<\aleph}$ est une suite croissante de sous-groupes résolubles de G/K_β° dont la réunion n'est pas résoluble. Par minimalité du rang de G on a donc $K_\beta^\circ = 1$ et H_α est fini pour tout $\alpha < \aleph$. En particulier $K_\alpha = H_\alpha$ pour tout $\alpha < \aleph$ et K est un $\mathcal{M}_c$-groupe de torsion localement résoluble. Alors, d'après le fait 3.4.1, K est résoluble, ce qui est contradictoire. □

Corollaire 3.4.4. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe localement résoluble de G. Alors H est résoluble.*

Preuve. – On fait la preuve par induction sur $Card\, H = \aleph$. On peut supposer $\aleph$ infini. Soient $(h_\alpha)_{\alpha<\aleph}$ les éléments de H. Soit $\beta < \aleph$ un ordinal. Par hypothèse d'induction et le lemme 3.4.2, $\langle h_\alpha : \alpha \leq \beta \rangle$ est résoluble. Or on a $H = \bigcup_{\beta<\aleph} \langle h_\alpha : \alpha \leq \beta \rangle$. Donc H est résoluble d'après le lemme 3.4.3. □

Définition 3.4.5. – *Soient G un groupe et $\mathcal{P}_0 = (p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des entiers premiers muni de l'ordre naturel. On construit une suite croissante $\mathcal{R} = (R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes de G de la façon suivante :*

R_0 est un p_0-sous-groupe de Sylow de G et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, R_{i+1}/R_i est un p_{i+1}-sous-groupe de Sylow de $N_G(R_i)/R_i$.

$\cup_{i\in\mathbb{N}} R_i$ *est appellé le* $\widehat{\mathcal{P}}$-sous-groupe de G associé à $\mathcal{R}$.

Remarque 3.4.6. – Les $\widehat{\mathcal{P}}$-sous-groupes d'un groupe localement fini sont autonormalisants.

Remarque 3.4.7. – Soient G un groupe localement fini et $\mathcal{R} = (R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-groupes de G comme dans la définition 3.4.5. Alors la suite $(N_G(R_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\cap_{i\in\mathbb{N}} N_G(R_i) = \cup_{i\in\mathbb{N}} R_i$.

Le fait suivant est un théorème fondamental sur les $\mathcal{M}_c$-groupes, et il sera utilisé pour prouver le lemme 3.4.9.

Fait 3.4.8. – **([15], Bryant)** *Si G est un $\mathcal{M}_c$-groupe localement fini, alors les p-sous-groupes de Sylow de G sont conjugués pour tout $p \in \mathcal{P}$.*

Lemme 3.4.9. – *Soient G un $\mathcal{M}_c$-groupe localement fini, R et R^* deux $\widehat{\mathcal{P}}$-sous-groupes de G et $\mathcal{R} = (R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\mathcal{R}^* = (R_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes de sous-groupes de G telles que R et R^* soient les $\widehat{\mathcal{P}}$-sous-groupes de G associés à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ respectivement. Alors R et R^* sont résolubles et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, R_i et R_i^* sont conjugués.*

Preuve. – Montrons, par induction sur i, que R_i et R_i^* sont résolubles et conjugués pour tout $i \in \mathbb{N}$. Si $i = 0$, alors le fait 3.4.1 dit que R_0 et R_0^* sont résolubles et le fait 3.4.8 donne la conjugaison de R_0 et R_0^*. Supposons le résultat vrai pour $i \in \mathbb{N}$. Alors on peut supposer $R_i = R_i^*$ et R_i normal dans G. R_i est résoluble par hypothèse d'induction et, comme R_{i+1}/R_i et R_{i+1}^*/R_i sont des p_{i+1}-groupes, R_{i+1}/R_i et R_{i+1}^*/R_i sont localement nilpotents. On en déduit que R_{i+1} et R_{i+1}^* sont localement résolubles. Alors le fait 3.4.1 dit que R_{i+1} et R_{i+1}^* sont résolubles. Donc le fait 1.6.3 montre qu'il existe deux p_{i+1}-sous-groupes de Sylow S et S^* de G tels que $R_{i+1}/R_i = SR_i/R_i$ et $R_{i+1}^*/R_i = S^*R_i/R_i$. Le fait 3.4.8 donne la conjugaison de S et S^* dans G, ce qui prouve que R_{i+1} et R_{i+1} sont conjugués.

Il reste à montrer que R et R^* sont résolubles. Mais $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ sont deux suites croissantes de sous-groupes résolubles. Donc R et R^* sont localement résolubles et le fait 3.4.1 dit que R et R^* sont résolubles. □

Proposition 3.4.10. – *Soit H un sous-groupe localement fini d'un groupe de rang de Morley fini G. Alors les $\widehat{\mathcal{P}}$-sous-groupes de H sont conjugués dans H.*

Preuve. – Soit H un sous-groupe localement fini de G avec deux $\widehat{\mathcal{P}}$-sous-groupes R et R^*. Soient $\mathcal{R} = (R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\mathcal{R}^* = (R_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ deux suites de sous-groupes de H telles que R et R^* soient les $\widehat{\mathcal{P}}$-sous-groupes de H associés à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ respectivement. On note $N_0 = N_0^* = H$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $N_{i+1} = N_H(R_i)$ et $N_{i+1}^* = N_H(R_i^*)$. Les suites $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(N_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes d'après le remarque 3.4.7, et on a $R = \cap_{i\in\mathbb{N}} N_i$ et $R^* = \cap_{i\in\mathbb{N}} N_i^*$. R et R^* étant résolubles (lemme 3.4.9), $d(R)$ et $d(R^*)$ sont des groupes de rang de Morley fini résolubles d'après le fait 1.3.15. Alors $(R^\circ)'$ et $(R^{*\circ})'$ sont d'exposant bornés d'après la proposition

2.7.9. On en déduit qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que R/R_m et R^*/R_m^* soient abéliens. Le lemme 3.4.9 permet de supposer $R_m = R_m^*$. On peut donc aussi supposer $H = N_H(R_i)$.

Pour tout entier j, on note $\pi_j = \{p_{m+1}, ..., p_{m+j}\}$. On considère deux suites croissantes $\mathcal{S} = (S_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ et $\mathcal{S}^* = (S_j^*)_{j \in \mathbb{N}^*}$ où, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, S_j (resp. S_j^*) est un π_j-sous-groupe de Hall de R (resp. R^*). On note $S = \cup_{j \in \mathbb{N}^*} S_j$, $S^* = \cup_{j \in \mathbb{N}^*} S_j^*$. Par le fait 1.6.3 on obtient $R = R_m \rtimes S$ et $R^* = R_m \rtimes S^*$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $R_{m+j} = R_m \rtimes S_j$ et $R_{m+j}^* = R_m \rtimes S_j^*$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $C_G(S) = C_G(S_n)$ et $C_G(S^*) = C_G(S_n^*)$. Comme R_{m+n} et R_{m+n}^* sont conjugués dans H d'après le lemme 3.4.9, on peut supposer $R_{m+n} = R_{m+n}^*$. Par le fait 1.6.3, on peut aussi supposer $S_n = S_n^*$.

Comme R/R_m et R^*/R_m sont abéliens, S et S^* sont abéliens. En particulier S et S^* centralisent S_j et, comme $C_G(S) = C_G(S_j) = C_G(S^*)$, S et S^* se centralisent. Comme on a $R = R_m \rtimes S$ et $R^* = R_m \rtimes S^*$, R et R^* se normalisent. R et R^* étant autonormalisants, on obtient $R = R^*$. □

Corollaire 3.4.11. – *Si G est un groupe de rang de Morley fini et L/K une section de G avec K localement fini, alors il existe un sous-groupe U de L qui couvre L/K et tel que $U \cap K$ soit localement nilpotent.*

Preuve. – Soit R un $\widehat{\mathcal{P}}$-sous-groupe de K. Alors R est autonormalisant dans K d'après la remarque 3.4.6 et R est résoluble (lemme 3.4.9). L'argument de Frattini et la proposition 3.4.10 prouvent que $L = KN_L(R)$. Soit C un sous-groupe de Carter de R (C existe d'après le fait 1.6.4). L'argument de Frattini et le fait 1.6.4 montrent que $N_L(R) = RN_{N_L(R)}(C)$ et $L = KN_{N_L(R)}(C)$. Comme $N_K(R) = R$, on a $N_{N_L(R)}(C) \cap K = N_{N_K(R)}(C) = C$ et on peut choisir $U = N_{N_L(R)}(C)$. □

Le corollaire 3.4.12 est fondamental pour toute la suite. En effet, nous énoncerons généralement les résultats pour les sections localement closes des groupes de rang de Morley fini *résolubles*. Le corollaire 3.4.12 nous dit que ces résultats peuvent tout aussi bien s'énoncer pour les sections localement closes et *localement résolubles* des groupes de rang de Morley fini.

Corollaire 3.4.12. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H/K une section localement close de G et L/K un sous-groupe localement résoluble de H/K. Alors il existe un sous-groupe définissable et résoluble V/K^- de $d(H)/K^-$ tel que V couvre L/K. En particulier $d_{loc}(L)/K$ est résoluble.*

Preuve. – On peut supposer $K^- = 1$, en particulier K est localement fini. D'après le corollaire 3.4.11, il existe un sous-groupe U de L qui couvre L/K et tel que $U \cap K$ soit localement nilpotent. $U \cap K$ est résoluble d'après le fait 3.4.1. Donc U est localement résoluble, et même résoluble (corollaire 3.4.4). Comme $d(U)$ est résoluble d'après le fait 1.3.15, on a le résultat. □

Le corollaire 3.4.12 permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 3.4.13. – *Si H/K est une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(H/K)^{(k)} = (H/K)^{(k+1)}$.*

Preuve. – D'après le corollaire 3.1.26, $H_\omega/K = (H/K)^{(\omega)}$ est une section localement close de H. Donc, quitte à considérer H/H_ω au lieu de H/K, on peut supposer $(H/K)^{(\omega)} = 1$. Montrons que H/K est résoluble. Par le corollaire 3.4.12, il suffit de montrer que H/K est localement résoluble. Soit U une partie finie de H. Par le fait 1.2.7 et par condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $d(U)^{(i)} = d(U)^{(i+1)}$. Comme H contient $d(U)$ puisque U est fini et comme $(H/K)^{(\omega)} = 1$, on en déduit $d(U)^{(i)}K/K = 1$ et $(\langle U \rangle K/K)^{(i)} = 1$. Ceci prouve que H/K est résoluble. □

D'un autre coté, le corollaire 3.4.12 nous permet d'obtenir un résultat concernant le *radical résoluble* :

Définition 3.4.14. – *Pour tout groupe G, on appelle* radical résoluble *de G le sous-groupe $\sigma(G)$ engendré par les sous-groupes normaux et résolubles de G.*

En général, pour un groupe G, $\sigma(G)$ n'est pas résoluble (cf. groupe de McLain, [52]). Par contre, le lemme suivant montre que le radical résoluble est toujours localement résoluble :

Lemme 3.4.15. – *Le radical résoluble d'un groupe quelconque G est localement résoluble.*

Preuve. – Soient X un sous-ensemble fini de $\sigma(G)$ et $(H_i)_{i\in I}$ (I étant un ensemble) la famille des sous-groupe normaux et résolubles de G. Alors il existe un sous-ensemble fini I_0 de I tel que X soit contenu dans $\langle H_i : i \in I_0\rangle$. Comme le produit de deux groupes résolubles qui se normalisent est résoluble et comme I_0 est fini, $\langle H_i : i \in I_0\rangle$ est résoluble. On en déduit la résolubilité de $\langle X\rangle$. □

En ce qui concerne les groupes de rang de Morley fini, O. V. Belegradek a obtenu le résultat suivant :

Fait 3.4.16. – **([9], Belegradek)** *Si G est un groupe de rang de Morley fini, $\sigma(G)$ est définissable et résoluble.*

Nous montrons un analogue de ce résultat pour les sections localement closes :

Proposition 3.4.17. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et L/K un sous-groupe d'une section localement close de G. Alors $\sigma(L/K)$ est résoluble. De plus, si L est localement clos, $\sigma(L/K)$ est une section localement close.*

Preuve. – On note $U/K = \sigma(L/K)$. D'après le lemme 3.4.15, U/K est un groupe localement résoluble. Donc le corollaire 3.4.12 dit que $d_{loc}(U)/K$ est résoluble, ce qui prouve la proposition. □

La proposition suivante est analogue au fait 1.5.1.

Proposition 3.4.18. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et L/K un sous-groupe d'une section localement close de G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *L/K est localement nilpotent;*
(ii) *L/K est hypercentral;*
(iii) *L/K vérifie la condition de normalisateur.*
De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, L/K est nilpotent-par-fini.

Preuve. – On peut supposer $K^- = 1$. Le fait 1.5.2 dit que (ii) implique (iii) et le fait 1.5.3 dit que (iii) implique (i). Supposons (i). On va montrer que $d_{loc}(L)/K$ est hypercentral et nilpotent-par-fini. La proposition 3.3.1 dit que $d_{loc}(L)/K$ est localement nilpotent. Donc on peut supposer L localement clos. Aussi, le corollaire 3.4.12 permet de supposer G résoluble. Soit R/K le sous-groupe de torsion maximal de L/K. Alors le fait 1.6.4 dit que R a un sous-groupe de Carter C et que $R = CK$. Par la proposition 3.3.6, on a $L = L^+ * (CK)$ et L^+ est nilpotent. Le fait 1.5.1 dit que C est nilpotent-par-fini et hypercentral, ce qui prouve que $L/K = L^+K/K * CK/K$ est nilpotent-par-fini et hypercentral. □

Corollaire 3.4.19. – *Si H/K est une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini, alors tout sous-groupe de Carter C/K de H/K est un sous-groupe localement nilpotent maximal de H/K. En particulier, C/K est une section localement close.*

Preuve. – Soit L/K un sous-groupe localement nilpotent maximal de H/K contenant C/K. La proposition 3.4.18 dit que L/K vérifie la condition de normalisateur. Comme C/K est autonormalisant dans H/K, on obtient $C/K = L/K$. Alors le corollaire 3.3.2 dit que C/K est une section localement close. □

Corollaire 3.4.20. – *Soit L/K un sous-groupe d'une section localement close H/K. Alors $F(L/K)$ est un sous-groupe nilpotent et d'indice fini de $HP(L/K)$. De plus, si L/K est une section localement close, alors $F(L/K)$ est une section localement close.*

Preuve. – La proposition 3.4.18 montre que $HP(L/K)$ est nilpotent-par-fini. Alors, comme le produit de deux sous-groupes nilpotents qui se normalisent est nilpotent, $F(HP(L/K))$ est un sous-groupe nilpotent et d'indice fini de $HP(L/K)$. On en déduit $F(HP(L/K)) = F(L/K)$ et $F(L/K)$ est un sous-groupe nilpotent et d'indice fini de $HP(L/K)$.

Si L est localement clos, on note $F/K = F(L/K)$. La proposition 3.3.1 dit que $d_{loc}(F)/K$ est nilpotent. On en déduit que F est localement clos. □

3.5 Sections minimales

Nous allons montrer l'existence de sections localement closes minimales normales dans les sections localement closes (proposition 3.5.7). Ces sections, appelées *sections d_{loc}-minimales*, sont analogues aux sous-groupes G-minimaux pour les groupes G de rang de Morley fini.

Lemme 3.5.1. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H un sous-groupe localement clos et connexe de G, A un sous-groupe H-minimal de G et U/V une H-section non triviale et localement close de A. Alors $C_H(U/V) = C_H(A)$.*

Preuve. – On peut supposer $G = d(H)A$, en particulier G est connexe. Alors, comme A est H-minimal, A est aussi G-minimal. Si A est centralisé par H, il n'y a rien à faire. Donc on peut supposer A non centralisé par H. Supposons que A contienne un p-tore T (pour un entier premier p). On peut supposer T maximal dans A, donc T est normal dans G et $T \leq Z(G)$ d'après le fait 1.4.6. Ainsi, $Z(G) \cap A$ est infini et A central dans G par G-minimalité de A, ce qui est contradictoire. On en déduit que, si A est divisible, A est sans torsion, donc $A = U$ et $V = 1$. On a alors le résultat et, d'après le fait 1.2.14, on peut supposer que A est un p-sous-groupe élémentairement abélien pour un entier premier p.

Montrons qu'on peut supposer que H^- centralise A. $[H^-, V]$ et $[H^-, U]$ sont définissables et connexes d'après le fait 1.2.6, donc $[H^-, V] = 1$ par H-minimalité de A. Alors, si H^- ne centralise pas A, le fait 1.3.17 dit que V est trivial et qu'on a $[H^-, U] \neq 1$. Ainsi on a $[H^-, U] = A$ par H-minimalité de A. On en déduit $U = A$ et il n'y a rien à faire. On peut alors supposer que H^- centralise A.

Soit $K = U \rtimes H/C_H(U)$ où $H/C_H(U)$ agit sur U par conjugaison. A étant G-minimal, $G/C_G(A)$ est isomorphe à un sous-groupe du groupe multiplicatif d'un corps algébriquement clos L de caractéristique p d'après les faits 1.3.16 (*ii*) et 1.3.19, et $A \cong L_+$. En particulier $G/C_G(A)$ n'a pas d'éléments d'ordre p. Mais $C_G(U) = C_G(A)$ d'après le fait 1.3.17, donc $H/C_H(U) \cong HC_G(A)/C_G(A)$ est sans p-élément. Aussi H^- centralise A et K est localement fini. Soient $c \in U \setminus V$, x un élément de $C_H(U/V)$, $\overline{x}$ sa classe modulo $C_H(U)$ et R le sous-groupe de K engendré par $\overline{x}$ et c. Alors R est fini et $R/(R \cap U)$ est sans p-élément. Comme $R \cap U$ est abélien, on obtient $R \cap U = [R \cap U, R] \times C_{R\cap U}(R)$ d'après le fait 1.4.3. Comme R centralise U/V, $[R \cap U, R]$ est contenu dans V. Comme $c \notin V$, il existe $u \in C_{R\cap U}(R)$ distinct de 1. En particulier u est un élément non trivial de A centralisé par x et le fait 1.3.17 dit qu'alors x centralise A. On en déduit le résultat. □

Définition 3.5.2. – *Pour tout groupe G on appelle* sous-groupe minimal normal *de G tout sous-groupe normal $H \neq 1$ de G qui ne contient pas proprement de sous-groupe normal non trivial de G.*

Lemme 3.5.3. – *Soient G un groupe, H un sous-groupe normal et d'indice fini de G et U un sous-groupe normal de G contenu dans H. Si H a un sous-groupe minimal normal dans U, alors G a un sous-groupe minimal normal dans U.*

Preuve. – Comme G/H est fini alors, pour tout sous-groupe normal W de H dans U, il existe un plus petit entier $n(W)$ tel qu'il existe un sous-ensemble $\mu(W)$ de G de cardinal $n(W)$ avec $\langle W^G \rangle = \langle W^{\mu(W)} \rangle$. Il existe un plus petit entier n tel qu'il existe un sous-groupe minimal normal W de H dans U avec $n = n(W)$.

Montrons que $\langle W^G \rangle$ est un sous-groupe minimal normal de G. On peut supposer $U = \langle W^G \rangle$ et $n \geq 2$. Soient $g_1, ..., g_n$ les éléments de $\mu(W)$. Soient $i \in \{1, ..., n\}$ et μ_0 un sous-ensemble de $\mu(W)$ ne contenant pas g_i. Alors $W^{g_i} \cap \langle W^{\mu_0} \rangle$ est un sous-groupe normal de H et est strictement contenu dans W^{g_i} (par définition de $n(W)$). Donc $W^{g_i} \cap \langle W^{\mu_0} \rangle = 1$ puisque W est minimal normal dans H. On en déduit que $U = W^{g_1} \times W^{g_2} \times ... \times W^{g_n}$.

Supposons que U ne soit pas un sous-groupe minimal normal de G. Alors il existe un sous-groupe propre X de U qui est normal dans G. Il existe un plus petit entier $k \in \{1, ..., n\}$ tel qu'on ait $Y = X \cap W^{g_1} W^{g_2} ... W^{g_k} \neq 1$. Si $k = 1$, alors on a $X \cap W^{g_1} \neq 1$, et $W^{g_1} \leq X$ par minimalité de W dans H. Ainsi $U = \langle W^G \rangle$ est contenu dans X, ce qui est contradictoire, d'où $k \neq 1$. Notons $W_{k-1} = W^{g_1} W^{g_2} ... W^{g_{k-1}}$. Alors $W^{g_k} W_{k-1}/W_{k-1} (\neq 1)$ est un sous-groupe minimal normal de H/W_{k-1}. Par minimalité de k, on a $Y \cap W_{k-1} = 1$. Donc $Y W_{k-1}/W_{k-1}$ est un sous-groupe normal et non trivial de H/W_{k-1}, et $Y W_{k-1}/W_{k-1} = W^{g_k} W_{k-1}/W_{k-1}$ est minimal normal dans H/W_{k-1}. On en déduit que Y est un sous-groupe minimal normal de H.

Pour tout $i = k-1, ..., n-1$, on note $W_{i+1} = W_i W^{g_{i+1}}$. Montrons qu'il suffit d'un nombre $l_{k-1} \leq n - k + 1$ de conjugués de Y dans G pour couvrir $\langle Y^G \rangle W_{k-1}/W_{k-1}$. Soit $i \in \{k, ..., n\}$. Supposons que $\langle Y^G \rangle W_i/W_i$ soit couvert par un nombre $l_i \leq n - i$ de conjugués de Y dans G. Soient $Y_1, ..., Y_{l_i}$ des conjugués de Y dans G tels que $Y_1 ... Y_{l_i}$ couvre $\langle Y^G \rangle W_i/W_i$. Si $Y_1 ... Y_{l_i}$ couvre $\langle Y^G \rangle W_{i-1}/W_{i-1}$, alors on peut prendre $l_{i-1} = l_i \leq n - i + 1$. Sinon, il existe un conjugué Y_{l_i+1} de Y avec $Y_1 ... Y_{l_i} W_{i-1}/W_{i-1} < Y_1 ... Y_{l_i} Y_{l_i+1} W_{i-1}/W_{i-1}$. Comme $\langle Y^G \rangle W_i = Y_1 ... Y_{l_i} W_i$, on a

$$Y_1 ... Y_{l_i} Y_{l_i+1} W_{i-1} = Y_1 ... Y_{l_i} Y_{l_i+1} W_{i-1} \cap Y_1 ... Y_{l_i} W_i = Y_1 ... Y_{l_i} (Y_1 ... Y_{l_i} Y_{l_i+1} \cap W_i) W_{i-1}$$

En particulier $Y_1 ... Y_{l_i} Y_{l_i+1}$ n'évite pas W_i/W_{i-1}. Comme W_i/W_{i-1} est minimal normal dans H/W_{i-1}, $Y_1 ... Y_{l_i} Y_{l_i+1}$ couvre W_i/W_{i-1}. Mais on a $\langle Y^G \rangle W_i = Y_1 ... Y_{l_i} W_i$, d'où $\langle Y^G \rangle W_{i-1} = Y_1 ... Y_{l_i} (\langle Y^G \rangle \cap W_i) W_{i-1}$. Comme $Y_1 ... Y_{l_i} Y_{l_i+1}$ couvre W_i/W_{i-1}, on en déduit que $Y_1 ... Y_{l_i} Y_{l_i+1}$ couvre $\langle Y^G \rangle W_{i-1}/W_{i-1}$. Ainsi, on peut choisir $l_{i-1} = l_i + 1 \leq n - i + 1$. Ceci prouve qu'on peut prendre $l_{k-1} \leq n - k + 1$.

Comme $\langle Y^G \rangle \cap W_{k-1}$ est contenu dans $X \cap W_{k-1} = 1$, ce qui précède montre qu'il suffit de $l_{k-1} \leq n - k + 1$ conjugués de Y dans G pour couvrir $\langle Y^G \rangle$. Ceci prouve $n(Y) \leq l_{k-1} \leq n - k + 1$, ce qui contredit la minimalité de $n = n(W)$ puisque $k > 1$. □

Remarque 3.5.4. – La réciproque du lemme 3.5.3 est vraie. En effet, la preuve d'un théorème de J. S. Wilson [85] concernant les groupes satisfaisant la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes normaux s'applique à ce cas.

Définition 3.5.5. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H/K une section localement close de G. Une H-section A/B non triviale et localement close de G est dite* H/K-d_{loc}-minimale *si B contient K et si, pour toute H-section localement close C/B de A, $A = C$ ou $B = C$.*

Remarque 3.5.6. – Les sections *H/K-d_{loc}-minimales* ne sont pas nécessairement infinies, contrairement aux sections H-minimales.

Si V est un sous-groupe normal et localement clos de H et si U/V est une H-section localement finie de G, alors U/V est une section H/K-d_{loc}-minimale si et seulement si U/V est minimale normale dans H/V.

Proposition 3.5.7. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G et U/V une H-section non triviale et localement close de H avec $K \leq V$. Alors U/V contient une section H/K-d_{loc}-minimale.*

Preuve. – Supposons que toute H-section non triviale et localement close de H contienne une section H-d_{loc}-minimale. Alors U/V contient une section H-d_{loc}-minimale W/V. Comme V contient K, W/V est H/K-d_{loc}-minimale et on a le résultat. Donc il suffit de montrer que toute H-section non triviale et localement close de H contient une section H-d_{loc}-minimale.

On suppose que G est un contrexemple de rang et degré minimal. Soit H un sous-groupe localement clos de G avec $V < U$ deux sous-groupes normaux et localement clos de H tels que U/V ne contienne pas de sections H-d_{loc}-minimale. Alors G est infini et $G = d(H)$. Soit A un sous-groupe H-minimal. Si $U \cap A = V \cap A$, alors on a $UA \neq VA$ et, par minimalité de G, $(UA/A)/(VA/A)$ contient une section $(W/A)/(VA/A)$ qui est HA/A-d_{loc}-minimale. Donc W/VA est H-d_{loc}-minimale. Mais $1 \neq W/VA \cong (W \cap U)/V$ est H-d_{loc}-minimale, ce qui contredit le choix de U/V. On en déduit que $(U \cap A)/(V \cap A)$ n'est pas trivial. Si $(U \cap A)/(V \cap A)$ contenait une section H-d_{loc}-minimale $W/(V \cap A)$, alors WV/V serait une section H-d_{loc}-minimale de U/V, ce qui serait contradictoire. Donc on peut supposer U contenu dans A.

Supposons que H^- ne centralise pas A. Alors $C_A(H^-)$ est fini par H-minimalité de A. Soit W un sous-groupe normal de H tel que $V < W \leq U$. Alors $[H^-, W]$ est un sous-groupe définissable et connexe de W (fait 1.2.6) et est normalisé par H. Si $[H^-, W] = 1$ alors $W \leq C_A(H^-)$ est fini et W/V contient une section H-d_{loc}-minimale, ce qui est contradictoire. Donc on a $[H^-, W] = A$ puisque A est H-minimal, et $W = A = U$. Ceci prouve que U/V est H-d_{loc}-minimal, ce qui est contradictoire. Donc H^- centralise A.

Supposons U/V sans torsion. Soit W un sous-groupe localement clos normal de H avec $V < W \leq U$. Comme W/W^+ est localement fini d'après le corollaire 3.1.7 (i), W^+ n'est pas contenu dans V. U/V étant sans torsion, W^+ est infini et, par H-minimalité de A, $A = W^+$. On en déduit $W = A = U$, et U/V est H-d_{loc}-minimale, ce qui est contradictoire. Donc U/V n'est pas sans torsion.

Supposons G non connexe. On note T/V le sous-groupe de torsion maximal de U/V. T/V est normalisé par H et on a $T/V \neq 1$. Par minimalité de G, T/V contient une section H°-d_{loc}-minimale W/V. Le lemme 3.5.3 montre que T/V contient un sous-groupe minimale normale W_1/V de H/V. Comme W_1/V est localement fini et comme V est localement clos, la remarque 3.5.6 dit que W_1/V est H-d_{loc}-minimale. Cette contradiction montre que G est connexe.

Supposons A divisible. Comme U/V n'est pas sans torsion, le lemme 3.2.2 montre que A contient un $\mathcal{P}$-tore non trivial T. Comme G est connexe, le fait 1.4.6 dit que G centralise T. Le fait 1.3.17 donne $A \leq Z(G)$. En particulier, H centralise U/V. Soit W/V un sous-groupe d'ordre premier de U/V. Alors W/V est normalisé par H puisque H centralise U/V. Donc W/V est un sous-groupe minimal normal de H/V. La remarque 3.5.6 dit que W/V est H-d_{loc}-minimal, ce qui est contradictoire. Donc le fait 1.2.14 dit que A est un p-groupe élémentairement abélien pour un entier premier p.

Soient $\overline{k}$ un élément non trivial de U/V, W/V la clôture normale de $\langle \overline{k} \rangle$ dans H/V et W_1/V une H-section non triviale de W. On va montrer $W = W_1$. Soit R le sous-anneau de $End(U/V)$, l'anneau des endomorphismes de U/V, engendré par $A_H(U/V)(= H/C_H(U/V))$. On note R_1 le sous-anneau de $End(U)$ engendré par $A_H(U)$. Comme $C_H(U/V) = C_H(A) = C_H(U)$ d'après le lemme 3.5.1, les faits 1.3.16 et 1.3.19 montrent que R_1 est un sous-anneau d'un corps L de caractéristique p. Comme $A_H(U)$ est localement fini puisque H^- centralise $U \leq A$, R_1 est aussi localement fini. Soient $r \in R_1$ et n l'ordre de r dans le monoïde multiplicatif $(R_1 \setminus \{0\}, .)$. Alors $rr^{n-1} = 1$ et r est inversible dans R_1. Ainsi R_1 est un corps. Donc, comme R est isomorphe à un quotient de R_1, R est un corps. On en déduit que W/V est un R-espace vectoriel. Comme W/V est engendrée par les conjugués d'un seul élément, R agit transitivement sur W/V. Mais R normalise W_1, donc $W = W_1$. On en déduit que W/V est un sous-groupe minimal normal de H/V. Alors la remarque 3.5.6 dit que W/V est H-d_{loc}-minimal. □

La notion de *série chef* joue un rôle important en théorie des groupes. Nous rappelons la définition :

Définition 3.5.8. – *Soient G un groupe et I un ensemble totalement ordonné. Un ensemble $\mathcal{U} = (U_i, V_i; i \in I)$ de paires de sous-groupes de G avec $V_i \trianglelefteq U_i$ pour tout $i \in I$ est appelé* série de type *I de G si :*

(i) pour tout $i, j \in I$ avec $i < j$, $U_i \leq V_j$;

(ii) $G \setminus \{1\} = \cup_{i \in I}(U_i \setminus V_i)$.

Les quotients U_i/V_i sont appelés facteurs *de $\mathcal{U}$. On dit que $\mathcal{U}$ est une* série chef *de G si chaque facteur de $\mathcal{U}$ est une section minimale normale de G. Un facteur d'une série chef est appellé* facteur chef.

Par analogie à la notion de série chef, nous définissons une *série d_{loc}-chef* pour les sections localement closes des groupes de rang de Morley fini.

Définition 3.5.9. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H/K une section localement close de G, A un sous-groupe localement clos de G qui normalise H et K et I un ensemble totalement ordonné. Un ensemble $\mathcal{U} = (U_i/K, V_i/K; i \in I)$ de paires de sections localement closes de H avec $V_i \trianglelefteq U_i$ pour tout $i \in I$ est appelé* série A-d_{loc}-chef de type *I de H/K si :*

(i) pour tout $i \in I$ U_i/V_i est A-d_{loc}-minimale ;

(ii) pour tout $i, j \in I$ avec $i < j$, $U_i \leq V_j$;

(iii) $H \setminus K = \cup_{i \in I}(U_i \setminus V_i)$.

Les quotients U_i/V_i sont appelés facteurs *de $\mathcal{U}$. Si $A = H$, on dit que $\mathcal{U}$ est une* série d_{loc}-chef *de H/K.*

Corollaire 3.5.10. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G et A un sous-groupe localement clos de G qui normalise H et K. Alors H/K possède une série A-d_{loc}-chef de type un ordinal α.*

Preuve. – Par induction sur la classe de résolubilité de H/K. Supposons que H/K ne soit pas abélien. Comme $H'K/K$ est une section localement close de G d'après le lemme 3.1.25, l'hypothèse d'induction dit que $H'K/K$ (resp. $H/H'K$) possède une série A-d_{loc}-chef de type un ordinal α_0 (resp. de type un ordinal β_0). On en déduit que H/K possède une série A-d_{loc}-chef de type $\alpha = \alpha_0 + \beta_0$. On peut donc supposer H/K abélien.

Nous allons construire une série A-d_{loc}-chef de H/K. On note $V_0 = K$. Si, pour un ordinal limite μ on a construit V_i pour tout $i < \mu$, on note $V_\mu = \cup_{i<\mu} V_i$. Pour les ordinaux successeurs, on procède de la façon suivante. Supposons V_β construit pour un certain ordinal β de telle façon que la suite $(V_i)_{i \leq \beta}$ soit strictement croissante et telle que V_{i+1}/V_i soit une section A-d_{loc}-minimale de H pour tout $i < \beta$. Comme H/K est abélien, H normalise V_β et la proposition 3.5.7 dit que H/V_β contient une section AH/K-d_{loc}-minimale $V_{\beta+1}/V_\beta$. Comme H/K est abélien, $V_{\beta+1}/V_\beta$ est aussi A-d_{loc}-minimal. Alors il existe un ordinal α tel que $V_\alpha = H$. Pour tout $i < \alpha$, on note $U_i = V_{i+1}$. Alors $\mathcal{U} = (U_i/K, V_i/K; i \in \alpha)$ est une série A-d_{loc}-chef de type α de H/K. □

Par la remarque 2.6.6, nous savons que, pour tout groupe G de rang de Morley fini, $G/G^{\mathcal{N}}$ est nilpotent. Maintenant, nous pouvons généraliser ce résultat aux sections localement closes.

Fait 3.5.11. – **([23], lemme 1.5.11 p.31)** *Soient R un sous-groupe abélien, normal et divisible d'un groupe G et H un sous-groupe de G avec $[R, H, H] = 1$. Si H/H' est de torsion, $[R, H] = 1$.*

Proposition 3.5.12. – *Si H/K est une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini G, alors $(H/K)/(H/K)^{\mathcal{N}}$ est nilpotent.*

Preuve. – Montrons qu'on peut supposer G résoluble. Il existe un ordinal α tel que $(H/K)^\alpha = (H/K)^{\alpha+1}$. Soit $U/K = (H/K)^\alpha$. Le corollaire 3.1.26 montre que U/K est une section localement close. Aussi, $(H/K)^\mathcal{N}$ contient U/K. Donc, quitte à remplacer K par U, on peut supposer $(H/K)^\alpha = 1$. Comme $(H/K)^\alpha$ contient $(H/K)^{(\alpha)}$, nous avons $(H/K)^{(\alpha)} = 1$. La proposition 3.4.13 montre que H/K est résoluble. Alors le corollaire 3.4.12 permet de supposer G résoluble.

Montrons que H/K est localement nilpotent. Soit L/M une section H/K-d_{loc}-minimale de H. Comme $(H/K)^\alpha = 1$, nous avons $[H/M, L/M] < L/M$. Mais $[H/M, L/M]$ est une section localement close de H d'après le lemme 3.1.25. Donc, par H/K-d_{loc}-minimalité de L/M, nous obtenons $[H/M, L/M] = 1$ et on en déduit que H centralise ses sections H/K-d_{loc}-minimales. Or, d'après le corollaire 3.5.10, H/K a une série d_{loc}-chef de type un ordinal β. Donc H/K est hypercentrale, et la proposition 3.4.18 dit que H/K est localement nilpotent.

Nous montrons la nilpotence de H/K. La proposition 3.3.6 donne $H/K^- = H^+K^-/K^- * T/K^-$ où T/K est le sous-groupe de torsion maximal de H/K et H^+K^-/K^- est nilpotent. Alors on a $H/K = H^+K/K * T/K$, et H^+K/K est nilpotent. Donc il suffit de montrer que T/K est nilpotent et on peut supposer H/K localement fini. Mais la proposition 3.4.18 dit que H/K a un sous-groupe normal et nilpotent d'indice fini n. Soit T_0/K (resp. T_1/K) la somme directe des p-sous-groupes de Sylow de H/K pour les entiers premiers p qui divisent n (resp. qui ne divisent pas n). Alors on a $H/K = T_0/K \times T_1/K$ et T_1/K est nilpotent. Donc on peut supposer $H/K = T_0/K$. En particulier, H/K est une somme directe finie de p-groupes pour des entiers premiers p. On peut donc supposer que H/K est un p-groupe pour un entier premier p. Soit S un p-sous-groupe de Sylow de H. Le fait 1.4.7 *i*) montre que $S = BT$ pour un groupe d'exposant borné B et un p-tore T normal dans S. Le fait 1.4.7 *ii*) dit que B est nilpotent. Donc il existe un entier r tel que S^r soit contenu dans T. $[T, S, S]$ est un sous-groupe de T normal dans S et on a $[T/[T, S, S], S/[T, S, S], S/[T, S, S]] = 1$. Le fait 3.5.11 donne $[T/[T, S, S], S/[T, S, S]] = 1$ et $[T, S] = [T, S, S]$. On obtient $S^\mathcal{N} = [T, S]$, en particulier $S/S^\mathcal{N}$ est nilpotent. Or le corollaire 3.2.6 (*ii*) donne $H/K = SK/K$ et, comme $(H/K)^\mathcal{N} = 1$, $S^\mathcal{N}$ est contenu dans K. On en déduit la nilpotence de H/K. □

Les opérateurs définis ci-dessous sont des analogues de $(.)^\mathcal{N}$ (définition 2.6.5) :

Définition 3.5.13. – *Pour tout groupe G, on note $G^{L\mathcal{N}}$ l'intersection des sous-groupes normaux A de G tels que G/A soit localement nilpotent.*

Pour toute section localement close H/K d'un groupe de rang de Morley fini, on note $(H/K)^{L\mathcal{N}}_{loc}$ l'intersection des sous-groupes normaux A/K de H/K tels que H/A soit une section localement close et localement nilpotente.

Nous obtenons des renseignements sur $(H/K)^{L\mathcal{N}}_{loc}$ lorsque H/K est une section localement close. La proposition suivante est aussi un analogue de la proposition 3.4.13 :

Proposition 3.5.14. – *Si H/K est une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini G, alors $(H/K)/(H/K)^{L\mathcal{N}}_{loc}$ est localement nilpotent.*

Preuve. – Soit $(D_i/K)_{i\in I}$ la famille des sous-groupes normaux de H/K tels que H/D_i soit localement clos et localement nilpotent pour tout $i \in I$. Soit X une partie finie de H. Alors, pour tout $i \in I$, $\langle X\rangle D_i/D_i$ est un sous-groupe nilpotent de H/D_i, et la proposition 3.3.1 montre que $d_{loc}(X)D_i/D_i$ est nilpotent. Comme le lemme 3.1.16 donne $d_{loc}(X) = d(X)$, $d(X)D_i/D_i$ est un sous-groupe nilpotent de H/K pour tout $i \in I$. Par le fait 1.2.7 et par condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables de G, il existe un entier l tel que $d(X)^l = d(X)^{l+1}$. On en déduit que $d(X)^l$ est contenu dans D_i pour tout $i \in I$. Donc, si on note $L/K = (H/K)^{L\mathcal{N}}_{loc}$, $d(X)^l$ est contenu dans L et $\langle X\rangle L/L$ est nilpotent. On a prouvé que $(H/K)/(H/K)^{L\mathcal{N}}_{loc}$ est localement nilpotent. □

L'exemple 3.5.16 montre que pour un groupe de rang de Morley fini G, $G/G^{L\mathcal{N}}$ n'est pas nécessairement localement nilpotent.

Fait 3.5.15. – **([69], 4.1.3 p.93, Baer)** *Si D est un sous-groupe divisible d'un groupe abélien G, alors $G = D \oplus E$ pour un sous-groupe E.*

Exemple 3.5.16. – On considère un groupe de rang de Morley fini U abélien et sans torsion et $G = U \rtimes \langle i \rangle$ où i est une involution qui inverse U. Pour tout $x \in U \setminus \{1\}$, il existe un sous-groupe U_x de U normal dans G et maximal parmi ceux qui contiennent x^2 et pas x. Soit $x \in U \setminus \{1\}$. Comme U/U_x est divisible et comme xU_x est une involution de U/U_x, xU_x est contenu dans un 2-tore T_x/U_x de U/U_x. Si on a $T_x \neq U$, le fait 3.5.15 dit que T_x/U_x a un complément E/U_x dans U/U_x, et E est normalisé par i puisque i inverse U. Par maximalité de U_x, on a $U_x = E$, ce qui est contradictoire. Alors, pour tout $x \in U \setminus \{1\}$, G/U_x est un 2-groupe et G/U_x est localement nilpotent. En particulier, $G^{\mathcal{LN}} = 1$ et $G/G^{\mathcal{LN}}$ n'est pas localement nilpotent.

3.6 Sous-groupes de Carter

Les faits 1.5.4 et 1.5.6 et le théorème 2.4.7 montrent qu'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble possède une unique classe de conjugaison de sous-groupes de Carter. Nous allons généraliser ce résultat aux sections localement closes des groupes de rang de Morley fini résolubles (théorème 3.6.6 (i)). En particulier, nous généralisons le résultat aux groupes de rang de Morley fini résolubles non nécessairement connexes. La principale difficulté pour étendre ce résultat aux groupes non connexes était causée par la non définissabilité des sous-groupes de Carter. En travaillant dans la classe des sections localement closes, nous pouvons lever cette difficulté. Cela se produit principalement grâce au corollaire 3.4.19 qui montre que les sous-groupes de Carter des sections localement closes sont localement clos.

Avant d'énoncer le théorème 3.6.6 nous donnons deux exemples de sous-groupes de groupe de rang de Morley fini résoluble avec des sous-groupes de Carter non conjugués. Donc le théorème 3.6.6 ne peut pas s'étendre à tous les sous-groupes des groupes de rang de Morley fini.

Exemple 3.6.1. – Considérons le produit semi-direct $\mathbb{Q} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ où le générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit par inversion. Alors les sous-groupes de Carter de $\mathbb{Z} \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sont les 2-sous-groupes de Sylow et forment exactement 2 classes de conjugaisons.

Définition 3.6.2. – *Un groupe G est* résiduellement fini *si, pour tout $x \in G \setminus \{1\}$, il existe un sous-groupe normal et d'indice fini de G qui ne contient pas x.*

Fait 3.6.3. – **([53], Mal'cev)** *Un groupe linéaire finiment engendré est résiduellement fini.*

Exemple 3.6.4. – On considère un corps algébriquement clos K tel que K^* possède un élément x d'ordre infini et $G = K_+ \rtimes K^*$ (où K^* agit linéairement sur K_+). On fixe $c \in K_+ \setminus \{0\}$ et on note U le sous-groupe de G engendré par c et x. Nous montrons que U a des sous-groupes de Carter non conjugués.

D'après le fait 3.6.3, U possède un sous-groupe normal d'indice fini V qui ne contient pas c. Comme x est d'ordre infini et comme V est d'indice fini dans U, il existe $y \in (V \cap K^*) \setminus \{1\}$. Comme K est un corps, il existe $k \in K_+$ tel que $[y, k] = c$. Comme V contient $[y, U]$, k n'appartient pas à U. Mais on a $y^k = yc \in U$. On en déduit $K^{*k} \cap U \neq 1$.

Montrons que $K^* \cap U$ et $K^{*k} \cap U$ sont des sous-groupes de Carter de U. Soit $g \in N_U(K^* \cap U)$. Alors, comme on a $[g, K^* \cap U] \leq K_+ \cap (K^* \cap U)$, g centralise $K^* \cap U$. Soient $a \in K_+$ et $b \in K^*$ tel que $g = ab$. Alors b centralise $K^* \cap U$. Donc on a $a \in C_{K_+}(K^* \cap U)$. Comme K^* agit linéairement sur K_+ et comme on a $K^* \cap U \neq 1$, on obtient $a = 0$ et $g \in K^*$. Ceci prouve que $K^* \cap U$ est autonormalisant. Donc $K^* \cap U$ est un sous-groupe de Carter de U. De la même façon, $K^{*k} \cap U$ est un sous-groupe de Carter de U.

Montrons que $K^* \cap U$ et $K^{*k} \cap U$ ne sont pas conjugués. Supposons qu'il existe $u \in U$ tel que $(K^* \cap U)^u = K^{*k} \cap U$. Comme on a $U = \langle c, x \rangle$ avec $c \in K_+$ et $x \in K^*$, nous avons

$U = (U \cap K_+) \rtimes (K^* \cap U)$ et on peut supposer $u \in K_+$. On a $K^{*k} \cap K^{*u} \neq 1$, et on obtient $K^{*k} = K^{*u}$ et $ku^{-1} \in K^*$. Comme k et u sont des éléments de K_+, u est l'inverse de k. Ceci contredit $k \notin U$.

Lemme 3.6.5. – *Soient G un groupe avec un sous-groupe localement nilpotent maximal C et un sous-groupe normal et localement nilpotent N tels que $G = NC$. Alors C est un sous-groupe de Carter de G.*

Preuve. – Comme $N_N(C)$ et C sont localement nilpotents et se normalisent, $N_G(C)(= N_N(C)C)$ est localement nilpotent d'après le fait 1.3.3. □

Théorème 3.6.6. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini résoluble, alors :*

(i) toute section localement close U/V de G possède une unique classe de conjugaison de sous-groupes de Carter ;

(ii) si C est un sous-groupe de Carter de U, alors CV/V est un sous-groupe de Carter de U/V et tous les sous-groupes de Carter de U/V sont de cette forme.

Preuve. – Supposons que tout sous-groupe localement clos de G possède une unique classe de conjugaison de sous-groupes de Carter. Alors, comme C est localement clos d'après le corollaire 3.4.19, CV est aussi localement clos d'après le lemme 3.1.11. Par l'argument de Frattini et la conjugaison des sous-groupes de Carter de CV, on obtient $N_{U/V}(CV/V) = N_U(C)V/V = CV/V$. Donc CV/V est un sous-groupe de Carter de U/V.

Soit K/V un sous-groupe de Carter de U/V. Le corollaire 3.4.19 dit que K est localement clos. La proposition 3.4.18 dit que K/V vérifie la condition de normalisateur. Soit C un sous-groupe de Carter de K. Par l'argument de Frattini appliqué à CV, on obtient $K/V = CV/V$.

On en déduit qu'il suffit de montrer que tout sous-groupe localement clos H de G possède une unique classe de conjugaison de sous-groupes de Carter.

1) Si H^+ est nilpotent et H/H^+ localement nilpotent.

Existence : Soit R un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de H. Les corollaires 3.1.7 (i) et 3.2.6 (ii) donnent $H = RH^+$. Le fait 1.6.4 donne l'existence d'un sous-groupe de Carter D de R. Comme $R/(R \cap H^+) \cong RH^+/H^+$ est localement nilpotent, le fait 1.6.4 dit que $R = (R \cap H^+)D$, donc $H = H^+D$. Soit C un sous-groupe localement nilpotent maximal de H qui contient D. Alors le lemme 3.6.5 dit que C est un sous-groupe de Carter de H.

Conjugaison : Soit C un sous-groupe de Carter de H. D'après la proposition 3.3.6 et le corollaire 3.4.19 on a $C = C^+ * S$ où S est le $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de C. Soit R un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de H qui contient S. Montrons que S est un sous-groupe de Carter de R. Soit $r \in N_R(S)$. Alors r normalise $C_{H^+}(S) * S$. Mais $C_{H^+}(S) * S$ est localement nilpotent puisque S et H^+ le sont. En particulier $C_{H^+}(S) * S$ vérifie la condition de normalisateur d'après les faits 1.5.1 et 1.5.2. Aussi on a $C^+ \leq C_{H^+}(S)$ et $C \leq C_{H^+}(S) * S$. Alors, comme C est autonormalisant dans H, $C = C_{H^+}(S) * S$. Ainsi r normalise C et on a $r \in C \cap R = S$. On a prouvé que S est un sous-groupe de Carter de R.

Soient C_1 et C_2 deux sous-groupes de Carter de H. Montrons que C_1 et C_2 sont conjugués dans H. Ce qui précède montre que $C_1 = C_{H^+}(S_1) * S_1$ et $C_2 = C_{H^+}(S_2) * S_2$ pour deux sous-groupes de Carter S_1 et S_2 de deux $\mathcal{P}$-sous-groupes de Hall R_1 et R_2 de H. D'après le théorème 3.2.5 il existe $g \in H$ tel que $R_1^g = R_2$. Aussi, d'après le fait 1.6.4, il existe $u \in R_2$ tel que $(S_1^g)^u = S_2$. On en déduit $C_1^{gu} = C_{H^+}(S_1^{gu}) * S_1^{gu} = C_{H^+}(S_2) * S_2 = C_2$.

2) Si H^+ est nilpotent.

Existence : Soit K/H^+ un sous-groupe de Carter de H/H^+ (il existe d'après le fait 1.6.4). Alors, comme $H^+ \leq K \leq H$, on a $(H^+)^+ \leq K^+ \leq H^+$ et, comme $(H^+)^+ = H^+$, on obtient

$K^+ = H^+$. Donc K/K^+ est localement nilpotent et K^+ est nilpotent. *1)* dit que K a un sous-groupe de Carter C et aussi que deux sous-groupes de Carter de K^+C sont conjugués dans K^+C. L'argument de Frattini donne $N_{K/K^+}(CK^+/K^+) = N_K(C)K^+/K^+ = CK^+/K^+$ et CK^+/K^+ est autonormalisant dans K/K^+. Or K/K^+ est localement nilpotent, donc vérifie la condition de normalisateur (proposition 3.4.18). On en déduit que $K = K^+C$. L'argument de Frattini montre que $K = N_H(K) = K^+N_H(C)$. Ainsi, on a $N_H(C) = N_K(C) = C$ et C est un sous-groupe de Carter de H.

Conjugaison : Soient C_1 et C_2 deux sous-groupes de Carter de H. Alors on a $(H^+C_1)^+ = H^+ = (H^+C_2)^+$, et H^+C_1/H^+ et H^+C_2/H^+ sont localement nilpotents. Donc 1) dit que les sous-groupes de Carter de H^+C_1 et ceux de H^+C_2 sont conjugués. L'argument de Frattini donne $N_H(H^+C_1) = H^+N_H(C_1) = H^+C_1$ et $N_H(H^+C_2) = H^+C_2$. On en déduit que H^+C_1/H^+ et H^+C_2/H^+ sont des sous-groupes de Carter de H/H^+ et ils sont donc conjugués par le fait 1.6.4. La conjugaison des sous-groupes de Carter dans H^+C_1 donne le résultat.

3) Si il existe un sous-groupe F normal de H définissable, connexe et nilpotent tel que H/F soit localement nilpotent.

Existence : D'après le théorème 2.4.7, H^- a un sous-groupe de Carter D et deux sous-groupes de Carter de H^- sont conjugués dans H^-. Comme H^-/F est localement nilpotent, donc nilpotent (corollaire 2.4.5), on a $H^- = FD$ d'après le corollaire 2.4.8. Ainsi on obtient $H = FN_H(D)$ par l'argument de Frattini. Comme $N_H(D)/D \cong N_H(D)H^-/H^-$ est localement fini et comme D est définissable (théorème 2.4.7), $N_H(D)$ est localement clos. Puisque $N_H(D)^+$ est un sous-groupe de D, $N_H(D)^+$ est nilpotent. Par *2)* $N_H(D)$ a un sous-groupe de Carter K. Alors K est aussi un sous-groupe de Carter de $(F \cap D)K$. Or K est localement clos d'après le corollaire 3.4.19 et $(F \cap D)K$ aussi d'après le lemme 3.1.11. Donc *2)* et l'argument de Frattini montrent que $N_{N_H(D)}((F \cap D)K) = (F \cap D)N_{N_H(D)}(K) = (F \cap D)K$. En particulier, comme $F \cap D = N_F(D)$, $KN_F(D)/N_F(D)$ est un sous-groupe de Carter de $N_H(D)/N_F(D)$. Mais $N_H(D)/N_F(D) \cong N_H(D)F/F$ est localement nilpotent et vérifie la condition de normalisateur d'après la proposition 3.4.18. Alors on obtient $N_H(D) = KN_F(D)$ et $H = FN_H(D) = FK$. Soit C un sous-groupe localement nilpotent maximal de H qui contient K. Alors C est un sous-groupe de Carter de H d'après le lemme 3.6.5.

Conjugaison : a) Si il existe un sous-groupe H-minimal A dans F et deux sous-groupes de Carter D_1 et D_2 de H tels que $H = AD_1 = AD_2$ alors D_1 et D_2 sont conjugués dans H.

D'après *2)* on peut supposer H^+ non nilpotent, en particulier H^- n'est pas nilpotent. On va montrer que, si C est un sous-groupe de Carter de H tel que $H = AC$, alors C est le normalisateur d'un sous-groupe de Carter de H^-. Soient C un tel sous-groupe de Carter de H et K un sous-groupe nilpotent maximal de H^- qui contient $C \cap H^-$. Alors on a $H^- = A(C \cap H^-) = AK$ et K est un sous-groupe de Carter de H^- (lemme 3.6.5). Si $A \cap K$ est infini, $Z(K) \cap A$ est aussi infini. Mais $Z(K) \cap A$ est central dans H^- puisque A est abélien. Donc $Z(H^-) \cap A$ est infini. Par H-minimalité de A, on obtient $A \leq Z(H^-) \leq K$ et $H^- = K$ est nilpotent, ce qui contredit le fait que H^- ne soit pas nilpotent. Donc $A \cap K$ est fini. D'après le théorème 2.5.1, K est anormal et la proposition 2.5.5 dit que $A \cap K$ est connexe, donc trivial. Or on a $C \cap H^- \leq K$ et $H^- = A \rtimes (C \cap H^-)$, donc $C \cap H^- = K$. Comme C est contenu dans $N_H(C \cap H^-) = N_H(K)$ et comme l'argument de Frattini donne $H = A \rtimes N_H(K)$, alors $C = N_H(K)$ puisque $H = AC$. On en déduit qu'il existe des sous-groupes de Carter K_1 et K_2 de H^- tels que $D_1 = N_H(K_1)$ et $D_2 = N_H(K_2)$. La conjugaison de K_1 et de K_2 dans H^- donne le résultat.

b) Cas général.

On fait la preuve par induction sur le plus petit entier r tel qu'on puisse choisir F de rang r. Si $r = 0$ il n'y a rien à faire. Sinon, soient A un sous-groupe H-minimal de F et C_1 et C_2 deux sous-groupes de Carter de H. Si $A \neq F$ alors, par hypothèse d'induction, les sous-groupes de Carter de C_1A et ceux de C_2A sont conjugués. L'argument de Frattini donne alors $N_{H/A}(C_1A/A) = N_H(C_1)A/A = C_1A/A$ et $N_{H/A}(C_2A/A) = C_2A/A$. Par hypothèse d'induction C_1A/A et C_2A/A sont conjugués et la conjugaison des sous-groupes de Carter de C_1A donne le résultat. Donc on peut supposer $A = F$.

Soit C un sous-groupe de Carter de H. Montrons que AC/A est un sous-groupe de Carter de H/A. Soit B un sous-groupe AC-minimal dans A. Si $B = A$ alors *a)* et l'argument de Frattini donnent $N_{H/A}(AC/A) = AN_H(C)/A = AC/A$ et AC/A est un sous-groupe de Carter de H/A. Sinon, par hypothèse d'induction, les sous-groupes de Carter de BC sont conjugués et l'argument de Frattini donne $N_{AC/B}(BC/B) = BN_{AC}(C)/B = BC/B$ et BC/B est un sous-groupe de Carter de AC/B. Comme on a $rk(A/B) < rk(A)$, l'hypothèse d'induction donne la conjugaison des sous-groupes de Carter de AC/B. Soient D_1 et D_2 deux sous-groupes de Carter de H tels que $AD_1 = AD_2 = AC$. Alors ce qui précède montre que BD_1/B et BD_2/B sont des sous-groupes de Carter de AC/B et qu'ils sont conjugués. Aussi, les sous-groupes de Carter de BD_1 sont conjugués par hypothèse d'induction. Donc D_1 et D_2 sont conjugués. L'argument de Frattini donne alors $N_{H/A}(AC/A) = AN_H(C)/A = AC/A$ et AC/A est un sous-groupe de Carter de H/A.

Puisque $H/A = H/F$ est localement nilpotent, ce qui précède et la proposition 3.4.18 montrent que $H = AC_1 = AC_2$, et *a)* permet de conclure.

4) Cas général.

On fait la preuve par induction sur le rang de H^+. Si $rk(H^+) = 0$, le fait 1.6.4 donne le résultat. Sinon il existe un sous-groupe H-minimal A dans H^+. Le lemme 3.1.5 (*iii*) donne $(H/A)^+ = H^+/A$, d'où $rk((H/A)^+) < rk(H^+)$. Par hypothèse d'induction H/A a un sous-groupe de Carter K/A et les sous-groupes de Carter de H/A sont conjugués.

Existence : D'après *3)* K a un sous-groupe de Carter C et les sous-groupes de Carter de K sont conjugués. Aussi les sous-groupes de Carter de AC sont conjugués d'après *3)*. Donc l'argument de Frattini donne $K = AC$ et $K = N_H(AC) = AN_H(C)$. Ainsi on a $N_H(C) = N_K(C) = C$ et C est un sous-groupe de Carter de H.

Conjugaison : Soient C_1 et C_2 deux sous-groupes de Carter de H. Par *3)* les sous-groupes de Carter de AC_1 et ceux de AC_2 sont conjugués et l'argument de Frattini montre que AC_1/A et AC_2/A sont des sous-groupes de Carter de H/A. La conjugaison des sous-groupes de Carter dans H/A donne alors le résultat. □

Dans le chapitre 5, le langage de la *théorie des formations* unifiera le résultat de conjugaison des sous-groupes de Hall et le résultat d'existence et de conjugaison des sous-groupes de Carter (théorème 5.3.14 et proposition 5.3.18).

3.7 Les sous-groupes de Sylow nilpotents

Certaines classes de sections localement closes des groupes de rang de Morley fini résolubles ont des sous-groupes de Sylow nilpotents. Par exemple les sections localement closes des groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles (cf. corollaires 2.4.5 et 3.2.6 (*ii*)), ou bien les groupes de rang de Morley fini résolubles G qui ont des p-sous-groupes de Sylow finis pour tout entier premier p qui divise l'ordre de G/G°. Nous montrons d'abord que ces groupes vérifient une même condition de finitude qui est d'avoir l'ensemble de leurs sous-groupes nilpotents inductif (proposition 3.7.5). Grâce à cette propriété, on peut donner des informations concernant l'hypercentre (proposition 3.7.7). On finit cette section par un résultat de connexité des sous-groupes de Carter (théorème 3.7.14).

3.7.1 Propriété d'inductivité

Lemme 3.7.1. – *Un groupe localement nilpotent G dont l'ensemble des sous-groupes nilpotents est inductif est nilpotent.*

Preuve. – La preuve se fait par induction sur la cardinalité $\aleph$ de G. On peut supposer $\aleph$ infini. Soit f une bijection entre G et l'ensemble des ordinaux strictement plus petit que $\aleph$. Pour tout ordinal $\mu < \aleph$ on note $g_\mu = f^{-1}(\mu)$ et $C_\mu = Card\,(\{g_\gamma : \gamma \leq \mu\})(< \aleph)$. Si C_μ est fini, alors $\langle g_\gamma : \gamma \leq \mu\rangle$ est nilpotent. Sinon le lemme 3.4.2 donne $Card\,(\langle g_\gamma : \gamma \leq \mu\rangle) = C_\mu < \aleph$ et $\langle g_\gamma : \gamma \leq \mu\rangle$ est nilpotent par minimalité de $\aleph$. Or G est égal à la réunion des $\langle g_\gamma : \gamma \leq \mu\rangle$ pour $\mu < \aleph$. Comme l'ensemble des sous-groupes nilpotents de G est inductif, G est nilpotent. $\square$

Corollaire 3.7.2. – *Soit G un groupe dont l'ensemble des sous-groupes nilpotents est inductif. Alors, pour tout $p \in \mathcal{P}$, tous les p-sous-groupes localement finis de G sont nilpotents.*

Lemme 3.7.3. – *Soient G un $\mathcal{M}_c$-groupe localement fini et résoluble et A un sous-groupe normal de G tel que G/A soit localement nilpotent. Alors il existe un entier n tel que, pour tout $p \in \mathcal{P}$ supèrieur ou égal à n, tous les p-sous-groupes de G/A soient abéliens.*

Preuve. – Le fait 1.6.4 dit que G possède un sous-groupe de Carter C et $G = AC$. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, C a un unique p-sous-groupe de Sylow S_p. Soit π l'ensemble des $p \in \mathcal{P}$ tels que S_p ne soit pas abélien. A tout $p \in \pi$ on associe un élément x_p de $S_p \setminus Z(S_p)$. Alors il existe une partie finie π_0 de π telle que $C_C(x_p : p \in \pi) = C_C(x_p : p \in \pi_0)$. Supposons qu'il existe $q \in \pi \setminus \pi_0$. Comme $C = \bigoplus_{p\in\mathcal{P}} S_p$, S_q est contenu dans $C_C(x_p : p \in \pi_0)$. Ceci contredit $x_q \notin Z(S_q)$. On en déduit que π est fini. Comme $G = AC$, on a le résultat. $\square$

Lemme 3.7.4. – *Soit G un $\mathcal{M}_c$-groupe de torsion avec un sous-groupe normal et résoluble A. On suppose que les p-sous-groupes localement finis de G/A sont nilpotents pour tout $p \in \mathcal{P}$. Alors l'ensemble des sous-groupes nilpotents de G/A est inductif.*

Preuve. – Soient $(H_i/A)_{i<\alpha}$ une suite croissante de sous-groupes nilpotents de G/A (α étant un ordinal) et $H = \bigcup_{i<\alpha} H_i$. Alors H/A est localement nilpotent et, comme A est résoluble, H est localement résoluble. Le fait 3.4.1 dit que H est résoluble. Montrons que H/A est nilpotent. Pour tout $p \in \mathcal{P}$ on note S_p/A le p-sous-groupe de Sylow de H/A et c_p la classe de nilpotence de S_p/A. Soit π_0 l'ensemble des $p \in \mathcal{P}$ avec $c_p \neq 1$. Le lemme 3.7.3 dit que π_0 est fini. Soit c le plus grand des entiers c_p quand p parcourt π_0. Comme H/A est localement nilpotent, $H/A = (\bigoplus_{p\in\pi_0} S_p/A) \bigoplus (\bigoplus_{p\notin\pi_0} S_p/A)$. Comme S_p/A est abélien si $p \notin \pi_0$, H/A est nilpotent de classe c. $\square$

Proposition 3.7.5. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H/K une section localement close de G. Alors l'ensemble des sous-groupes nilpotents de H/K est inductif si et seulement si tous les p-sous-groupes localement finis de H/K sont nilpotents pour tout $p \in \mathcal{P}$.*

Preuve. – D'après le corollaire 3.7.2, il suffit de montrer que, si tous les p-sous-groupes localement finis de H/K sont nilpotents pour tout $p \in \mathcal{P}$, alors l'ensemble des sous-groupes nilpotents de H/K est inductif. Soit $(H_i/K)_{i<\alpha}$ une suite croissante de sous-groupes nilpotents de H/K où α est un ordinal. Montrons que $U/K = \bigcup_{i<\alpha} H_i/K$ est nilpotent. On peut supposer $K^- = 1$. Comme U/K est localement nilpotent, la proposition 3.3.1 dit que $d_{loc}(U)/K$ est localement nilpotent et on peut supposer $H = d_{loc}(U)$. Le corollaire 3.4.12 permet de supposer G résoluble. D'après la proposition 3.3.1, $d_{loc}(H_i)/K$ est nilpotent pour tout $i < \alpha$. Par finitude du rang de G, il existe $\mu < \alpha$ tel que $d_{loc}(H_i)^+$ soit contenu dans $d_{loc}(H_\mu)^+$ pour tout $i < \alpha$. Pour tout $i < \alpha$ on note R_i/K le sous-groupe de torsion maximal de $d_{loc}(H_i)/K$. Pour tout $i < \alpha$, la proposition 3.3.6 donne $d_{loc}(H_i) = d_{loc}(H_i)^+ {*} R_i$, d'où $d_{loc}(H_i) \leq d_{loc}(H_\mu)^+ R_i$. Soit $R = \bigcup_{i<\alpha} R_i$. Alors R est un $\mathcal{M}_c$-groupe de torsion. D'après le lemme 3.7.4, R/K est nilpotent. Ainsi $d_{loc}(H_\mu)^+ K/K$ et R/K sont tous deux nilpotents et, comme ils se centralisent, $d_{loc}(H_\mu)^+ R/K$ est nilpotent. Mais on a $\bigcup_{i<\alpha} H_i \leq \bigcup_{i<\alpha} d_{loc}(H_i) = d_{loc}(H_\mu)^+ R$, d'où le résultat. $\square$

3.7.2 L'hypercentre

Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe alors il existe un entier n tel que $Z_n(G)$ soit l'hypercentre de G (cf. corollaire 3.15 p.89, [64]). En effet, il existe $i \in \mathbb{N}$ avec $rk(Z_j(G)) \leq rk(Z_i(G))$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Alors $Z_{i+2}(G)/Z_i(G)$ est fini, et est centralisé par G puisque G est connexe. En particulier, $Z_{i+1}(G) = Z_{i+2}(G)$ est l'hypercentre de G. Nous montrons des analogues de ce résultat pour certaines sections localement closes (propositions 3.7.7 et 3.7.12).

Lemme 3.7.6. – *Soit G un groupe dont l'ensemble des sous-groupes nilpotents est inductif. On suppose qu'il existe un entier m et des sous-groupes nilpotents $N_0, ..., N_m$ tels que, pour tout $i \in \{0, ..., m\}$, $N_0...N_i$ soit normal dans G et $G = N_0...N_m$. Alors il existe un entier n tel que $Z_n(G) = Z_\infty(G)$.*

Preuve. – Pour tout groupe A on note $\gamma(A)$ l'intersection des sous-groupes localement nilpotents maximaux de A. Pour tout groupe A et tout $i \in \mathbb{N}$, $\gamma(A)$ contient $Z_i(A)$. Nous allons montrer qu'il existe un entier n tel que $\gamma(G)$ soit contenu dans $Z_n(G)$. Alors, comme $\gamma(G)$ contient $Z_{n+1}(G)$, nous aurons prouvé que $Z_n(G) = Z_{n+1}(G)$ est l'hypercentre de G. Nous faisons la preuve par induction sur m. Si $m = 0$ il n'y a rien à faire. Sinon, pour tout $i = 0, ..., m$, on note M_i un sous-groupe localement nilpotent maximal de $\gamma(G)N_0...N_i$ qui contient N_i. Alors, par définition de $\gamma(G)$, $\gamma(G)$ est contenu dans M_i pour tout $i = 0, ..., m$. Aussi, pour tout $i = 0, ..., m$, M_i est nilpotent d'après le lemme 3.7.1. Soit $K = M_0...M_{m-1} = \gamma(G)N_1...N_{m-1}$. Par hypothèse d'induction il existe un entier k tel que $\gamma(K)$ soit contenu dans $Z_k(K)$. Soient $U_0 = \gamma(G)$ et $U_{i+1} = [U_i, K]$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Alors $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de sous-groupes normaux de G et, comme $\gamma(G) \leq \gamma(K) \leq Z_k(K)$, on a $U_k = 1$. Mais U_i est contenu dans M_m pour tout $i \in \mathbb{N}$ et M_m est nilpotent. Notons $V_{i,0} = U_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $V_{i,j+1} = [V_{i,j}, M_m]U_{i+1} = [V_{i,j}, G]U_{i+1}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un plus petit entier $\alpha(i)$ tel que $V_{i,\alpha(i)} = U_{i+1}$. Notons $\gamma_0 = \gamma(G)$ et $\gamma_{s+1} = [\gamma_s, G]$ pour tout entier s. Comme $V_{i,j+1} = [V_{i,j}, G]U_{i+1}$ pour tout entier i et j, alors, si pour tout $j \in \mathbb{N}$ on note $n_j = \alpha(0) + \alpha(1) + ... + \alpha(j)$, γ_{n_j} est contenu dans U_{j+1} pour tout entier j. En particulier, on a $\gamma_{n_k} \leq U_k = 1$ et $\gamma(G)$ est contenu dans $Z_{n_k}(G)$. □

Proposition 3.7.7. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et H/K une section localement close de G dont les p-sous-groupes sont nilpotents pour tout $p \in \mathcal{P}$. Alors il existe un entier n tel que $Z_n(H/K) = Z_\infty(H/K)$.*

Preuve. – D'après la proposition 3.7.5, l'ensemble des sous-groupes nilpotents de H/K est inductif. Soit r la classe de résolubilité de H/K. D'après le corollaire 3.1.26, $H^{(i)}$ est localement clos pour tout entier i. En particulier le théorème 3.6.6 (i) dit que $H^{(i)}K/K$ a un sous-groupe de Carter N_i/K pour tout $i \in \{0, ..., r\}$, et le théorème 3.6.6 (ii) donne $H^{(i)}K/K = (N_i/K)(H^{(i+1)}K/K)$. Comme le lemme 3.7.1 dit que N_i/K est nilpotent pour tout $i \in \{0, ..., r\}$, le lemme 3.7.6 donne le résultat. □

Lemme 3.7.8. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G. Alors $Z_k(H) = Z_k(d(H)) \cap H$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Preuve. – On fait la preuve par induction sur k. Il suffit de montrer que $Z_k(H)$ est contenu $Z_k(d(H)) \cap H$. Si $k = 0$ on a $Z_0(H) = 1 = Z_0(d(H)) \cap H$. Sinon, soit $x \in Z_k(H)$. Alors $[\langle x\rangle, H]$ est contenu dans $Z_{k-1}(H) = Z_{k-1}(d(H)) \cap H$. D'après le fait 1.2.11, $[x, d(H)]$ est contenu dans $d([\langle x\rangle, H]) \leq Z_{k-1}(d(H))$, et on obtient $x \in Z_k(d(H)) \cap H$. □

Le lemme 3.7.10 dit, en particulier, qu'un $\mathcal{M}_c$-groupe nilpotent infini a un centre infini. Aussi, il généralise un fait bien connu pour les groupes de rang de Morley fini :

Fait 3.7.9. – **([10], ex. 5 p.98 ; preuve donnée dans [1], fait 2.18)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini nilpotent et H un sous-groupe infini normal de G. Alors $Z(G) \cap H$ est infini.*

Lemme 3.7.10. – *Soit G un groupe tel qu'il existe une partie finie X de G avec $C_G(X) = Z(G)$ et soit H un sous-groupe normal de G tel qu'il existe un entier k tel que $Z_k(G) \cap H$ soit infini. Alors $Z(G) \cap H$ est infini.*

Preuve. – Il existe un plus petit entier j tel que $B = Z_{j+1}(G) \cap H$ soit infini. Comme, pour tout $g \in G$, $[g, B]$ est contenu dans $Z_j(G) \cap H$ qui est fini, $|B : C_B(g)|$ est fini pour tout $g \in G$. Ainsi $B/C_B(X)$ est fini et $Z(G) \cap B$ est d'indice fini dans B, et $Z(G) \cap B$ est infini. □

Lemme 3.7.11. – *Soit G un $\mathcal{M}_c$-groupe dont l'ensemble des sous-groupes nilpotents est inductif. Alors, si H désigne un sous-groupe normal de G tel que $Z(G) \cap H$ soit fini, $Z_\infty(G) \cap H$ est aussi fini.*

Preuve. – Soit G^c l'intersection des centralisateurs des parties X de G tels que $C_G(X)$ soit d'indice fini dans G. Alors $|G : G^c|$ est fini. On suppose que G est un contrexemple au lemme avec $|G : G^c|$ minimal. Soit H un sous-groupe normal de G tel que $Z_\infty(G) \cap H$ soit infini et $Z(G) \cap H$ soit fini. Soit $z \in (Z_2(G) \cap H) \setminus Z(G)$. Alors $G/C_G(z)$ est abélien, fini et non trivial. Donc $C_G(z)$ contient G^c et il existe un sous-groupe normal U de G d'indice premier p et qui contient $C_G(z)$. On remarque que U^c contient G^c et qu'on a $|U : U^c| < |G : G^c|$. Aussi $Z_\infty(U) \cap (Z_\infty(G) \cap U \cap H)$ est infini et, par minimalité de $|G : G^c|$, $Z = Z(U) \cap Z_\infty(G) \cap H$ est infini. Soit $x \in G \setminus U$. Alors $Z\langle x \rangle$ est un groupe hypercentral puisque $Z_\infty(G)$ contient Z. Donc $Z\langle x \rangle$ est nilpotent d'après les faits 1.5.2 et 1.5.3 et le lemme 3.7.1. Le lemme 3.7.10 dit que $C_Z(Z\langle x \rangle)$ est infini. $C_Z(Z\langle x \rangle)$ étant central dans G puisque $G = U\langle x \rangle$, il y a une contradiction. □

On en déduit un résultat sur l'hypercentre d'un sous-groupe quelconque d'un groupe de rang de Morley fini. Celui-ci, contrairement à la proposition 3.7.7, ne suppose pas la résolubilité.

Proposition 3.7.12. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini dont les p-sous-groupes localement finis sont nilpotents pour tout $p \in \mathcal{P}$. Alors, si H est un sous-groupe de G, il existe un entier n tel que $Z_n(H) = Z_\infty(H)$.*

Preuve. – D'après le lemme 3.7.8 on peut supposer H définissable. Alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $Z_i(H)^\circ$ soit contenu dans $Z_j(H)^\circ$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soient $Z = Z_j(H)^\circ$ et S/Z un p-sous-groupe localement fini maximal de H/Z pour un entier premier p. Alors S/Z est résoluble d'après le fait 1.4.7 *i*). Donc S est aussi résoluble et le fait 1.3.15 dit que $d(S)$ est résoluble. Comme S/Z est un p-sous-groupe de Sylow de $d(S)/Z$, le fait 1.4.12 2. dit qu'il existe un p-sous-groupe de Sylow R de $d(S)$ tel que $S/Z = RZ/Z$. Par hypothèse R est nilpotent et S/Z aussi. On en déduit que les p-sous-groupes localement finis de H/Z sont nilpotents pour tout $p \in \mathcal{P}$. Or $Z(H/Z)$ est fini et, d'après la proposition 3.7.5 et le lemme 3.7.11, $Z_\infty(H/Z)$ est aussi fini. Ceci permet de conclure. □

3.7.3 Connexité des sous-groupes de Carter

Dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G, les sous-groupes de Carter sont anormaux (théorème 2.4.7). Alors la proposition 2.5.5 dit que, si A est un sous-groupe normal, définissable et connexe de G, un sous-groupe de Carter de G intersecte A en un sous-groupe définissable et connexe. Nous montrons un analogue de ce résultat pour les sous-groupes localement clos résolubles dont les p-sous-groupes sont nilpotents (théorème 3.7.14).

Lemme 3.7.13. – *Soient H un sous-groupe localement clos d'un groupe de rang de Morley fini et A un sous-groupe définissable, connexe, abélien et normal de H. On suppose que les p-sous-groupes localement finis de H sont nilpotents pour tout $p \in \mathcal{P}$. Alors, pour tout $x \in H$, si $C_A(x)$ est fini, $C_A(x) = 1$.*

Preuve. – Soit $x \in H$ avec $C_A(x)$ fini. Montrons que $C_A(x) = 1$. On peut supposer $H = d(x)A$. $Z(H) \cap A$ est fini et, d'après la proposition 3.7.5 et le lemme 3.7.11, $Z_\infty(H) \cap A$ est fini. Soit

$$\begin{array}{rccc} ad_x : & A & \longrightarrow & A \\ & a & \longmapsto & [x,a] \end{array}$$

Alors ad_x est un homomorphisme définissable de groupes et $rkA = rk(ad_x(A)) + rk(C_A(x))$. Comme $C_A(x)$ est fini, on a $rk(ad_x(A)) = rkA$. La connexité de A donne $ad_x(A) = A$. Aussi, si N est un sous-groupe fini de A, on a $|(ad_x)^{-1}(N)| = |N||C_A(x)|$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|(ad_x)^{-n}(C_A(x))| = |C_A(x)|^{n+1}$.

Comme ad_x est un homomorphisme de groupe et comme $H = d(x)A$, on obtient $Z_{i+1}(H) \cap A = (ad_x)^{-i}(C_A(x))$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. En particulier, on a $|Z_i(H) \cap A| = |C_A(x)|^i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et, comme $Z_\infty(H) \cap A$ est fini, $C_A(x) = 1$. □

Théorème 3.7.14. – *Soient H un sous-groupe localement clos d'un groupe de rang de Morley fini résoluble, C un sous-groupe de Carter de H et A un sous-groupe normal, définissable et connexe de H. On suppose que les p-sous-groupes de H sont nilpotents pour tout $p \in \mathcal{P}$. Alors $C \cap A$ est définissable et connexe.*

Preuve. – C est nilpotent d'après la proposition 3.7.5, et $d(C)$ est aussi nilpotent d'après le fait 1.3.15. Par condition de normalisateur dans $d(C) \cap H$, on a $C = d(C) \cap H$ et $C \cap A = d(C) \cap A$, en particulier $C \cap A$ est définissable. Montrons, par induction sur le rang et le degré de G, que $C \cap A$ est connexe. On peut supposer $G = d(H)$ et $A \neq 1$. En particulier A contient un sous-groupe H-minimal B. CB/B étant un sous-groupe de Carter de H/B d'après le théorème 3.6.6 (*ii*), $(C \cap A)B$ est connexe par hypothèse d'induction. Or $(C \cap A)B/B$ et $(C \cap A)/(C \cap B)$ sont définissablement isomorphes. Donc il suffit de montrer que $C \cap B$ est connexe. Si $G \neq d(C)B$, l'hypothèse d'induction dit que, comme C est un sous-groupe de Carter de CB, $C \cap B$ est connexe. On peut donc supposer $G = d(C)B$. En particulier on a $H = B(H \cap d(C)) = BC$. Si $C \cap B$ est infini, $Z(C) \cap B$ aussi et, comme B est abélien, $C_B(H)$ est infini. Par H-minimalité de B on obtient $B = C_B(H) \leq Z(H) \leq C$ et $H = C$. Ainsi on peut supposer $C \cap B$ fini. Alors il existe un plus petit entier k et $x \in Z_k(C)$ tel que $C_B(x)$ soit un sous-groupe propre de B. Comme x centralise $C/C_C(B)$, $C_B(x)$ est normalisé par C, donc par $G(= d(C)B)$. Par H-minimalité de B, $C_B(x)$ est fini. Le lemme 3.7.13 donne $C_B(x) = 1$ et $C \cap B = 1$. □

3.8 Retour aux centralisateurs généralisés

Au chapitre 2, nous avons étudié les centralisateurs généralisés des groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles. En particulier, nous avons montré que les centralisateurs généralisés des sous-groupes nilpotents des groupe de rang de Morley fini connexes et résolubles sont des sous-groupes définissables et connexes (corollaire 2.4.5). Nous donnons des informations sur les centralisateurs généralisés des sections localement closes. Comme, en général, un centralisateur généralisé n'est même pas un sous-groupe (exemple 2.4.2), nous restreignons l'étude aux sections (localement nilpotentes)-par-abéliennes. Le fait 2.4.3 dit que, dans ce cas, les centralisateurs généralisés sont des sous-groupes. Nous montrons qu'un centralisateur généralisé d'une section localement close et (localement nilpotente)-par-abélienne est une section localement close (proposition 3.8.1). On en déduit un analogue de la proposition 2.6.1 (corollaire 3.8.2). Les preuves de ces résultats utilisent le théorème 3.6.6 sur les sous-groupes de Carter dans les sections localement closes résolubles.

Proposition 3.8.1. – *Soient H/K une section localement close et (localement nilpotente)-par-abélienne et X/K une partie de H/K. Alors $E_{H/K}(X/K)$ est une section localement close de H/K.*

Preuve. – Le corollaire 3.4.12 montre que H/K est résoluble et, aussi, il permet de supposer $d(H)$ résoluble. On peut supposer qu'il existe $x \in H$ tel que, si $\overline{x}$ est la classe de x modulo K, $X/K = \overline{x}$. On note $E/K = E_{H/K}(\overline{x})$. Comme il suffit de montrer que $E \cap H^+$ est localement clos, on peut supposer $H = H^+ d_{loc}(x)$. Le fait 2.4.3 dit que E/K est un sous-groupe de H/K. On prouve la proposition par induction sur le rang de H^+. On peut supposer $K^- = 1$. On peut aussi supposer H/K non localement fini. En particulier, H^+ contient un sous-groupe H-minimal A. Si on note $\tilde{x}$ la classe de x modulo AK, l'hypothèse d'induction montre que $E_{H/AK}(\tilde{x})$ est une section localement close de H. Donc on peut supposer $H/AK = E_{H/AK}(\tilde{x})$. Comme $K^- = 1$, le fait 1.2.6 montre que H^+ centralise K. On en déduit que $H'K \cap H^+$ est localement nilpotent, et le corollaire 2.4.5 dit que $H'K \cap H^+$ est nilpotent. Alors $H'K \cap H^+$ est contenu dans $F(H^+)$ et $H'K \cap H^+$ centralise A. Comme on a $H = H^+ d_{loc}(x)$, $H'K/K$ est contenu dans H^+K/K et $H'K/K$ centralise AK/K.

Le corollaire 3.1.12 donne l'existence d'un unique plus grand sous-groupe localement clos normal de H contenu dans E. Quitte à quotienter H par ce sous-groupe, on peut supposer ce sous-groupe égal à K. Soit $U = H'Kd_{loc}(x)$. D'après les lemmes 3.1.11 et 3.1.25, U est un sous-groupe localement clos de H. Soit C/K un sous-groupe localement nilpotent maximal de U/K contenant $\overline{x}$. Montrons que $C/K \cap H'K/K = 1$. D'après le corollaire 3.3.2, C est localement clos. En particulier, C contient $d_{loc}(x)$, et on a $U/K = H'C/K$. Par le lemme 3.6.5, C/K est un sous-groupe de Carter de U/K. Par conjugaison des sous-groupes de Carter de U/K (théorème 3.6.6 (i)) et par l'argument de Frattini, on obtient $H = H'N_H(C)$. Comme $H/AK = E_{H/AK}(\tilde{x})$ et comme H/K est résoluble, le fait 1.3.10 (ii) donne $\tilde{x} \in HP(H/AK)$. Mais le corollaire 3.3.3 dit que $HP(H/AK)$ est une section localement close de H. Donc $d_{loc}(x)AK/AK$ est contenu dans $HP(H/AK)$. Comme $H'AK/AK$ est localement nilpotent, on a aussi $H'AK/AK \leq HP(H/AK)$. Donc $H'd_{loc}(x)AK/AK$ est localement nilpotent et le théorème 3.6.6 (ii) donne $H'd_{loc}(x)AK/AK = CA/AK$. Comme $H = H'N_H(C)$, on obtient $H = AN_H(C)$. Mais $(C \cap H'K)/K$ est un sous-groupe localement clos normal de $N_H(C)/K$ et $(C \cap H'K)/K$ centralise AK/K. Donc $(C \cap H'K)/K$ est normal dans H/K. Alors $C \cap H'K$ est un sous-groupe localement clos de H contenu dans E et, comme on a supposé que K est l'unique plus grand sous-groupe localement clos normal de H contenu dans E, on obtient $C/K \cap H'K/K = 1$.

Montrons $C_{H'K/K}(\overline{x}) = 1$. Supposons qu'il existe $\overline{y} \in C_{H'K/K}(\overline{x}) \setminus \{1\}$. Alors $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ est abélien et $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ est contenu dans un sous-groupe localement nilpotent maximal C_1/K de U/K. Puisque C/K est un sous-groupe localement nilpotent maximal quelconque de U/K contenant $\overline{x}$, on peut supposer $C_1/K = C/K$. Ceci contredit $C/K \cap H'K/K = 1$.

Montrons que $H/K = H'K/K \rtimes C_{H/K}(\overline{x})$. Comme $C/K \cap H'K/K = 1$, $N_{H'K/K}(C/K)$ centralise C/K et, donc, on a $N_{H'K/K}(C/K) \leq C_{H'K/K}(\overline{x}) = 1$. Comme $H = H'N_H(C)$, on en déduit $H/K = H'K/K \rtimes N_H(C)/K$. Alors $N_H(C)/K$ est abélien et $N_H(C)/K = C_{H/K}(C/K)$. Comme $C_{H/K}(C/K) \leq C_{H/K}(\overline{x})$ et comme $C_{H'K/K}(\overline{x}) = 1$, on a bien $H/K = H'K/K \rtimes C_{H/K}(\overline{x})$.

Supposons $E/K \cap H'K/K \neq 1$. Alors il existe $\overline{z} \in H'K/K \setminus \{1\}$ et un plus petit entier n tel que $[\overline{z},_n \overline{x}] = 1$. Comme $\overline{z} \neq 1$, on a $n \neq 0$. Donc, par minimalité de n, $[\overline{z},_{n-1} \overline{x}]$ est un élément non trivial de $H'K/K$ centralisé par $\overline{x}$, ce qui est contradictoire. On a montré $E/K \cap H'K/K = 1$. Comme $C_{H/K}(\overline{x})$ est contenu dans E/K et comme $H/K = H'K/K \rtimes C_{H/K}(\overline{x})$, on obtient $E/K = C_{H/K}(\overline{x})$ et, d'après la proposition 3.1.33, E est localement clos. □

Corollaire 3.8.2. – *Soient H/K une section localement close et (localement nilpotente)-par-abélienne, N/K un sous-groupe localement nilpotent de H/K et A un sous-groupe localement clos normal de H contenant K. Si on note $E/K = E_{H/K}(N/K)$, alors $E_{H/A}(NA/A) =$*

EA/A. Réciproquement, si M/A est un sous-groupe localement nilpotent de H/A alors, pour tout sous-groupe de Carter D/K de $d_{loc}(M)/K$, si on note $F/K = E_{H/K}(D/K)$, $FA/A = E_{H/A}(M/A)$.

Preuve. – Montrons $E_{H/A}(NA/A) = EA/A$. Comme H/K est résoluble d'après le corollaire 3.4.12, il suffit de montrer l'égalité lorsque A/K est abélien. Comme EA/A est contenu dans $E_{H/A}(NA/A)$ et comme $E_{H/A}(NA/A)$ est une section localement close d'après la proposition 3.8.1, on peut supposer $H/A = E_{H/A}(NA/A)$. Soient $U/A = HP(H/A)$ et $C/K = HP(E/K \cap U/K)$. Montrons que C/K est un sous-groupe de Carter de $H'C/K$ et de $AU'C/K$. Le fait 1.3.10 (*ii*) donne $NA/A \leq U/A$ et $N/K \leq HP(E/K)$, d'où $N/K \leq C/K$. Soit C_1/K un sous-groupe localement nilpotent de U/K contenant C/K. Alors C_1/K est contenu dans E/K puisque $N/K \leq C_1/K$. Comme H/K est un groupe (localement nilpotent)-par-abélien, $(E \cap U)/C$ est abélien et C_1/K est normal dans $(E \cap U)/K$. Donc, par définition de C/K, C_1/K est contenu dans C/K et on en déduit que C/K est un sous-groupe localement nilpotent maximal de U/K. Comme U contient H' et comme $H'K/K$ et AU'/K sont localement nilpotents, le lemme 3.6.5 dit que C/K est un sous-groupe de Carter de $H'C/K$ et de $AU'C/K$.

Montrons que $H = AE$. Comme U/A et $AU'C/A$ sont localement nilpotents, le théorème 3.6.6 (*ii*) donne $AU'C = AC$. Comme C/K est un sous-groupe de Carter de $H'C/K$, le théorème 3.6.6 (*i*) et l'argument de Frattini montrent que $H = H'N_H(C)$ et $U = U'N_U(C)$. Comme C/K est localement nilpotent, $N_H(C)/K$ est contenu dans $E_{H/K}(C/K)$ et, comme $N/K \leq C/K$, $E_{H/K}(C/K)$ est contenu dans E/K. On en déduit $H = H'E$ et $U \leq U'E$. Comme U contient H' puisque H/K est (localement nilpotent)-par-abélien, on obtient $H = U'E$. Alors, comme $AU'C = AC$, on a $H = AE$.

Nous montrons la réciproque. Soient D/K un sous-groupe de Carter de $d_{loc}(M)/K$ (D/K existe d'après le théorème 3.6.6 (*i*)) et $F/K = E_{H/K}(D/K)$. Montrons que $FA/A = E_{H/A}(M/A)$. La proposition 3.3.1 dit que $d_{loc}(M)/A$ est localement nilpotent. Le théorème 3.6.6 (*ii*) donne $d_{loc}(M) = AD$. La première partie du corollaire appliquée à $d_{loc}(M)/K$ donne $E_{H/A}(d_{loc}(M)/A) = FA/A$. Soit $V/A = HP(E_{H/A}(M/A))$. Alors $E_{H/A}(M/A)$ est contenu dans $E_{H/A}(V/A)$. La proposition 3.8.1 et le corollaire 3.3.3 montrent que V est localement clos. Donc V contient $d_{loc}(M)$ et on a $E_{H/A}(V/A) \leq E_{H/A}(d_{loc}(M)/A) \leq E_{H/A}(M/A)$. On en déduit $E_{H/A}(d_{loc}(M)/A) = E_{H/A}(M/A)$, ce qui prouve le corollaire. □

On obtient aussi le corollaire suivant concernant les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles :

Corollaire 3.8.3. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, N un sous-groupe normal (pas nécessairement localement clos) de G et U/N un sous-groupe localement nilpotent de G/N. Alors, si C est un sous-groupe de Carter de $d_{loc}(U)$, $E_G(C)N/N = E_{G/N}(U/N)$.*

Preuve. – On fait la preuve par induction sur le rang de G. Soit E le sous-groupe qui vérifie $E/N = E_{G/N}(U/N)$. Si N est central dans G, U est localement nilpotent et $E_{G/N}(U/N) = E_G(U)/N$. Le corollaire 2.4.5 donne $E_G(U) = E_G(d(U))$ et dit que $d(U)$ est nilpotent. Comme on a $U \leq d_{loc}(U) \leq d(U)$, $d_{loc}(U)$ est nilpotent et on obtient $E_G(U) = E_G(d_{loc}(U))$. Donc $d_{loc}(U)$ est l'unique sous-groupe de Carter de $d_{loc}(U)$ et on a $E_G(d_{loc}(U))/N = E_{G/N}(U/N)$.

On peut donc supposer N non central dans G. D'après le fait 1.2.13, N contient un sous-groupe G-minimal A. Soit C un sous-groupe de Carter de $d_{loc}(U)$ (C existe d'après le théorème 3.6.6 (*i*)). Comme CA/A est un sous-groupe de Carter de $d_{loc}(U)A/A$ d'après le théorème 3.6.6 (*ii*), l'hypothèse d'induction permet de supposer $N = A$. Le corollaire 3.8.2 donne $E_G(C)N/N = E_{G/N}(U/N)$. □

3.9 Les 2-Sous-groupes de Sylow

Nous allons montrer la conjugaison des 2-sous-groupes de Sylow dans les sections localement closes des groupes de rang de Morley fini (proposition 3.9.7). La conjugaison des 2-sous-groupes de Sylow des groupes de rang de Morley fini a été démontrée par A. V. Borovik et B. Poizat dans [14]. Il s'agit d'un résultat fondamental pour l'étude des groupes simples de rang de Morley fini. Ce résultat a ensuite été généralisé par B. Poizat et F. O. Wagner (cf. faits 3.9.4 et 3.9.6). Le résultat de conjugaison obtenu ici se déduit des résultats de B. Poizat et F. O. Wagner. Ensuite nous montrerons que le normalisateur d'un 2-sous-groupe de Sylow d'une section localement close est une section localement close.

Fait 3.9.1. – **([14], Borovik, Poizat)** *Les 2-sous-groupes d'un groupe de rang de Morley fini sont localement finis.*

Définition 3.9.2. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G.*

Un sous-groupe A de H est dit relativement définissable *si A est l'intersection de H avec un sous-groupe définissable de G.*

Une section A/B de H est relativement définissable *si A et B sont relativement définissables.*

Un sous-groupe H d'un groupe de rang de Morley fini a la propriété ABD *si toutes ses sections A relativement définissables et abéliennes se décomposent en une somme directe d'un groupe divisible D et d'un groupe d'exposant borné B.*

Lemme 3.9.3. – *Si H est un sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini G et si H possède un sous-groupe définissable et normal U tel que H/U soit un p-groupe localement fini, alors H est ABD.*

Preuve. – Par induction sur le rang et le degré de G. On peut supposer $G = d(H)$. Soit L/M une section relativement définissable et abélienne de H. Montrons que L/M se décomposent en une somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe d'exposant borné. Comme $L = d(L) \cap H$ puisque L est relativement définissable dans H, $L \cap U$ est un sous-groupe définissable et normal de L, et $L/(L \cap U) \cong LU/U$ est un p-groupe localement fini. De plus, L/M est une section relativement définissable et abélienne de L. Donc l'hypothèse d'induction permet de supposer $G = d(L)$. Alors on a $L = d(L) \cap H = H$. Comme $M = d(M) \cap H$ puisque M est relativement définissable dans H, $U \cap M$ est définissable. Donc, quitte à quotienter G par $U \cap M$, on peut supposer $U \cap M = 1$. En particulier, M est un p-groupe localement fini et U est abélien.

Soit S un p-sous-groupe de Sylow de H. Alors S contient M et on a $[S, H] \leq M \leq S$ puisque H/M est abélien. Donc S est normal dans H et S est l'unique p-sous-groupe de Sylow de H. Le lemme 3.2.2 donne $H = US$. Le fait 1.4.7 *i*) dit que S° est produit central d'un groupe nilpotent B d'exposant borné et d'un p-tore T. Soit D/M le plus grand sous-groupe divisible de H/M. Alors D contient T. Le fait 3.5.15 dit qu'il existe un complément R/M de D/M dans H/M. Il faut montrer que R/M est d'exposant borné.

Le fait 1.3.13 montre que $U = D_1 * B_1$ pour deux sous-groupes définissables D_1 et B_1 avec D_1 divisible et B_1 d'exposant borné. Alors D_1M/M est contenu dans D/M et on a $DU = DB_1$. En particulier, DU/D est d'exposant borné. Comme $H = US$ et comme $T \leq D$, H/DU est d'exposant borné. On en déduit que H/D est d'exposant borné, ce qui prouve que R/M est d'exposant borné. □

Dans [67], [68] et [80], les faits 3.9.4 et 3.9.6 sont énoncés pour les groupes *sous-stables* (ie. les sous-groupes des groupes stables).

Fait 3.9.4. – **([80], th. 1.5.4 p.99 ; [68], Poizat, Wagner)** *Soient H un sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini et p un entier premier.*

1. *Si $p = 2$, et H est ABD, ou*

2. *si H est résoluble-par-fini et ABD, ou*
3. *si $p = 2$ et H est de torsion, ou*
4. *si toute paire de p-éléments de H engendre un sous-groupe fini,*

alors les p-sous-groupes maximaux de H sont conjugués.

Lemme 3.9.5. – *Si H est un sous-groupe localement clos d'un groupe de rang de Morley fini G, alors les 2-sous-groupes de Sylow de H sont conjugués.*

Preuve. – On peut supposer $G = d(H)$. Soient S_1 et S_2 deux 2-sous-groupes de Sylow de H. Alors il existe des 2-sous-groupes de Sylow R_1/H^+ et R_2/H^+ de H/H^+ qui contiennent S_1H^+/H^+ et S_2H^+/H^+ respectivement. Le fait 3.9.4.3 appliqué au sous-groupe H/H^+ de G/H^+ montre que R_1/H^+ et R_2/H^+ sont conjugués dans H. Donc on peut supposer $R_1 = R_2$. Mais le fait 3.9.1 et le lemme 3.9.3 disent que R_1 est ABD. Donc le fait 3.9.4.1 donne le résultat. □

Fait 3.9.6. – **([80], cor. 1.5.5 p.102 ; [67], Poizat, Wagner)** *Soient p un entier premier et H un sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini qui satisfait les hypothèses 1., 2. ou 3. du fait 3.9.4. Si N est un sous-groupe normal et relativement définissable de H, alors les p-sous-groupes de Sylow de H/N sont les images des p-sous-groupes de Sylow de H.*

Proposition 3.9.7. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H un sous-groupe localement clos de G, K un sous-groupe normal et localement clos de H et S un 2-sous-groupe de Sylow de H. Alors SK/K est un 2-sous-groupe de Sylow de H/K et tous les 2-sous-groupes de Sylow de H/K sont de cette forme. En particulier, les 2-sous-groupes de Sylow de H/K sont conjugués.*

Preuve. – Par induction sur le rang et le degré de G. On peut supposer $G = d(H)$. Il suffit de montrer que tous les 2-sous-groupes de Sylow de H/K sont conjugués à SK/K. Soit R/K un 2-sous-groupe de Sylow de H/K.

Supposons d'abord $K^- \neq 1$. Comme H/K^- et K/K^- sont des sous-groupes localement clos de G/K^-, nous pouvons appliquer l'hypothèse d'induction à $(H/K^-)/(K/K^-)$. Alors il existe un 2-sous-groupe de Sylow R_0/K^- de H/K^- tel que $(R/K^-)/(K/K^-) = (R_0/K^-)(K/K^-)/(K/K^-)$. Soit R_1/K^- un 2-sous-groupe de Sylow de H/K^- contenant SK^-/K^-. Alors R_1/K^- est un 2-sous-groupe de G/K^- et R_1/K^- est un 2-groupe localement fini d'après le fait 3.9.1. Le lemme 3.9.3 montre que R_1 est ABD. Le fait 3.9.6 donne $R_1 = SK^-$. Le fait 3.9.4.3 dit que R_0/K^- et R_1/K^- sont conjugués. Comme $R = R_0K$ et comme $R_1 = SK^-$, nous obtenons la conjugaison de R/K et de SK/K.

Nous pouvons donc supposer $K^- = 1$. Alors K est localement fini et R est de torsion. Le corollaire 3.4.11 dit qu'il existe un sous-groupe U de H tel que $R = UK$ et tel que $U \cap K$ soit localement nilpotent. Montrons que U est résoluble. Le corollaire 3.4.4 dit que $U \cap K$ est résoluble. Le fait 1.3.15 montre que $d(U \cap K)$ est aussi résoluble. Mais $Ud(U \cap K)/d(U \cap K)$ est un 2-sous-groupe de $d(U)/d(U \cap K)$. Donc le fait 3.9.1 dit que $Ud(U \cap K)/d(U \cap K)$ est localement fini. En particulier, $Ud(U \cap K)/d(U \cap K)$ est localement résoluble et, comme $d(U \cap K)$ est résoluble, U est localement résoluble. Le corollaire 3.4.4 montre que U est résoluble.

Montrons que SK/K et R/K sont conjugués. Soient S_0 un 2-sous-groupe de Sylow de U et S_1 un 2-sous-groupe de Sylow de H contenant S_0. Comme U est résoluble et comme $U/(U \cap K)$ est un 2-groupe, le fait 1.6.3 donne $U = S_0(U \cap K)$. Ainsi on obtient $R = S_0K$. Alors S_1K/K est un 2-sous-groupe de H/K contenant R/K. Donc $R = S_1K$ puisque R/K est un 2-sous-groupe de Sylow de H/K. Comme S_1 est conjugué à S d'après le lemme 3.9.5, SK/K et R/K sont conjugués. □

On va maintenant montrer que le normalisateur d'un 2-sous-groupe de Sylow d'une section localement close est localement clos.

Proposition 3.9.8. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H/K une section localement close de G, L/K une section normale et localement close de H/K et R/K un 2-sous-groupe de Sylow de L/K. Alors $N_{H/K}(R/K)$ est une section localement close de H.*

Preuve. – On fait la preuve par induction sur le rang et le degré de G. D'après la proposition 3.9.7, il existe un 2-sous-groupe de Sylow S de L tel que $R = SK$. Par l'argument de Frattini on a $N_H(R) = KN_H(S)$. Donc il suffit de montrer que $N_H(S)$ est localement clos. Par hypothèse d'induction, on peut supposer que G normalise $d(S)$. Soit B le 2-sous-groupe définissable et connexe maximal de $d(S)$. Alors G normalise B. Comme B est un 2-groupe, SB/B est un 2-sous-groupe de Sylow de LB/B. Alors, si on a $B \neq 1$, l'hypothèse d'induction appliquée au sous-groupe localement clos HB/B de G/B montre que $N_{HB/B}(SB/B)$ est localement clos et $N_H(SB)$ aussi. Ainsi, comme on a $N_H(SB) = N_H(SB \cap H) = N_H(S)$, $N_H(S)$ est localement clos. On peut donc supposer $B = 1$. En particulier, les faits 3.9.1 et 1.4.7 *i)* disent que S° est abélien et divisible.

Soit N_0 une partie finie de $N_H(S)$. Montrons que $d(N_0)$ normalise S. D'après le fait 3.1.32, il existe une partie finie N_1 de $\langle N_0\rangle$ telle que $\langle N_1\rangle = \langle N_0\rangle^\circ$, en particulier $d(N_1) = d(N_0)^\circ$. Or $d(N_0) = d(N_0)^\circ\langle N_0\rangle = d(N_1)\langle N_0\rangle$, donc il suffit de montrer que $d(N_1)$ normalise S. $d(S^\circ)$ est abélien et divisible puisque S° l'est. Donc $d(S^\circ)$ contient un unique 2-sous-groupe de Sylow T. Or N_1 normalise S, donc $d(N_1)$ normalise $d(S^\circ)(= d(S)^\circ)$ et, ainsi, $d(N_1)$ normalise T. Mais T est un 2-tore puisque $d(S^\circ)$ est divisible. Donc, comme $d(N_1)$ est connexe, le fait 1.4.6 montre que $d(N_1)$ centralise T. En particulier $d(N_1)$ centralise S°. Or $d(S)/d(S^\circ)$ est fini et normalisé par $d(N_1)$, et $d(S)/d(S^\circ)$ est centralisé par $d(N_1)$ puisque $d(N_1)$ est connexe. Pour tout $s \in S$ on note

$$\begin{array}{rccc} ad_s : & \langle N_1\rangle & \longrightarrow & S^\circ \\ & u & \longmapsto & [u,s] \end{array}$$

Alors, pour tout $s \in S$, ad_s est un homomorphisme de groupes. Ceci montre que $ad_s(\langle N_1\rangle)$ est un sous-groupe finiment engendré de S°, donc fini, pour tout $s \in S$. Soit S_1 un sous-groupe fini de S tel que $S = S_1S^\circ$. Ce qui précède montre que $[\langle N_1\rangle, S_1]$ est un sous-groupe fini de S° et, comme S° est centralisé par $d(N_1)$, $[\langle N_1\rangle, S]$ est un sous-groupe fini de S°. Alors le fait 1.2.11 donne $[d(N_1), d(S)] = [\langle N_1\rangle, S] \leq S^\circ$. En particulier $d(N_1)$ normalise S et on a fini la preuve de la proposition. □

Chapitre 4

Sous-groupes de Hall

Nous généralisons la notion de sous-groupe de Hall aux éléments d'ordre infini. Une motivation pour cela est qu'il y a une façon naturelle de regrouper les éléments d'ordre finis entre eux, notamment leur ordre, tandis que cela n'est plus possible pour un élément d'ordre infini. Par contre, dans certaines classes de groupes, il y a des notions ou des propriétés particulières qui permettent de telles distinctions (par exemple la semi-simplicité et l'unipotence dans les groupes algébriques). Nous essayons d'introduire des notions qui permettent de tels regroupements dans les groupes de rang de Morley fini. Nous allons traiter les sous-groupes de Hall en considérant, en quelque sorte, ∞ comme un entier premier, et nous obtenons deux généralisations de la notion de sous-groupe de Hall (définitions 4.1.1 et 4.4.5). Le résultat principal de la théorie "classique" (la conjugaison des sous-groupes de Hall, fait 1.4.11 et théorème 3.2.5) est conservé pour les sous-groupes de Hall "généralisés" (théorème 4.1.18), ainsi que pour les sous-groupes couvrants de Hall (théorème 4.4.9). Signalons que ces études se font dans le contexte des sections localement closes.

4.1 Sous-groupes de Hall généralisés

L'étude des sous-groupes de Hall généralisés nécessite l'usage de techniques très différentes de celles employées pour prouver le fait 1.4.11 et le théorème 3.2.5. En effet, les preuves de ces deux résultats sont basées sur une généralisation d'un théorème de Schur-Zassenhaus (fait 1.4.10). Ici les notions de *radical quasiunipotent* (définition 2.7.4) et de *sous-groupes de Carter* (définition 1.5.7) ont un rôle essentiel. De plus l'utilisation de *centralisateurs généralisés* (définition 2.4.1) est nécessaire pour prouver la proposition 4.1.17 qui constitue le point critique de la preuve du théorème principal de cette section (théorème 4.1.18). Ces techniques permettent aussi de nouvelles connaissances sur les sous-groupes de Hall "classiques", notamment la proposition 4.1.17 qui donne un lien important entre les sous-groupes de Carter et les sous-groupes de Hall et la proposition 4.1.22 qui détermine la structure des sous-groupes de Hall des groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles.

Dans la suite un élément x d'un groupe sera dit d'ordre ∞ si x n'est pas d'ordre fini. Par contre, cela ne veut pas dire que x soit un ∞-élément (définitions 4.1.1.a et 4.1.1.a'). On notera $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{\infty\}$ et, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, on notera $\pi^\perp = \mathcal{P}^+ \setminus \pi$ et $\pi' = \mathcal{P} \setminus \pi$.

Dans toute cette section G désigne un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G et π un sous-ensemble de $\mathcal{P}^+$.

A partir de maintenant, certains résultats de base concernant les sections localement closes ne seront plus systématiquement cités lorsqu'ils seront utilisés. Cette remarque concerne les résultats allant du lemme 3.1.5 au corollaire 3.1.17.

4.1.1 Résultats préliminaires

Définition 4.1.1. – *Soient R/K un sous-groupe de H/K, x un élément de H et $\overline{x}$ sa classe modulo K. Alors :*

a) $\overline{x}$ est un π-élément si, pour tout $p \in \pi^{\perp}$, $d(x)K/K$ est sans élément d'ordre p ;

b) R/K est un π-sous-groupe de H/K si tous les éléments de R/K sont des π-éléments ;

c) on dit que R/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K si R/K est un π-sous-groupe maximal de H/K.

De plus, si $p \in \mathcal{P}^{+}$, alors :

a') $\overline{x}$ est un p-élément si $\overline{x}$ est un $\{p\}$-élément ;

b') R/K est un p-sous-groupe de H/K si R/K est un $\{p\}$-sous-groupe de H/K ;

c') R/K est un p-sous-groupe de Sylow de H/K si R/K est un p-sous-groupe maximal de H/K.

On remarque que, si $\infty \notin \pi$ et si $K = 1$, ces définitions correspondent aux définitions classiques.

Remarque 4.1.2. – La définition *a*) a un sens puisque, si k est un élément de K alors, par le lemme 3.1.11, $d(xk) \leq d_{loc}(xK) \leq d(x)K$. Or $d(x)K/K$ n'a pas d'élément d'ordre p donc $d(xk)K/K$ non plus.

Remarque 4.1.3. – Soient A un sous-groupe normal et définissable de H contenu dans K et $x \in H$. On note $\overline{x}$ l'image homomorphique de x dans $d(H)/A$. Alors on a $d(\overline{x})(K/A)/(K/A) \cong d(x)K/K$. Donc xK est un π-élément de H/K si et seulement si $\overline{x}(K/A)$ est un π-élément de $(H/A)/(K/A)$.

Remarque 4.1.4. – Soient $x \in H$ et $\overline{x}$ sa classe modulo K. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\overline{x}$ est un π-élément ;

(ii) $d(x)K/K$ est un π-groupe ;

(iii) $d(x)^{\circ}K/K$ est un π-groupe et $d(x)K = (d(x)^{\circ}S)K$ où S est le $\pi \setminus \{\infty\}$-sous-groupe de Hall de $d(x)$.

Pour $p \in \mathcal{P}$, un p-sous-groupe d'une section localement close résoluble H/K est localement nilpotent. Par contre, l'exemple 1.1.4 montre, qu'en présence d'un *mauvais corps* (définition 1.1.3), il peut exister des ∞-groupes non nilpotents.

Lemme 4.1.5. – *Soient H_2/K un π-sous-groupe de H/K et H_1/K un π-sous-groupe normal de H/K avec H_1 localement clos. Alors H_1H_2/K est un π-sous-groupe de H/K.*

Preuve. – Si $\infty \notin \pi$ le fait est connu, donc on peut supposer $\infty \in \pi$. Soient $h \in H_1H_2$, $p \in \pi^{\perp}$, $u \in d(h)$ et $\overline{u}$ sa classe modulo K. Supposons $\overline{u}$ d'ordre p. Il existe $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$ tels que $h = h_1h_2$. Alors $d(h)$ est contenu dans $H_1d(h_2)$ d'après le lemme 3.1.11. Ainsi il existe $u_1 \in H_1$ et $u_2 \in d(h_2)$ tels que $u = u_1u_2$. Comme $\overline{u}$ est d'ordre p, u n'appartient pas à H_1 et u_2 non plus. On note $\overline{u_2}$ la classe de u_2 modulo K. Alors $1 = \overline{u}^p \in (H_1/K)\overline{u_2}^p$ et $u_2^p \in H_1$. Donc $d(h_2)/(H_1 \cap d(h_2))$ a un élément d'ordre p et, d'après le lemme 3.2.2, $d(h_2)K/K$ aussi. Ceci contredit le fait que H_2/K soit un π-groupe. On en déduit que $\overline{u}$ n'est pas d'ordre p et que H_1H_2/K est un π-sous-groupe. □

Définition 4.1.6. – *On désigne par $\mathcal{O}_{\pi}(H/K)$ le sous-groupe de H/K engendré par les π-sous-groupes normaux de H/K et $\mathcal{O}_{\pi}^{loc}(H/K)$ le sous-groupe de H/K engendré par les π-sous-groupes normaux A/K de H/K tel que A soit localement clos.*

Corollaire 4.1.7. – *$\mathcal{O}_{\pi}^{loc}(H/K)$ est un π-sous-groupe de H/K et $\mathcal{O}_{\pi}^{loc}(H/K)$ est une section localement close de G.*

Preuve. – Notons $\mathcal{O}/K = \mathcal{O}_\pi^{loc}(H/K)$. D'après le lemme 3.1.11, $\mathcal{O}$ est localement clos et le lemme 4.1.5 dit que $\mathcal{O}_\pi^{loc}(H/K)$ est un π-sous-groupe de H/K. $\square$

A priori, il n'y a aucune raison pour que $\mathcal{O}_\pi(H/K)$ soit un π-groupe. Mais nous verrons plus loin (corollaire 4.1.26) que $\mathcal{O}_\pi(H/K)$ et $\mathcal{O}_\pi^{loc}(H/K)$ sont égaux.

Lemme 4.1.8. – *Soient R/K un π-sous-groupe de H/K et A/K un sous-groupe normal de H/K avec A localement clos. Alors RA/A est un π-sous-groupe de H/A.*

Preuve. – Si $\infty \notin \pi$, il n'y a rien à faire, donc on peut supposer $\infty \in \pi$. Soient $p \in \pi^\perp$, $x \in R$ et $\overline{x}$ sa classe modulo A. Alors xK est un π-élément et $d(x)K/K$ n'a pas de p-élément non trivial. Par le lemme 3.2.2, $d(x)/(d(x) \cap A) \cong d(x)A/A$ non plus. On en déduit que $\overline{x}$ est un π-élément et que RA/A est un π-sous-groupe de H/A. $\square$

Lemme 4.1.9. – *Soient U/K un sous-groupe de H/K et V un sous-groupe localement clos et normal de H qui contient K. Alors U/K est un π-sous-groupe si et seulement si U/V et V/K sont des π-groupes.*

Preuve. – Si $\infty \notin \pi$, il n'y a rien à faire, donc on peut supposer $\infty \in \pi$. Supposons que U/K soit un π-sous-groupe. Alors V/K aussi et le lemme 4.1.8 dit que U/V est un π-groupe.

Réciproquement, supposons que U/V et V/K soient des π-groupes. Soient $p \in \pi^\perp$, $x \in U$ et $\overline{x}$ sa classe modulo V. Alors $\overline{x}$ est un π-élément, donc $d(x)V/V \cong d(x)/(d(x) \cap V)$ n'a pas de p-élément non trivial. Ainsi, si $d(x)$ a un p-élément u, on a $u \in d(x) \cap V$. Mais V/K est un π-sous-groupe, donc $u \in K$ et $d(x)K/K$ est sans élément d'ordre p (lemme 3.2.2). Ainsi, xK est un π-élément de U/K. Ceci prouve que U/K est un π-sous-groupe de H/K. $\square$

Lemme 4.1.10. – *Soient L/K un sous-groupe de H/K et A/K un π-sous-groupe normal de H/K avec A localement clos. Alors L/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K si et seulement si A est contenu dans L et L/A est un π-sous-groupe de Hall de H/A.*

Preuve. – Si $\infty \notin \pi$, il n'y a rien à faire, donc on peut supposer $\infty \in \pi$. Supposons que L/K soit un π-sous-groupe de Hall de H/K. Alors, d'après le lemme 4.1.5, AL/K est un π-sous-groupe de H/K et, par maximalité de L/K, A est contenu dans L. D'après le lemme 4.1.9, L/A est un π-sous-groupe de H/A. Soit U un sous-groupe de H qui contient strictement L. Par maximalité de L/K, U/K n'est pas un π-sous-groupe de H/K et le lemme 4.1.9 dit que U/A n'est pas un π-sous-groupe de H/A. On en déduit la maximalité de L/A.

Réciproquement, supposons que A soit contenu dans L et que L/A soit un π-sous-groupe de Hall de H/A. Alors, d'après le lemme 4.1.9, L/K est un π-sous-groupe de H/K. Soit S/K un π-sous-groupe de Hall de H/K qui contient L/K. Ce qui précède montre que S/A est un π-sous-groupe de Hall de H/A. Comme L/A est contenu dans S/A, on obtient $L = S$. $\square$

4.1.2 Les groupes localement nilpotents

Lemme 4.1.11. – *Si L est un sous-groupe localement clos de H alors, pour tout $l \in L$, lK est un π-élément de LK/K si et seulement si $l(K \cap L)$ est un π-élément de $L/(K \cap L)$.*

Preuve. – Soit $p \in \pi^\perp$. Comme on a $d(l)K/K \cong d(l)(L \cap K)/(L \cap K)$, $d(l)K/K$ possède un élément d'ordre p si et seulement si $d(l)(L \cap K)/(L \cap K)$ en possède un. $\square$

Proposition 4.1.12. – *Si H/K est localement nilpotent, $\mathcal{O}_\pi^{loc}(H/K)$ est l'unique π-sous-groupe de Hall de H/K. En particulier, on a $\mathcal{O}_\pi^{loc}(H/K) = \mathcal{O}_\pi(H/K)$.*

Preuve. – Comme il est montré dans [69], 12.1.1 p.342, les éléments d'ordre finis d'un groupe localement nilpotent forment un sous-groupe T qui est une somme directe de p-groupes pour $p \in \mathcal{P}$. De plus, T est localement fini puisque chaque partie finie de T engendre un groupe nilpotent de torsion, qui est fini d'après le fait 1.4.2. Donc, la proposition est vérifiée lorsque $\infty \notin \pi$, et on peut supposer $\infty \in \pi$. Soit R/K le $(\pi \setminus \{\infty\})$-sous-groupe de Hall de H/K. Quitte à quotienter H par K^-, la remarque 4.1.3 permet de supposer $K^- = 1$. Notons $L/K = \mathcal{O}_\pi^{loc}(H/K)$. D'après le corollaire 4.1.7, L/K est un π-sous-groupe de H/K et L est localement clos.

Supposons H définissable et divisible. D'après le fait 1.2.6 on a $[H, K] \leq K^- = 1$, donc H centralise K. Ainsi H est localement nilpotent et H est nilpotent d'après le corollaire 2.4.5. D'après le fait 1.3.13, H' est sans torsion. Mais H' est définissable, donc H' est un ∞-sous-groupe de H, en particulier c'est un π-sous-groupe de H. Soit $x \in H$ tel que xK soit un π-élément de H/K. D'après les lemmes 4.1.5 et 4.1.8, $H'd(x)K/K$ est un π-sous-groupe de H/K. Mais $H'd(x)K/K$ est un sous-groupe normal de H/K et $H'd(x)K$ est localement clos. Donc $H'd(x)K/K$ est contenu dans L/K. Ainsi, $x \in L$ et on a le résultat.

D'après la proposition 3.3.6, on a $H = H^+ * U$ où U est le sous-groupe de torsion maximal de H, et H^+ est divisible. D'après le premier cas, $\mathcal{O}_\pi^{loc}(H^+/(K \cap H^+))$ est l'unique π-sous-groupe de Hall de $H^+/(K \cap H^+)$. Soit $\mathcal{O}$ le sous-groupe de H tel que $\mathcal{O}/(K \cap H^+) = \mathcal{O}_\pi^{loc}(H^+/(K \cap H^+))$. Alors, par le lemme 4.1.11, $\mathcal{O}K/K$ est l'unique π-sous-groupe de Hall de H^+K/K. Donc $\mathcal{O}K/K$ est normal dans H/K. Comme $\mathcal{O}$ est localement clos (corollaire 4.1.7), $\mathcal{O}K/K$ est contenu dans $\mathcal{O}_\pi^{loc}(H/K)$. Soit yK un π-élément de H/K. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(y^n) = d(y)^0 (\leq H^+)$. D'après le fait 1.4.4, il existe $u \in U$ tel que $d(y) = d(y^n) \times \langle u \rangle$. Donc $d(y)K/K = (d(y^n)K/K)(\langle u \rangle K/K)$ est sans élément d'ordre p pour tout $p \in \pi^\perp$. Ainsi, uK est un π-élément de H/K et $u \in R$. Aussi y^nK est un π-élément de H^+K/K et on a $y^nK \in \mathcal{O}K/K$. On en déduit $yK \in \mathcal{O}RK/K \leq \mathcal{O}_\pi^{loc}(H/K)$, ce qui prouve la proposition. $\square$

4.1.3 Conjugaison

Nous montrons le théorème principal concernant les sous-groupes de Hall généralisés : dans une section localement close résoluble, les sous-groupes de Hall généralisés sont conjugués (théorème 4.1.18). La preuve nécessite la proposition 4.1.17. Celle-ci donne un lien entre les sous-groupes de Carter et les sous-groupes de Hall généralisés, et sa preuve utilise le centralisateur généralisé, ainsi que le radical quasiunipotent.

Définition 4.1.13. – *Pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, on note $B_\pi(G)$ le π-sous-groupe de Hall de $Q(G)$.*

Remarque 4.1.14. – La remarque 2.7.6 et le fait 2.7.3 montrent que, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $B_\pi(G) = \bigoplus_{p \in \pi} B_p(G)$, $B_\pi(G) = B_{\pi_0}(G)$ pour $\pi_0 \subseteq \pi$ fini, et $B_\pi(G)$ est quasiunipotent.

Lemme 4.1.15. – *On suppose G connexe. Pour tout sous-groupe de Carter $\overline{D}$ de $G/B_\pi(G)$, il existe un sous groupe de Carter C de G tel que $B_\pi(G)C/B_\pi(G) = B_\pi(G/B_\pi(G))\overline{D}$.*

Preuve. – Soit B le sous-groupe de G tel que $B/B_\pi(G) = B_\pi(G/B_\pi(G))$. D'après le corollaire 2.4.8 il existe un sous-groupe de Carter C de G tel que $\overline{D} = CB_\pi(G)/B_\pi(G)$. Il suffit alors de montrer que $BC = B_\pi(G)C$. Mais, d'après le lemme 4.1.9, B est un π-sous-groupe normal de G et, comme $B_\pi(G)$ est l'unique π-sous-groupe de Hall de $Q(G)$, on a $B \cap Q(G) = B_\pi(G)$. Soit c la classe de nilpotence de C. Alors la proposition 2.7.9 donne $(BC)^{c+1} \leq B \cap G' \leq B \cap Q(G) = B_\pi(G)$. Comme C est un sous-groupe de Carter de G, le théorème 2.5.1 dit que BC est définissable et connexe. Alors le corollaire 2.4.8 donne $BC = (BC)^{c+1}C \leq B_\pi(G)C$. L'inclusion inverse étant triviale, on a le résultat. $\square$

Lemme 4.1.16. – *On suppose H^+K/K nilpotent. Alors les π-sous-groupes de Hall de H/K sont conjugués dans H/K.*

Preuve. – Soit $\mathcal{O}/K = \mathcal{O}_\pi^{loc}(H^+K/K)$. D'après la proposition 4.1.12, $\mathcal{O}/K$ est l'unique π-sous-groupe de Hall de H^+K/K. Faisons la preuve par induction sur le rang de H^-.

Si $\mathcal{O}^- \neq 1$, soient R_1/K et R_2/K deux π-sous-groupes de Hall de H/K. D'après le lemme 4.1.10, R_1/K et R_2/K contiennent chacun $\mathcal{O}/K$. On en déduit que $(R_1/\mathcal{O}^-)/(K\mathcal{O}^-/\mathcal{O}^-)$ et $(R_2/\mathcal{O}^-)/(K\mathcal{O}^-/\mathcal{O}^-)$ sont deux π-sous-groupes de Hall de $(H/\mathcal{O}^-)/(K\mathcal{O}^-/\mathcal{O}^-)$, et l'hypothèse d'induction donne le résultat.

Si $\mathcal{O}^- = 1$, $\mathcal{O}$ est localement fini. Soient R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K, $r \in R$, $\overline{r}$ sa classe modulo K et d l'ordre de $d(r)/d(r)^\circ$. Alors on a $\langle r^d \rangle \leq H^+ \cap R \leq \mathcal{O}$ et $\overline{r}$ est d'ordre fini. Donc R/K est un $(\pi \setminus \{\infty\})$-sous-groupe de Hall de H/K. Le théorème 3.2.5 permet de conclure. $\square$

Proposition 4.1.17. – *Soient R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K et U un sous-groupe normal, définissable et connexe de H tel que H/U soit localement fini. Alors il existe un sous-groupe de Carter C de U tel que R normalise $B_\pi(U)CK$.*

Preuve. – On suppose que $G = d(H)$ et que H est un contrexemple avec U de rang minimal. Remarquons d'abord que U n'est pas nilpotent et $Q(U) \neq 1$ d'après la proposition 2.7.9. Notons $K_1 = (K \cap U)^-$ et $B/K_1 = B_\pi(U/K_1)$. Si $K_1 \neq 1$, l'hypothèse d'induction dit qu'il existe un sous-groupe de Carter D/K_1 de U/K_1 tel que R/K_1 normalise BDK/K_1. Or le corollaire 2.4.8 dit qu'il existe un sous-groupe de Carter C de U tel que $D/K_1 = CK_1/K_1$, donc R normalise BCK. Comme $Q(U) = B_\pi(U) \times B_{\pi^\perp}(U)$ d'après la remarque 4.1.14, $(Q(U) \cap B)/B_\pi(U)(K_1 \cap Q(U))$ est à la fois un π-groupe et un $\pi^\perp$-groupe. Donc $Q(U) \cap B$ est contenu dans $B_\pi(U)K_1$. Alors la proposition 2.7.9 donne $[U, B] \leq Q(U) \cap B \leq B_\pi(U)K_1$ et, par le corollaire 2.4.8, on a $B/B_\pi(U)K_1 \leq Z(U/B_\pi(U)K_1) \leq CB_\pi(U)K_1/B_\pi(U)K_1$. En particulier on a $BCK = B_\pi(U)CK$, ce qui est contradictoire, d'où $(K \cap U)^- = 1$.

1) $B_\pi(U) = 1$.

Si $B_\pi(U) \neq 1$, $R/KB_\pi(U)$ est un π-sous-groupe de Hall de $H/KB_\pi(U)$ (lemme 4.1.10) et, d'après la remarque 4.1.3, $(R/B_\pi(U))/(KB_\pi(U)/B_\pi(U))$ est un π-sous-groupe de Hall de $(H/B_\pi(U))/(KB_\pi(U)/B_\pi(U))$. Alors, par minimalité de U, il existe un sous-groupe de Carter $\overline{D}$ de $U/B_\pi(U)$ tel que $R/B_\pi(U)$ normalise $(B_\pi(U/B_\pi(U))\overline{D})(KB_\pi(U)/B_\pi(U))$. D'après le lemme 4.1.15 il existe un sous-groupe de Carter C de U tel que R normalise $B_\pi(U)CK$, ce qui est contradictoire.

2) R est localement fini.

Comme U est connexe, la proposition 2.7.9 dit que $(R \cap U)'$ est contenu dans $Q(U)$. La remarque 4.1.14 et *1)* donnent $(R\cap U)' \leq \bigoplus_{p\in\pi^\perp} B_p(U)$. Alors $(R\cap U)'K/K$ est un $\pi^\perp$-groupe (lemme 4.1.8), et on obtient $(R\cap U)' \leq K$. Comme $(K\cap U)^- = 1$, on a $[U, K] = 1$ d'après le fait 1.2.6. On obtient $[R\cap U, (R\cap U)'] \leq [U, K] = 1$ et $R\cap U$ est nilpotent. Soit $E = E_U(R\cap U)$. Supposons $E \neq U$. Comme $R\cap U$ est nilpotent, le corollaire 2.4.5 dit que E est un sous-groupe définissable et connexe de U. De plus, E contient $R \cap U$ et $ER/E(\cong RU/U)$ est localement fini. On a montré que ER est localement clos. Par minimalité du rang de U, il existe un sous-groupe de Carter D de E tel que R normalise $B_\pi(E)DK$. La proposition 2.7.9 montre que $[B_\pi(E), D]$ est contenu dans $Q(U) \cap B_\pi(E) \leq B_\pi(U)$. Comme $B_\pi(U) = 1$, $B_\pi(E)$ centralise D et, comme D est autonormalisant dans E, D contient $B_\pi(E)$. En particulier, R normalise DK. Mais le corollaire 2.6.2 et le théorème 2.5.1 disent que E contient un sous-groupe de Carter de U. Par conjugaison des sous-groupes de Carter de E (théorème 2.4.7), D est un sous-groupe de Carter de U. Comme ceci contredit la minimalité de U, on obtient $E = U$.

Alors $R \cap U$ est contenu dans $F(U)$ d'après le corollaire 2.4.5. Comme la proposition 4.1.12 dit que $F(U)K/K$ a un unique π-sous-groupe de Hall R_0/K et que R_0 est localement clos, le lemme 4.1.10 dit que R contient R_0 et $(R\cap U)K/K = R_0/K$. En particulier, $R\cap U$ est normal dans U et la proposition 2.7.9 donne $[R\cap U, U] \leq (R\cap U)\cap Q(U)$. Comme $B_\pi(U) = 1$, la remarque 4.1.14 dit que $Q(U)$ est un $\pi^\perp$-groupe et le lemme 4.1.8 montre que $Q(U)K/K$

est un $\pi^{\perp}$-groupe, d'où $R \cap Q(U) \leq K$. On obtient $[R \cap U, U] \leq K \cap U$. Mais $[R \cap U, U]$ est définissable et connexe (fait 1.2.6). Donc $[R\cap U, U]$ est contenu dans $(K\cap U)^- = 1$ et $R\cap U$ est contenu dans $Z(U)$. Notons $\mathcal{O}_1/(K \cap U) = \mathcal{O}_\pi^{loc}(Z(U)/(K \cap U))$, et supposons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1^- \neq 1$. Alors, par minimalité de U, il existe un sous-groupe de Carter $L/\mathcal{O}$ de $U/\mathcal{O}$ tel que $R/\mathcal{O}$ normalise $(B_\pi(U/\mathcal{O})L/\mathcal{O})(K\mathcal{O}/\mathcal{O})$. Mais on a $B_\pi(U/\mathcal{O}) \leq (R \cap U)/\mathcal{O} \leq Z(U)/\mathcal{O} \leq L/\mathcal{O}$, donc R normalise LK. Comme $\mathcal{O} \leq Z(U)$, L est un sous-groupe de Carter de U, ce qui contredit la minimalité de U. Ainsi, $\mathcal{O} = 1$ et $\mathcal{O}_1$ est localement fini. Comme on a $R\cap U \leq \mathcal{O}_1$ puisque $R \cap U \leq Z(U)$, $R \cap U$ est localement fini. Mais $R/R \cap U \cong RU/U$ est localement fini, donc R est localement fini.

3) Conclusion.

Soient C un sous-groupe de Carter de U et S un $(\pi \setminus \{\infty\})$-sous-groupe de Hall de $N_H(C)$. D'après l'argument de Frattini et le théorème 2.4.7, on a $H = Q(U)N_H(C)$. Donc $SQ(U)/Q(U)$ est un $(\pi\setminus\{\infty\})$-sous-groupe de Hall de $H/Q(U)$ (corollaire 3.2.6 (*ii*)). Comme $Q(U)$ est sans π-élément d'après *1)*, S est un $(\pi\setminus\{\infty\})$-sous-groupe de Hall de H. Le corollaire 3.2.6 (*ii*) dit que SK/K est un $(\pi \setminus \{\infty\})$-sous-groupe de Hall de H/K. R/K étant aussi un $(\pi \setminus \{\infty\})$-sous-groupe de Hall de H/K, R/K et SK/K sont conjugués d'après le théorème 3.2.5, ce qui donne une contradiction. □

Théorème 4.1.18. – *Les π-sous-groupes de Hall de H/K sont conjugués.*

Preuve. – Quitte à quotienter H par K^-, on peut supposer $K^- = 1$. En particulier H^+ centralise K. On fait la preuve par induction sur le rang de H^+. On peut donc supposer $B_\pi(H^+) = 1$. Soient R_1/K et R_2/K deux π-sous-groupes de Hall de H/K. D'après la proposition 4.1.17, il existe deux sous-groupes de Carter C_1 et C_2 de H^+ tels que R_1 et R_2 normalisent C_1K et C_2K respectivement. D'après le théorème 2.4.7, il existe $h \in H^+$ tel que $C_2^h = C_1$. Alors $N_H(C_2K)^h = N_H(C_1K)$ et R_2^h/K et R_1/K sont deux π-sous-groupes de Hall de $N_H(C_1K)/K$. Mais $N_H(C_1K)$ normalise $C_1K \cap H^+ = C_1(K \cap H^+)$ et, comme H^+ centralise K, on a $H^+ \cap K \leq N_{H^+}(C_1) = C_1$. Ainsi, $N_H(C_1K)$ normalise C_1, ce qui montre que $N_H(C_1K) = N_H(C_1)$. En particulier, $N_H(C_1K)$ est localement clos et $N_H(C_1K)^+$ est contenu dans $N_{H^+}(C_1) = C_1$. Donc $N_H(C_1K)^+$ est nilpotent. Si H^+ n'est pas nilpotent, on a $N_H(C_1K)^+ < H^+$, et l'hypothèse d'induction donne la conjugaison de R_2^h/K et R_1/K dans $N_H(C_1K)/K$. Donc on peut supposer H^+ nilpotent. Alors le lemme 4.1.16 donne le résultat. □

Corollaire 4.1.19. – *Si N/K est un sous-groupe normal de H/K et si R/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K, alors $N/K \cap R/K$ est un π-sous-groupe de Hall de N/K et tous les π-sous-groupes de Hall de N/K sont de cette forme.*

4.1.4 Structure des sous-groupes de Hall

Nous pouvons maintenant décrire la structure des sous-groupes de Hall généralisés (proposition 4.1.22). Nous en déduirons que les sous-groupes de Hall généralisés sont des sections localement closes (corollaire 4.1.24).

Lemme 4.1.20. – *On suppose G connexe. Soient p un entier premier et T un p-tore de G. Alors $T \cap F(G)$ est contenu dans $Z(G)$.*

Preuve. – On peut supposer T p-tore maximal de G. Soit S un p-sous-groupe de Sylow de G qui contient T. D'après les faits 1.4.7 et 1.4.9, S centralise T. Montrons que $T \cap F(G)$ est central dans $F(G)$. Soient U le p-sous-groupe de Sylow de $F(G)$ et C_1 le sous-groupe de torsion maximal de $F(G)$. Le fait 1.3.13 dit que $F(G)$ possède un sous-groupe définissable, connexe et divisible D tel que $F(G) = D * C_1$. Comme C_1 est la somme directe de ses

p-sous-groupes de Sylow pour $p \in \mathcal{P}$, on a $Z(U) \leq Z(C_1)$, d'où $Z(U) \leq Z(F(G))$. Le fait 1.4.12.1 donne $S \cap F(G) = U$. Comme T est central dans S, T centralise U et on obtient $T \cap F(G) \leq Z(U) \leq Z(F(G))$.

Il suffit alors de montrer $G = F(G)C_G(T)$. Le fait 1.4.11 et l'argument de Frattini appliqué à $F(G)d(S)$ donnent $G = F(G)N_G(S)$. Mais T est caractéristique dans S d'après le fait 1.4.7, donc on a $N_G(S) \leq N_G(T)$ et $G = F(G)N_G(T)$. Or $F(G)C_G(T)$ est un sous-groupe définissable de G et il est d'indice fini dans G d'après le fait 1.4.6. Comme G est connexe, on a le résultat. $\square$

Lemme 4.1.21. – *Si C désigne un sous-groupe nilpotent et définissable de H, alors C possède un unique sous-groupe D divisible et définissable tel que DK/K soit un π-groupe ($\pi \subseteq \mathcal{P}^+$) et tel que D soit maximal pour ces conditions.*

Preuve. – D'après la proposition 4.1.12, CK/K possède un unique π-sous-groupe de Hall $\mathcal{O}/K$. D'après le fait 1.3.13, $(\mathcal{O} \cap C)^-$ possède un unique sous-groupe divisible maximal D et D est définissable. Soit D_1 un sous-groupe divisible et définissable de C tel que D_1K/K soit un π-groupe. Comme $\mathcal{O}/K$ contient tous les π-éléments de CK/K, on a $D_1 \leq \mathcal{O}$. On en déduit que D_1 est un sous-groupe définissable et connexe de $\mathcal{O} \cap C$, d'où $D_1 \leq (\mathcal{O} \cap C)^-$. Comme D_1 est divisible et comme D est l'unique sous-groupe divisible maximal de $(\mathcal{O} \cap C)^-$, on obtient $D_1 \leq D$. Ceci permet de conclure. $\square$

Proposition 4.1.22. – *On suppose H définissable et connexe. Soient R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K, C un sous-groupe de Carter de H tel que R normalise $B_\pi(H)CK$, T le $(\pi \setminus \{\infty\})$-tore maximal de C et D l'unique sous-groupe de C divisible et définissable tel que DK/K soit un π-groupe et tel que D soit maximal pour ces conditions. Alors on a $R = B_\pi(H)DTK$ et $B_\pi(H) \cap T$ est fini et central dans H.*

Preuve. – Notons que l'existence de C est donnée par la proposition 4.1.17. Aussi l'existence de D est dûe au fait que C soit nilpotent (corollaire 2.4.5) et au lemme 4.1.21. Montrons l'égalité $R = B_\pi(H)DTK$ par induction sur le rang de H. On note $B = B_\pi(H)$. Le théorème 2.5.1 dit que BCK est anormal dans H. En particulier, BCK est autonormalisant dans H et R est contenu dans BCK. Le théorème 2.5.1 montre que BCK est définissable et connexe. Supposons $H \neq BCK$. Soit $B_1 = B_\pi(BCK)$. Par hypothèse d'induction, on a $R = B_1DTK$. On va montrer que B_1 est contenu dans BD. Comme B_1 contient B, on aura montré $R = BDTK$. Puisque B_1 est quasiunipotent (remarque 4.1.14), $B_1Q(H)/Q(H)$ est un sous-groupe définissable et connexe de $H/Q(H)$. Alors, comme $H/Q(H)$ est abélien et divisible (proposition 2.7.9), $B_1Q(H)/Q(H)$ est aussi divisible et, B_1 étant quasiunipotent, $B_1Q(H)/Q(H)$ est sans torsion. Alors $B_{\pi\setminus\{\infty\}}(BCK)$ est contenu dans $Q(H)$, d'où $B_{\pi\setminus\{\infty\}}(BCK) \leq B$. Si $\infty \notin \pi$, on a montré $B_1 \leq BD$. Sinon, on a $\infty \in \pi$. D'après le fait 2.7.3, on a $B_1 = B_\infty(BCK) \times B_{\pi\setminus\{\infty\}}(BCK)$. Donc, pour montrer $B_1 \leq BD$, il suffit de montrer $B_\infty(BCK) \leq BD$. Soit $C_1 = B_\infty(BCK) \cap C$. C'est un sous-groupe définissable et sans torsion de C. En particulier, C_1 est divisible et C_1K/K est un ∞-groupe (lemme 4.1.8). Le lemme 4.1.21 prouve que C_1 est contenu dans D. La proposition 2.7.9 donne $[B_\infty(BCK), BCK] \leq B_\infty(BCK) \cap Q(H) = B_\infty(H)$. Donc $B_\infty(BCK)/B_\infty(H)$ est central dans $BCK/B_\infty(H)$ et le corollaire 2.4.8 donne $B_\infty(BCK)/B_\infty(H) \leq CB_\infty(H)/B_\infty(H)$, d'où $B_\infty(BCK) = B_\infty(H)C_1 \leq BD$. On peut alors supposer $H = BCK$.

Par unicité de D, DK/K est normal dans CK/K. Donc DTK/K est normal dans CK/K et on en déduit que $BDTK/K$ est normal dans H/K. Soit $U = BDTK$. Le lemme 3.1.11 dit que U est localement clos et le lemme 4.1.5 montre que U/K est un π-groupe. Alors, d'après le lemme 4.1.10, R/K contient U/K et R/U est un π-sous-groupe de Hall de H/U.

On va montrer que H/U ne possède pas de π-sous-groupe non trivial, ce qui prouvera l'égalité $R = BDTK$. Comme $H = BCK$, on a $H = CU$ et H/U est nilpotent. Le théorème 2.4.7 montre que C est connexe. Le fait 1.3.19 dit que $C = C_0 * D_0$ pour deux sous-groupes définissables, connexes et caractéristiques C_0 et D_0 de C avec D_0 divisible et C_0 d'exposant borné. Alors on a $D \leq D_0$ et T est l'unique $(\pi \setminus \{\infty\})$-sous-groupe de Hall de D_0. La proposition 4.1.12 dit que D_0U/U possède un unique π-sous-groupe de Hall R_0/U et que R_0 est localement clos. Comme U/K est un π-groupe, R_0/K est aussi un π-groupe (lemme 4.1.9). Aussi, $(R_0 \cap D_0)/(D_0 \cap U)$ est l'unique π-sous-groupe de Hall de $D_0/(D_0 \cap U)$. Le corollaire 3.1.8 et le lemme 4.1.8 montrent que $(R_0 \cap D_0)/(D_0 \cap U)(R_0 \cap D_0)^-$ est un $(\pi \setminus \{\infty\})$-groupe. Comme T est le $(\pi \setminus \{\infty\})$-sous-groupe de Hall de D_0, T est aussi le $(\pi \setminus \{\infty\})$-sous-groupe de Hall de $R_0 \cap D_0$ et le corollaire 3.2.6 (ii) donne $R_0 \cap D_0 = T(D_0 \cap U)(R_0 \cap D_0)^-$. Comme $(R_0 \cap D_0)^-$ est un sous-groupe définissable et connexe de D_0, $(R_0 \cap D_0)^-$ est divisible. Alors, comme $(R_0 \cap D_0)^- K/K$ est un π-groupe, on obtient $(R_0 \cap D_0)^- \leq D$ et $R_0 \cap D_0$ est contenu dans $(D_0 \cap U)TD \leq U$. Ainsi, on a $R_0 = (R_0 \cap D_0)U = U$ et on en déduit que D_0U/U ne possède pas de π-élément non trivial. Comme $H/F(H)$ est abélien et divisible (fait 1.3.19) et comme C_0 est connexe et d'exposant borné, C_0 est contenu dans $F(H)$ et, donc, on a $C_0 \leq B_{\mathcal{P}}(H)$. Alors $C_0 \cap B$ est l'unique π-sous-groupe de Hall de C_0. Comme U contient B et comme C_0 est d'exposant borné, $H/D_0U (= C_0D_0U/D_0U)$ ne possède pas de π-élément non trivial. Comme le lemme 4.1.8 dit que RD_0/D_0U est un π-sous-groupe de H/D_0U, on a $R \leq D_0U$. Mais D_0U/U est sans π-élément non trivial et R/U est un π-groupe. Donc $R = U$, et on obtient $R = BDTK$.

Le lemme 4.1.20 finit la preuve de la proposition. □

Corollaire 4.1.23. – *On suppose H définissable et connexe. Si R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K, alors $R/K = R^\circ K/K$. En particulier, si K est connexe, R est connexe.*

Preuve. – Avec les notations de la proposition 4.1.22, on a $R = B_\pi(H)DTK$. On en déduit $d(R) = B_\pi(H)d(K)Dd(T)$. Comme T est abélien et divisible, $d(T)$ est connexe. Mais $B_\pi(H)$ et D sont aussi connexes, donc $d(R)^\circ = B_\pi(H)d(K)^\circ Dd(T)$. Ceci prouve que $R^\circ K$ contient R, d'où $R = R^\circ K$. □

Corollaire 4.1.24. – *Si R/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K, alors R est localement clos.*

Preuve. – Comme $R/(R \cap H^+) (\cong RH^+/H^+)$ est localement fini (corollaire 3.1.7 (i)), il suffit de montrer que $R \cap H^+$ est localement clos. Par le corollaire 4.1.19, $(R \cap H^+)K/K$ est un π-sous-groupe de Hall de H^+K/K. Donc $(R \cap H^+)/(K \cap H^+)$ est un π-sous-groupe de Hall de $H^+/(K \cap H^+)$. La proposition 4.1.17 dit qu'il existe un sous-groupe de Carter C de H^+ tel que $R \cap H^+$ normalise $B_\pi(H^+)C(K \cap H^+)$. C est nilpotent d'après le corollaire 2.4.5. Soient T le $(\pi \setminus \{\infty\})$-tore maximal de C et D l'unique sous-groupe de C divisible et définissable tel que $D(K \cap H^+)/(K \cap H^+)$ soit un π-groupe et tel que D soit maximal pour ces conditions (l'existence de D est donnée par le lemme 4.1.21). La proposition 4.1.22 donne $R \cap H^+ = B_\pi(H^+)DT(K \cap H^+)$. Le lemme 3.1.11 permet de conclure. □

Corollaire 4.1.25. – *Pour tout $\sigma \subseteq \pi$, si H/K est un π-sous-groupe de Hall de R/K et si S/K est un σ-sous-groupe de Hall de R/K, alors S/K est un σ-sous-groupe de Hall de H/K.*

Preuve. – Soient U/K un σ-sous-groupe de Hall de H/K contenant S/K et V/K un π-sous-groupe de Hall de H/K contenant U/K. D'après le théorème 4.1.18, il existe $h \in H$ tel que $V^h = R$. Comme R est localement clos (corollaire 4.1.24), le théorème 4.1.18 dit qu'il existe $r \in R$ tel que $(U^h)^r = S$. On en déduit le résultat. □

Corollaire 4.1.26. – $\mathcal{O}_\pi(H/K) = \mathcal{O}_\pi^{loc}(H/K)$.

Preuve. – Soit $\mathcal{O}/K = \mathcal{O}_\pi(H/K)$. Montrons que $\mathcal{O}$ est localement clos. Soit U/K l'intersection des π-sous-groupes de Hall de H/K. Le corollaire 4.1.24 et le lemme 3.1.13 montrent que U est localement clos. Alors il suffit de montrer $\mathcal{O} = U$. Soit V/K un π-sous-groupe normal de H/K. Alors, si S/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K, on a $V \cap S = V$ d'après le corollaire 4.1.19. Ceci prouve que $\mathcal{O}$ est contenu dans S. On en déduit $\mathcal{O} \leq U$ et, l'inclusion inverse étant triviale, $\mathcal{O} = U$. □

4.2 Sur le théorème de Schur-Zassenhaus

Le théorème de Schur-Zassenhaus est un résultat fondamental de la théorie des groupes finis :

Fait 4.2.1. – **([69], th. 9.1.2, Schur, Zassenhaus)** *Soit N un sous-groupe normal d'un groupe fini G. On suppose que $|N| = n$ et $|G : N| = m$ soient premiers entre eux. Alors G possède une unique classe de conjugaison de sous-groupes d'ordre m.*

A. V. Borovik et A. Nesin ont établi des analogues de ce résultat pour les groupes de rang de Morley fini résolubles :

Fait 4.2.2. – **([11], [12], Borovik, Nesin)** *Soit $\pi \subseteq \mathcal{P}$. Dans un groupe résoluble G de rang de Morley fini, un π-sous-groupe de Hall normal a un complément.*

Fait 4.2.3. – **([11], [12], Borovik, Nesin)** *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}$, G un groupe résoluble de rang de Morley fini et H un π-sous-groupe de Hall normal. Si H est d'exposant borné, alors les compléments de H dans G sont définissables et conjugués.*

Dans cette section, nous établissons des analogues de ces résultats pour les sections localement closes résolubles (théorèmes 4.2.4 et 4.2.6). Ceci nous permettra d'obtenir des informations concernant les quotients des sous-groupes de Hall généralisés (corollaire 4.2.8).

Dans toute cette section, G désigne un groupe de rang de Morley fini résoluble.

Théorème 4.2.4. – *Soient H/K une section localement close de G et $\pi \subseteq \mathcal{P}$ tel que H/K ait un π-sous-groupe de Hall normal R/K. Alors :*
(i) *tout $\pi^{\perp}$-sous-groupe de H/K est contenu dans un complément de R/K ;*
(ii) *tout complément de R/K contient un π'-sous-groupe de Hall de H/K.*

Preuve. – Nous prouvons (i) par induction sur le rang de H^+. Il suffit de montrer le résultat pour un $\pi^{\perp}$-sous-groupe de Hall X/K de H/K. On peut supposer $K^- = 1$. Alors H^+ centralise K d'après le fait 1.2.6. Soit $\mathcal{O}/K = \mathcal{O}_{\pi^\perp}(H^+K/K)$.

(1) Le cas où $\mathcal{O}^- \neq 1$. D'après le corollaire 3.2.6 (ii), $(R\mathcal{O}^-/\mathcal{O}^-)/(\mathcal{O}^-K/\mathcal{O}^-)$ est un π-sous-groupe de Hall normal de $(H/\mathcal{O}^-)/(\mathcal{O}^-K/\mathcal{O}^-)$. Comme $(X\mathcal{O}^-/\mathcal{O}^-)/(\mathcal{O}^-K/\mathcal{O}^-)$ est un $\pi^{\perp}$-groupe d'après le lemme 4.1.8, l'hypothèse d'induction dit qu'il existe un complément $(V/\mathcal{O}^-)/(\mathcal{O}^-K/\mathcal{O}^-)$ de $(R\mathcal{O}^-/\mathcal{O}^-)/(\mathcal{O}^-K/\mathcal{O}^-)$ contenant $(X\mathcal{O}^-/\mathcal{O}^-)/(\mathcal{O}^-K/\mathcal{O}^-)$. Or $(V\cap R)/K$ est un π-sous-groupe de $\mathcal{O}^-K/K$ et, comme $\mathcal{O}/K$ est un $\pi^{\perp}$-groupe (corollaires 4.1.7 et 4.1.26), on obtient $V \cap R = K$. On en déduit que V/K est un complément de R/K qui contient X/K.

(2) Le cas où $\mathcal{O}^- = 1$ et où H^+ est nilpotent. D'après la proposition 4.1.12, $\mathcal{O}/K$ est l'unique $\pi^{\perp}$-sous-groupe de Hall de H^+K/K. En particulier, $X \cap H^+$ est contenu dans $\mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}^- = 1$, $\mathcal{O}$ est localement fini et, comme H/H^+ est aussi localement fini, X est localement fini. Soit Y un π'-sous-groupe de Hall de X. Alors, d'après le corollaire 3.2.6 (ii), on a $YK/K = X/K$ et Y est un π'-sous-groupe de Hall de H. Comme $B_{\pi^\perp}(H^+)K/K$ est un $\pi^{\perp}$-groupe (lemme 4.1.8) et comme $B_{\pi^\perp}(H^+)$ est quasunipotent, on a $B_{\pi^\perp}(H^+) \leq \mathcal{O}^- = 1$. La remarque 4.1.14 donne $Q(H^+) = B_\pi(H^+)$. Ainsi, comme $Q(H^+)$ est quasiunipotent et comme $\infty \notin \pi$, $Q(H^+)$ est d'exposant borné. Mais, d'après le corollaire 3.3.5, H^+ est divisible. Donc on obtient $Q(H^+) = 1$. En particulier, d'après la proposition 2.7.9, H^+ est abélien.

Montrons que Y° centralise H^+. Comme $(Q(d(H)) \cap H^+)^\circ$ est définissable, connexe, nilpotent et ne contient pas de $\mathcal{P}$-tore puisque $Q(d(H))$ n'en contient pas, on a $(Q(d(H)) \cap H^+)^\circ \leq Q(H^+) = 1$. La proposition 2.7.9 donne $[d(H^\circ), H^+] \leq Q(d(H))$. On en déduit que $[Y^\circ, H^+]$ est contenu dans $Q(d(H))$. Le fait 1.2.6 dit que $[Y^\circ, H^+]$ est un sous-groupe définissable et connexe de H^+. On a montré que $[Y^\circ, H^+]$ est contenu dans $(Q(d(H)) \cap H^+)^\circ = 1$. Donc Y° centralise H^+.

Ce qui précède montre que YK/K agit sur H^+K/K comme un groupe fini d'automorphismes de H^+K/K. D'après le corollaire 3.2.6 (i), $R/K \cap H^+K/K$ est l'unique π-sous-groupe de Hall de H^+K/K. Donc, d'après le fait 1.4.13, il existe un sous-groupe U/K de H^+K/K normalisé par YK/K tel que $H^+K/K = U/K \times R/K$. Le corollaire 3.2.6 (ii) dit que YRH^+/RH^+ est un π'-sous-groupe de Hall de H/RH^+. Comme H/RH^+ est sans π-élément d'après le lemme 3.2.2, on obtient $H = YRH^+ = R(YU)$. Comme YK/K normalise U/K, YU/K est sans π-élément et $H/K = R/K \rtimes YU/K$. Comme YU/K contient X/K, on a fini la preuve de *(2)*.

(3) Le cas où $\mathcal{O}^- = 1$. *(2)* permet de supposer H^+ non nilpotent. D'après la proposition 4.1.17 il existe un sous-groupe de Carter C de H^+ tel que X normalise $B_{\pi^\perp}(H^+)CK$. Comme $\mathcal{O}^- = 1$, $B_{\pi^\perp}(H^+) = 1$ et X normalise CK. Comme H^+ centralise K, K normalise C, et on a $CK \cap H^+ = C$. On en déduit que X normalise C. Notons $\mathcal{Q}/K = \mathcal{O}_{\pi^\perp}(N_H(C)^+K/K)$. Si $Q(N_H(C)^+)$ contient un $\pi^\perp$-sous-groupe non trivial alors on a $\mathcal{Q}^- \neq 1$ et X/K est contenu dans un complément de $(R \cap N_H(C))/K$ dans $N_H(C)/K$ d'après *(1)*. Sinon, d'après *(2)*, X/K est contenu dans un complément de $(R \cap N_H(C))/K$ dans $N_H(C)/K$. Ainsi, dans tous les cas, X/K est contenu dans un complément U/K de $(R \cap N_H(C))/K$ dans $N_H(C)/K$. Mais on a $H = Q(H^+)N_H(C)$ d'après l'argument de Frattini. Donc, comme $Q(H^+)K/K \leq R/K$ puisque $\mathcal{O}^- = 1$, on obtient $H/K = R/K \rtimes U/K$.

(ii) Soit U/K un complément de R/K. Si T/K est un π'-sous-groupe de Hall de H/K, alors on a $R/K \rtimes T/K = R/K \rtimes (U \cap RT)/K$ et $(U \cap RT)/K$ est conjugué à T/K d'après le théorème 3.2.5. Donc $(U \cap RT)/K$ est un π'-sous-groupe de Hall de H/K. □

La preuve du théorème 4.2.6 nécessite la proposition suivante.

Proposition 4.2.5. – *On suppose G connexe. Soit P un sous-groupe de G tel que $G = B_{\mathcal{P}}(G)P$. Alors P est localement clos et $G = B_{\mathcal{P}}(G)P^-$.*

Preuve. – On fait la preuve par induction sur le rang de G. Soient $B_\infty = B_\infty(G)$, $B = B_{\mathcal{P}}(G)$ et n l'exposant de B (B est d'exposant borné d'après le fait 2.7.3). Notons $P_0 = \{y^n : y \in P \cap Q(G)\}$. D'après le fait 2.7.3, on a $Q(G) = B_\infty \times B$ et $P_0 \subseteq \{x^n : x \in Q(G)\} = B_\infty$. D'après le fait 1.3.13, B_∞ est divisible donc, comme $Q(G) = B_\infty \times B$, $Q(G)/B$ est divisible et, comme $Q(G) = B(P \cap Q(G))$, on a $Q(G) = BP_0$. On en déduit $B_\infty = P_0 \subseteq P$. Supposons $B_\infty \neq 1$. Alors, comme $BB_\infty/B_\infty = B_{\mathcal{P}}(G/B_\infty)$, on a $G/B_\infty = B_{\mathcal{P}}(G/B_\infty)(P/B_\infty)$ et l'hypothèse d'induction donne le résultat. On peut donc supposer $B_\infty = 1$.

PB/B étant abélien et divisible d'après la proposition 2.7.9, on a $G = BP^\circ$ et on peut supposer P, donc $d(P)$, connexe. D'après le fait 1.2.6, $d(P)'$ est définissable et connexe. Comme $d(P)'(\leq G' \leq B)$ est d'exposant borné, $d(P)/B_{\mathcal{P}}(d(P))$ est abélien. Comme tout sous-groupe définissable, connexe et d'exposant borné de $d(P)$ est contenu dans $B_{\mathcal{P}}(d(P))$ d'après la proposition 2.7.9, alors $d(P)/B_{\mathcal{P}}(d(P))$ est divisible et $(B \cap d(P))^\circ$ est contenu dans $B_{\mathcal{P}}(d(P))$. Or on a $d(P) = (B \cap d(P))P$, donc $B_{\mathcal{P}}(d(P))P/B_{\mathcal{P}}(d(P))$ est un sous-groupe d'indice fini de $d(P)/B_{\mathcal{P}}(d(P))$. Ce dernier étant divisible, on obtient $d(P) = B_{\mathcal{P}}(d(P))P$. Supposons $G \neq d(P)$. Alors l'hypothèse d'induction dit que P est localement clos et que $d(P) = B_{\mathcal{P}}(d(P))P^-$. On en déduit $d(P) \leq BP^-$ et $G = BP^-$. Donc on peut supposer $G = d(P)$.

Si $B = 1$ il n'y a rien à démontrer. Donc on peut supposer $B \neq 1$. B étant définissable et connexe, B contient un sous-groupe G-minimal A. Alors on a $G/A = B_{\mathcal{P}}(G/A)PA/A$ et, par hypothèse d'induction, PA est localement clos et $G/A = B_{\mathcal{P}}(G/A)(PA/A)^-$. Soit $B_0/A = B_{\mathcal{P}}(G/A)$. Comme $A(\leq B)$ est définissable, connexe et d'exposant borné et qu'il en est de même pour B_0/A, B_0 est définissable, connexe et d'exposant borné. On en déduit $B = B_0$. Mais, A étant connexe, on a $(PA/A)^- = (PA)^-/A$, donc $G = B(PA)^-$. Ainsi il suffit de montrer que $P \cap (PA)^-$ est localement clos et que $(PA)^-$ est contenu dans BP^-. Comme A est définissable, connexe et d'exposant borné, A est contenu dans $B_{\mathcal{P}}((PA)^-)$. Ainsi, on a $(PA)^- = A(P \cap (PA)^-) = B_{\mathcal{P}}((PA)^-)(P \cap (PA)^-)$ et, comme $B_{\mathcal{P}}((PA)^-) \leq B$, l'hypothèse d'induction permet de supposer $G = (PA)^- = PA$. Par G-minimalité de A, A est central dans B. Alors $P \cap B$ est un sous-groupe normal de P centralisé par A. Comme $G = PA$, on en déduit que $P \cap B$ est normal dans G. Si on a $(P \cap B)^- \neq 1$, l'hypothèse d'induction donne le résultat dans $G/(P \cap B)^-$ et on en déduit le résultat dans G. Donc on peut supposer $(P \cap B)^- = 1$, en particulier $[G, P \cap B] = 1$ d'après le fait 1.2.6. Ainsi, comme $P' \leq B$, P' est central dans G et P est nilpotent. D'après le fait 1.3.15, $G = d(P)$ est aussi nilpotent. Le fait 1.3.13 dit qu'il existe un sous-groupe définissable et divisible D de G tel que $G = B * D$. Soit $P_1 = \{y^n : y \in P\}$. Alors P_1 est un sous-ensemble de $\{g^n : g \in G\} = D$. Comme $G/B = PB/B$ est divisible, on a $G = P_1B = (P \cap D)B$. Mais, D étant divisible, $D \cap B$ est fini et on en déduit que $P \cap D$ est d'indice fini dans D, donc est égal à D. On a montré que D est contenu dans P. Donc D est contenu dans P^- et la preuve de la proposition est achevée. □

Le théorème 4.2.6 généralise un théorème de Borovik et Nesin ([11], [12]). Il permet un analogue du corollaire 3.2.6 (ii) pour les sous-groupes de Hall généralisés (corollaire 4.2.8).

Théorème 4.2.6. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}$ et H/K une section localement close de G. On suppose que H/K a un π-sous-groupe de Hall normal R/K d'exposant borné. Alors les $\pi^\perp$-sous-groupes de Hall de H/K sont exactement les compléments de R/K dans H/K.*

Preuve. – Soit T/K un complément de R/K dans H/K (il existe d'après le théorème 4.2.4). Montrons que T/K est un $\pi^\perp$-sous-groupe de Hall de H/K. On peut supposer $K^- = 1$, donc H^+ centralise K d'après le fait 1.2.6. Si T est localement clos alors, pour tout $x \in T$, $d(x)$ est contenu dans T et $d(x)K/K \cap R/K = 1$. En particulier, $d(x)K/K$ ne contient pas de π-élément non trivial. On en déduit que T/K est constitué de $\pi^\perp$-éléments. Comme tout sous-groupe de H/K contenant strictement T/K intersecte R/K non trivialement, T/K est un $\pi^\perp$-sous-groupe de Hall de H/K. Alors il suffit de montrer que T est localement clos, donc que $T \cap H^+R$ est localement clos. Comme $H^+R/K = R/K \rtimes (T \cap H^+R)/K$, on peut supposer $H = H^+R$. On note $B = B_\pi(H^+)$.

On va montrer, par induction sur le rang de H^+,

$$(1) \qquad H^+/(H^+ \cap K) = (R \cap H^+)/(H^+ \cap K) \rtimes (T \cap H^+)/(H^+ \cap K).$$

Comme $(R \cap H^+) \cap (T \cap H^+) = K \cap H^+$, il suffit de montrer que $H^+ = (R \cap H^+)(T \cap H^+)$. Supposons $B \neq 1$. Comme $TB \cap R = (T \cap R)B = KB$, alors

$$(H^+R/B)/(KB/B) = (R/B)/(KB/B) \rtimes (TB/B)/(KB/B)$$

et, par hypothèse d'induction, on a $H^+/B = (R \cap H^+)/B \rtimes (TB \cap H^+)/B$. Ainsi $H^+ = (H^+ \cap R)(T \cap H^+)$ et on peut supposer $B = 1$. Soit U un π-sous-groupe de Hall de H^+. La proposition 4.1.22 dit qu'il existe un sous-groupe de Carter C de H^+ tel que, si D désigne le π-sous-groupe divisible et définissable maximal de C (D existe d'après le lemme 4.1.21) et si T_1 désigne le π-tore maximal de C, alors $U = DT_1$. En particulier, U est nilpotent et divisible-par-divisible, donc U est divisible. Par conjugaison des π-sous-groupes de Hall de H^+ (fait 1.4.11), les π-sous-groupes de Hall de H^+ sont divisibles et, par le corollaire 3.2.6 (ii), les π-sous-groupes de Hall de H^+K/K sont divisibles. Comme $(R \cap H^+K)/K$ est un π-sous-groupe de Hall de H^+K/K (corollaire 3.2.6 (i)), $(R \cap H^+K)/K$ est divisible. Donc, comme R/K est d'exposant borné, on obtient $R \cap H^+ \leq K$. Ainsi on a $[H^+, R] \leq K^- = 1$ et H^+ centralise R. Soient n l'exposant de R/K et $h \in H^+$. Alors il existe $r \in R$ et $t \in T$ tel que $h = rt$. Or h centralise r, donc $h^n = r^n t^n \in T$. Soit L/K le sous-groupe de H^+K/K engendré par les puissances n-ièmes des éléments de H^+K/K. On a montré que L est un sous-groupe de T. Comme la proposition 2.7.9 dit que $H^+/Q(H^+)$ est divisible, on a $H^+K/K = LQ(H^+)/K$. Comme $B_\pi(H^+) = 1$, la remarque 4.1.14 donne $Q(H^+) = \bigoplus_{p \in \pi^\perp} B_p(H^+)$. Mais, pour tout $p \in \pi'$, $B_p(H^+)$ est π-divisible. Alors, comme le fait 1.3.13 dit que $B_\infty(H^+)$ est divisible,

$Q(H^+)$ est π-divisible et $Q(H^+)K/K$ est aussi π-divisible. On en déduit que L/K contient $Q(H^+)K/K$. On a montré que $L = H^+K$, ce qui prouve que T/K contient H^+K/K. Ainsi, $H^+ = T \cap H^+$ et on a prouvé (1).

D'après la proposition 4.1.22 on a $R \cap H^+ = B(H^+ \cap K)$. Alors (1) montre que $H^+ = B(T \cap H^+)$ et la proposition 4.2.5 dit alors que $T \cap H^+$ est localement clos, donc T aussi. □

L'exemple 4.2.7 montre qu'il n'est pas possible de généraliser le corollaire 3.2.6 (*ii*) aux sous-groupes de Hall généralisés.

Exemple 4.2.7. – Si G est un pur groupe isomorphe à $\mathbb{C}^*$, alors tout ∞-sous-groupe de G est trivial. Pourtant, si T désigne le $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de G, G/T est un ∞-groupe non trivial.

Il est tout de même possible de donner un analogue au corollaire 3.2.6 (*ii*) en supposant que le sous-groupe par lequel on quotiente a certains sous-groupes de Hall d'exposant borné. C'est ce que dit le corollaire 4.2.8. En particulier les sous-groupes de Hall généralisés sont conservés par quotientement de tout sous-groupe d'exposant borné. Ce résultat sera utilisé dans la section 4.3.

Corollaire 4.2.8. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, H/K une section localement close de G, R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K et A un sous-groupe localement clos et normal de H qui contient K. On suppose qu'un π'-sous-groupe de Hall de A/K est d'exposant borné. Alors RA/A est un π-sous-groupe de Hall de H/A et tous les π-sous-groupes de Hall de H/A sont de cette forme.*

Preuve. – Si $\infty \notin \pi$ le résultat est connu par le corollaire 3.2.6 (*ii*), donc on peut supposer $\infty \in \pi$. On note $A_0 = K$, $A_1 = (B_{\pi^\perp}(d(A)^\circ) \cap A)K$, $A_2 = (Q(d(A)^\circ) \cap A)K$, $A_3/A_2 = \mathcal{O}_{\pi^\perp}(A^\circ K/A_2)$, $A_4 = A^\circ K$ et, pour $i \geq 2$, $A_{2i+1}/A_{2i} = \mathcal{O}_{\pi^\perp}(A/A_{2i})$ et $A_{2i+2}/A_{2i+1} = \mathcal{O}_{\pi}(A/A_{2i+1})$. Alors A_1/A_0 est un $\pi^\perp$-groupe et, comme on a $Q(G) = B_{\pi^\perp}(G) \times B_\pi(G)$ d'après la remarque 4.1.14, A_2/A_1 est un π-groupe. La proposition 2.7.9 montre que A_4/A_2 est abélien. Donc, comme $\infty \in \pi$, A_3/A_2 est l'unique $\pi^\perp$-sous-groupe de Hall de A_4/A_2 et A_4/A_3 est un π-groupe. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_{i+1}/A_i est soit un π-groupe soit un $\pi^\perp$-groupe. Aussi, comme A/A° est fini et comme $A_4 = A^\circ K$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A_n = A$. On fait la preuve par induction sur n. On peut alors supposer que A/K est soit un π-groupe soit un $\pi^\perp$-groupe. Si A/K est un π-groupe le lemme 4.1.10 donne le résultat donc on peut supposer A/K $\pi^\perp$-groupe. Ainsi A/K est d'exposant borné et RA/A est un π-sous-groupe de H/A d'après le lemme 4.1.8. Soit S/A un π-sous-groupe de Hall de H/A qui contient RA/A. Alors S est localement clos d'après le corollaire 4.1.24. Comme A/K est d'exposant borné, le théorème 4.2.6 donne $S/K = A/K \rtimes R/K$. □

4.3 Bases de Sylow généralisées

Lorsque l'on développe une théorie de sous-groupes de Hall, il est naturel de regarder les *bases de Sylow* (définition 4.3.1). L'objet de cette section est d'introduire et d'étudier les *bases de Sylow généralisées* (définition 4.3.6). Le résultat principal de cette section est le théorème 4.3.8 qui donne l'existence et la conjugaison des bases de Sylow généralisées dans les sections localement closes résolubles.

On rappelle la définition d'une *base de Sylow.*

Définition 4.3.1. – *Soient G un groupe et $\mathfrak{G} = (S_p)_{p\in\mathcal{P}}$ une famille de sous-groupes où, pour $p \in \mathcal{P}$, S_p désigne un p-sous-groupe de Sylow de G. On dit que $\mathfrak{G}$ est une* base de Sylow *de G si $\langle S_p : p \in \pi\rangle$ est un π-sous-groupe pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}$.*

Les bases de Sylow des groupes résolubles de rang de Morley fini, et même ω-stables, sont étudiées dans la partie 5 de [4]. En particulier, il y est montré que tout groupe de rang de Morley fini résoluble possède une unique classe de conjugaison de bases de Sylow. Ce résultat dépend très fortement du résultat suivant :

Fait 4.3.2. – **([33], th. 2.10, Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *Tout $\mathfrak{U}$-groupe possède une unique classe de conjugaison de bases de Sylow.*

On rappelle qu'une section localement close, localement finie et localement résoluble est un $\mathfrak{U}$-groupe (cf. théorème 3.2.5 et corollaire 3.2.6 (*ii*)). Nous en déduisons un analogue du fait 4.3.2 pour les sections localement closes :

Proposition 4.3.3. – *Toute section localement close résoluble H/K possède une unique classe de conjugaison de bases de Sylow.*

Preuve. – Montrons que H/K possède une base de Sylow. Soit S/K un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de H/K. Le fait 4.3.2 dit que S/K possède une base de Sylow $\mathfrak{S} = (S_p/K)_{p\in\mathcal{P}}$. Alors, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}$, $\langle S_p/K : p \in \pi\rangle$ est un π-sous-groupe de S/K. Aussi, par conjugaison des $\mathcal{P}$-sous-groupes de Hall de H/K (théorème 3.2.5), S/K contient un p-sous-groupe de Sylow de H/K pour tout $p \in \mathcal{P}$. Donc, par conjugaison des p-sous-groupes de Sylow de S/K (théorème 3.2.5), S_p/K est un p-sous-groupe de Sylow de H/K pour tout $p \in \mathcal{P}$. Alors $\mathfrak{S}$ est une base de Sylow de H/K.

Montrons que les bases de Sylow de H/K sont conjuguées. Soient $\mathfrak{S}_1 = (S_p/K)_{p\in\mathcal{P}}$ et $\mathfrak{S}_2 = (R_p/K)_{p\in\mathcal{P}}$ deux bases de Sylow de H/K. Soient S/K et R/K des $\mathcal{P}$-sous-groupes de Hall de H/K contenant $\langle S_p/K : p \in \mathcal{P}\rangle$ et $\langle R_p/K : p \in \mathcal{P}\rangle$ respectivement. Le théorème 3.2.5 permet de supposer $S = R$. Alors $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont des bases de Sylow du $\mathfrak{U}$-groupe S/K. Le fait 4.3.2 donne le résultat. □

Fait 4.3.4. – **([33], lemme 2.7 (*iv*), Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *Si $\mathfrak{S} = (S_p)_{p\in\mathcal{P}}$ est une base de Sylow d'un $\mathfrak{U}$-groupe G alors, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}$, $\langle S_p : p \in \pi\rangle$ est un π-sous-groupe de Hall de G et, de plus, on a $\langle S_p : p \in \pi\rangle = \prod_{p\in\pi} S_p$*

On en déduit le lemme suivant :

Lemme 4.3.5. – *Si $\mathfrak{S} = (S_p/K)_{p\in\mathcal{P}}$ est une base de Sylow d'une section localement close H/K d'un groupe de rang de Morley fini résoluble G alors, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}$, $\langle S_p/K : p \in \pi\rangle$ est un π-sous-groupe de Hall de H/K.*

Preuve. – Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}$ et R/K un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de H/K contenant $\langle S_p/K : p \in \mathcal{P}\rangle$. Alors $\mathfrak{S}$ est aussi une base de Sylow de R/K et le fait 4.3.4 montre que $S/K = \langle S_p/K : p \in \pi\rangle$ est un π-sous-groupe de Hall de R/K. Donc S/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K puisque R/K est un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de H/K. □

La définition 4.3.6 est l'analogue de la définition 4.3.1 pour les sous-groupes de Hall généralisés. La remarque 4.3.7 donne un lien entre les deux notions.

Définition 4.3.6. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G et $\mathfrak{B} = (\overline{S_\pi})_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ une famille de sous-groupes où, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $\overline{S_\pi}$ désigne un π-sous-groupe de Hall de H/K. On dit que $\mathfrak{B}$ est une* base de Sylow généralisée *de H/K si, pour tout $\sigma \subseteq \pi \subseteq \mathcal{P}^+$, on a $\overline{S_\sigma} \leq \overline{S_\pi}$.*

Remarque 4.3.7. – Si $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow généralisée d'une section localement close H/K d'un groupe de rang de Morley fini résoluble G, alors $(S_p/K)_{p\in\mathcal{P}}$ est une base de Sylow de H/K.

Le théorème suivant est analogue à la proposition 4.3.3.

Théorème 4.3.8. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et H/K une section localement close de G. Alors H/K possède une unique classe de conjugaison de bases de Sylow généralisées.*

Preuve. – *1) Existence.*

On fait la preuve par induction sur le rang de H^-. On peut supposer $K^- = 1$. Soit $\mathfrak{S} = (S_p/K)_{p\in\mathcal{P}}$ une base de Sylow de H/K (elle existe d'après la proposition 4.3.3). Si H^- est nilpotent, H^-K/K a un unique π-sous-groupe de Hall R_π/K pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et R_π est localement clos (proposition 4.1.12). Pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ on note $S_\pi = R_\pi\langle S_p : p \in \pi \setminus \{\infty\}\rangle$. Montrons que $\mathfrak{B} = (S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow généralisée de H/K. Il suffit de montrer que S_π/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Soit $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Comme $\mathfrak{S}$ est une base de Sylow de H/K, $\langle S_p/K : p \in \pi \setminus \{\infty\}\rangle$ est un $(\pi \setminus \{\infty\})$-sous-groupe de Hall de H/K (lemme 4.3.5). Alors le lemme 4.1.5 dit que S_π/K est un π-sous-groupe de H/K. De plus, si S^*_π/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K contenant S_π/K, le corollaire 4.1.19 montre que $S^*_\pi/K \cap H^-K/K$ est un π-sous-groupe de Hall de H^-K/K, et $S^*_\pi/K \cap H^-K/K = R_\pi/K$. Comme S^*_π/R_π est localement fini, S^*_π/R_π est un $(\pi\setminus\{\infty\})$-sous-groupe de H/R_π. Mais le corollaire 3.2.6 (ii) dit que $S_\pi/R_\pi (= \langle S_p : p \in \pi\setminus\{\infty\}\rangle R_\pi/R_\pi)$ est un $(\pi \setminus \{\infty\})$-sous-groupe de Hall de H/R_π et, comme S^*_π/R_π contient S_π/R_π, on obtient $S_\pi = S^*_\pi$. On en déduit que $\mathfrak{B}$ est une base de Sylow généralisée de H/K.

Donc on peut supposer H^- non nilpotent et, d'après la proposition 2.7.9, on a $Q(H^-) \neq 1$. Alors H contient un sous-groupe H-minimal A dans $Q(H^-)$ et A est soit sans torsion soit un q-sous-groupe d'exposant borné pour un entier premier q. Comme, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}$, $\langle S_p/K : p \in \pi\rangle$ est un π-groupe, $\langle S_pA/AK : p \in \pi\rangle$ est un π-groupe pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}$. S_pA/AK étant un p-sous-groupe de Sylow pour tout $p \in \mathcal{P}$ (corollaire 3.2.6 (ii)), $\overline{\mathfrak{S}} = (S_pA/AK)_{p\in\mathcal{P}}$ est une base de Sylow de H/AK. Or, par hypothèse d'induction, H/AK possède une base de Sylow généralisée $(R_\pi/AK)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$. La remarque 4.3.7 dit que $\overline{\mathfrak{D}} = (R_p/AK)_{p\in\mathcal{P}}$ est une base de Sylow de H/AK. D'après la proposition 4.3.3 $\overline{\mathfrak{S}}$ et $\overline{\mathfrak{D}}$ sont conjugués dans H/AK et on peut supposer $\overline{\mathfrak{D}} = \overline{\mathfrak{S}}$.

Supposons A sans torsion. On note $D_\pi/K = R_\pi/K$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ tel que $\infty \in \pi$, et $D_\pi/K = \langle S_p/K : p \in \pi\rangle$ si $\infty \notin \pi$. Alors le lemme 4.1.10 dit que, si $\infty \in \pi$, D_π/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K. De plus, comme $\mathfrak{S}$ est une base de Sylow de H/K, D_π/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}$ (lemme 4.3.5). Comme $(R_\pi/AK)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow généralisée de H/AK et comme $\overline{\mathfrak{S}} = \overline{\mathfrak{D}}$, on a $D_\sigma \leq D_\pi$ pour tout $\sigma \subseteq \pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $(D_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow généralisée de H/K.

On peut donc supposer A q-sous-groupe d'exposant borné. D'après le corollaire 4.2.8, H/K a un $q^\perp$-sous-groupe de Hall V/K tel que $VA = R_{q^\perp}$. On note $D_\pi = V \cap R_\pi$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ qui ne contient pas q et $D_\pi = R_\pi$ si $q \in \pi$. Le corollaire 4.2.8 et le lemme 4.1.10 disent que D_π/K est un π-sous-groupe de Hall pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Comme $\overline{\mathfrak{S}}$ est une base de Sylow généralisée de H/AK alors, pour tout $\sigma \subseteq \pi \subseteq \mathcal{P}^+$, D_σ est contenu dans D_π. On en déduit que $(D_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow généralisée de H/K.

2) Conjugaison.

On fait la preuve par induction sur le rang de G. Soient $\mathfrak{B}_1 = \{S_\pi/K : \pi \subseteq \mathcal{P}^+\}$ et $\mathfrak{B}_2 = \{R_\pi/K : \pi \subseteq \mathcal{P}^+\}$ deux bases de Sylow généralisées de H/K et soient $\mathfrak{B}_1^- = \{S_p/K : p \in \mathcal{P}\}$ et $\mathfrak{B}_2^- = \{R_p/K : p \in \mathcal{P}\}$. Comme $\mathfrak{B}_1^-$ et $\mathfrak{B}_2^-$ sont deux bases de Sylow de H/K (remarque 4.3.7) alors, d'après la proposition 4.3.3, il existe $h \in H$ tel que $S_\pi^h = R_\pi$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}$. Soit $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Si H^+ est nilpotent alors, d'après la proposition 4.1.12, H^+K/K a un unique π-sous-groupe de Hall U_π/K et U_π est localement clos. En particulier, U_π est normal dans H. Le lemme 4.1.10 dit que S_π et R_π contiennent U_π et que S_π/U_π et R_π/U_π sont des

π-sous-groupes de Hall de H/U_π. Comme U_π/K contient tous les π-éléments de H^+K/K, on a $S_\pi/U_\pi \cong S_\pi H^+/H^+K$ et $R_\pi/U_\pi \cong R_\pi H^+/H^+K$. Comme H/H^+ est localement fini (corollaire 3.1.7 (i)), R_π/U_π et S_π/U_π sont aussi localement finis et, donc, R_π/U_π et S_π/U_π sont des $(\pi \setminus \{\infty\})$-sous-groupes de Hall de H/U_π. On déduit du corollaire 3.2.6 (ii) que $S_\pi = U_\pi S_{\pi\setminus\{\infty\}}$ et $R_\pi = U_\pi R_{\pi\setminus\{\infty\}}$. Ainsi $S_\pi^h = U_\pi S^h_{\pi\setminus\{\infty\}} = R_\pi$. Ceci étant vrai pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, on peut supposer H^+ non nilpotent et, d'après la proposition 2.7.9, $Q(H^+)$ n'est pas trivial. Donc H^+ contient un p-sous-groupe H-minimal A pour un $p \in \mathcal{P}^+$.

D'après le corollaire 4.2.8, $\overline{\mathfrak{B}_1} = \{S_\pi A/AK : \pi \in \mathcal{P}^+\}$ et $\overline{\mathfrak{B}_2} = \{R_\pi A/AK : \pi \in \mathcal{P}^+\}$ sont des bases de Sylow généralisées de H/AK. Par hypothèse d'induction $\overline{\mathfrak{B}_1}$ et $\overline{\mathfrak{B}_2}$ sont conjugués dans H/AK et on peut supposer $S_\pi A = R_\pi A$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Ceci montre que, $S_{p^\perp}$ et $R_{p^\perp}$ sont A-conjugués (théorème 4.1.18) et on peut supposer $S_{p^\perp} = R_{p^\perp}$. Comme A est un p-groupe, on a $A \cap S_{p^\perp} \leq K$. Ainsi, pour tout $\pi \subseteq p^\perp$,

$$S_\pi = S_\pi(A \cap S_{p^\perp}) = S_\pi A \cap S_{p^\perp} = R_\pi A \cap R_{p^\perp} = R_\pi.$$

Comme $S_\pi = S_\pi A = R_\pi$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ avec $p \in \pi$, on a le résultat. □

Nous généralisons la proposition 4.1.17 :

Proposition 4.3.9. – *Soient H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble, $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ une base de Sylow généralisée de H/K et U un sous-groupe définissable, connexe et normal de H tel que H/U soit localement fini. Alors il existe un sous-groupe de Carter C de U tel que S_π normalise $B_\pi(U)CK$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$.*

Preuve. – On fait la preuve par induction sur le rang de U. Notons $K_1 = (K \cap U)^-$ et $B_\pi/K_1 = B_\pi(U/K_1)$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Si $K_1 \neq 1$ alors, par hypothèse d'induction, il existe un sous-groupe de Carter D/K_1 de U/K_1 tel que S_π/K_1 normalise $B_\pi DK/K_1$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. D'après le corollaire 2.4.8 il existe un sous-groupe de Carter C de U tel que $D = CK_1$. Soit $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. D'après la proposition 2.7.9, on a $[U, B_\pi] \leq Q(U) \cap B_\pi \leq B_\pi(U)K_1$, d'où $B_\pi/B_\pi(U)K_1 \leq Z(U/B_\pi(U)K_1) \leq CB_\pi(U)K_1/B_\pi(U)K_1$ d'après le corollaire 2.4.8. En particulier on a $B_\pi DK = B_\pi(U)CK$ et S_π normalise $B_\pi(U)CK$. Ceci étant vrai pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, on a le résultat et on peut donc supposer $K_1 = 1$.

Si U est nilpotent, il n'y a rien à démontrer, donc la proposition 2.7.9 permet de supposer que $Q(U)$ contient un sous-groupe H-minimal A. Alors $(S_\pi A/AK)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow généralisée de H/AK d'après le corollaire 4.2.8. Par hypothèse d'induction il existe un sous-groupe de Carter D/A de U/A tel que $S_\pi A/A$ normalise $B_\pi(U/A)DK/A$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $B/A = B_\pi(U/A)$. Alors S_π normalise BDK et on a $B_\pi(U)A = B \cap Q(U)$. Aussi on a $[B, U] \leq B \cap Q(U) = B_\pi(U)A$, donc $B/B_\pi(U)A$ est central dans $U/B_\pi(U)A$. Mais $DB_\pi(U)/B_\pi(U)A$ est un sous-groupe de Carter de $U/B_\pi(U)A$ d'après le corollaire 2.4.8, donc $B \leq DB_\pi(U)$ et, comme U centralise K ($K_1 = 1$), on a $K \cap U \leq DB_\pi(U)$. En particulier on obtient $BDK \cap U = DB_\pi(U)(K \cap U) = DB_\pi(U)$ et S_π normalise $B_\pi(U)D$ (pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$).

Soit $p \in \mathcal{P}^+$ tel que A soit un p-groupe. Montrons

(∗) *il existe un sous-groupe de Carter C de U tel que $D = CA$ et tel que $S_{p^\perp}$ normalise $B_{p^\perp}(U)CK$.*

Soient $S = S_{p^\perp}D$ et $V = (S \cap U)^-$. Comme $S_{p^\perp}$ contient $B_{p^\perp}(U)K$ et normalise $B_{p^\perp}(U)DK$, S est un sous-groupe localement clos de H. S contient $B_{p^\perp}(U)$ et $B_{p^\perp}(U)$ est contenu dans V, donc $B_{p^\perp}(V)$ contient $B_{p^\perp}(U)$. Aussi $(S \cap U)/V$ et $S/(S \cap U)$ sont localement finis, donc S/V est aussi localement fini. Alors, d'après la proposition 4.1.17, $S_{p^\perp}$ normalise $B_{p^\perp}(V)C_0K$ pour un sous-groupe de Carter C_0 de V. C_0A/A étant un sous-groupe de Carter de V/A d'après le corollaire 2.4.8, le théorème 2.4.7 dit qu'il existe $v \in V$ tel que $(C_0A)^v = D$. Notons $C = C_0^v$. Comme on a $D \leq V \leq S = S_{p^\perp}D$, on peut supposer $v \in S_{p^\perp}$. On en déduit que

$S_{p^\perp}$ normalise $B_{p^\perp}(V)CK \cap V = B_{p^\perp}(V)C(K \cap V) = B_{p^\perp}(V)C$ puisque U et V centralisent K. Alors $S_{p^\perp}$ normalise $B_{p^\perp}(V)C \cap B_{p^\perp}(U)D = (B_{p^\perp}(V)C \cap AC)B_{p^\perp}(U)$. Mais, C étant nilpotent, il existe un entier n tel que $(B_{p^\perp}(V)C \cap AC)^n$ soit contenu dans $B_{p^\perp}(V) \cap A$. Comme A est un p-groupe et $B_{p^\perp}(V)$ est un $p^\perp$-groupe, on obtient $(B_{p^\perp}(V)C \cap AC)^n = 1$ et $B_{p^\perp}(V)C \cap AC$ est un sous-groupe nilpotent de V contenant C. Donc $B_{p^\perp}(V)C \cap AC = C$ puisque C est un sous-groupe de Carter de V. Ainsi $S_{p^\perp}$ normalise $B_{p^\perp}(U)C$. C étant un sous-groupe de Carter de $D(\leq V)$, C est un sous-groupe de Carter de U (corollaire 2.4.8), ce qui prouve $(*)$.

On choisit un sous-groupe de Carter C de U comme dans $(*)$. Soit $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Si π contient p, alors A est contenu dans $B_\pi(U)$ puisque A est un p-groupe. Donc S_π normalise $B_\pi(U)CK$. Soit $L = B_{p^\perp}(U)CK \cap B_\pi(U)DK$. Si $p \notin \pi$, $(*)$ montre que S_π normalise L. On a $L = B_\pi(U)CK(B_{p^\perp}(U)CK \cap A)$. Soit T/K le p-sous-groupe de Hall de CK/K. Alors $TB_{p^\perp}(U)/B_{p^\perp}(U)K$ est un p-sous-groupe de Hall de $B_{p^\perp}(U)CK/B_{p^\perp}(U)K$ (corollaire 4.2.8). Comme $B_{p^\perp}(U)K/K$ est un $p^\perp$-groupe, T/K est un p-sous-groupe de Hall de $B_{p^\perp}(U)CK/K$. En particulier, T contient $B_{p^\perp}(U)CK \cap A$ et on obtient $L = B_\pi(U)CK$. Ceci finit la preuve de la proposition. □

Nous finissons notre étude des bases de Sylow généralisées en donnant une caractérisation de celles-ci (proposition 4.3.14). La caractérisation que nous donnons est analogue au corollaire 2.6 de [33] et au lemme 2 de [4] :

Fait 4.3.10. – **([33], corollaire 2.6, Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *Soient G un $\mathfrak{U}$-groupe et $\mathfrak{S} = (S_p)_{p\in\mathcal{P}}$ une famille de sous-groupes où, pour tout $p \in \mathcal{P}$, S_p désigne un p-sous-groupe de Sylow de G. Alors $\mathfrak{S}$ est une base de Sylow de G si et seulement si $S_pS_q = S_qS_p$ pour tout entiers premiers p et q.*

Fait 4.3.11. – **([4], lemme 2, Altınel, Cherlin, Corredor, Nesin)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et $\mathfrak{S} = (S_p)_{p\in\mathcal{P}}$ une famille de sous-groupes où, pour tout $p \in \mathcal{P}$, S_p désigne un p-sous-groupe de Sylow de G. Alors $\mathfrak{S}$ est une base de Sylow de G si et seulement si $S_pS_q = S_qS_p$ pour tout entiers premiers p et q.*

Fait 4.3.12. – **([74], Sysak)** *Si un groupe résoluble G s'écrit sous la forme $G = AB$ avec A et B des sous-groupes localement finis de G, alors G est aussi localement fini.*

Lemme 4.3.13. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et H et K deux sous-groupes localement clos de G tels que $HK = KH$. Alors HK est localement clos.*

Preuve. – La preuve est analogue à celle du lemme 3.1.11. Il suffit de remplacer l'utilisation du fait 1.4.2 par celle du fait 4.3.12. □

Proposition 4.3.14. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G et $\mathfrak{S} = (S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ une famille de sous-groupes où, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, S_π/K désigne un π-sous-groupe de Hall de H/K. Alors $\mathfrak{S}$ est une base de Sylow généralisée de H/K si et seulement si $S_{\pi_1}S_{\pi_2}/K = S_{\pi_2}S_{\pi_1}/K$ pour tout $\pi_1 \subseteq \mathcal{P}^+$ et tout $\pi_2 \subseteq \mathcal{P}^+$.*

Preuve. – Supposons que $\mathfrak{S}$ soit une base de Sylow généralisée de H/K. Soient $\pi_1 \subseteq \mathcal{P}^+$, $\pi_2 \subseteq \mathcal{P}^+$ et $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Montrons que $S_{\pi_1}S_{\pi_2}/K = S_{\pi_2}S_{\pi_1}/K$. On fait la preuve par induction sur le rang de H^-. On peut donc supposer $K^- = 1$. Pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, on a $S_{\pi\cap\sigma} \leq S_\sigma \cap S_\pi$ puisque $\mathfrak{S}$ est une base de Sylow généralisée de H/K, et on obtient $(S_\sigma \cap S_\pi)/K = S_{\pi\cap\sigma}/K$. Donc $((S_\sigma \cap S_\pi)/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow généralisée de S_π/K. Supposons $Q = Q(S_\pi^-) \neq 1$. Alors le corollaire 4.2.8 dit que $(S_\sigma \cap S_\pi)Q/QK$ est un σ-sous-groupe de Hall de S_π/QK pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$. L'hypothèse d'induction donne le résultat dans S_π/QK, et on obtient $S_{\pi_1}S_{\pi_2} = S_{\pi_2}S_{\pi_1}$. On peut donc supposer $Q = 1$ et, comme $K^- = 1$, S_π^- est abélien d'après la proposition 2.7.9. Soient $\mathcal{O}_1/K = \mathcal{O}_{\pi_1}(S_\pi^- K/K)$ et $\mathcal{O}_2/K = \mathcal{O}_{\pi_2}(S_\pi^- K/K)$. Comme S_π^- est abélien, on déduit de la proposition 4.1.12 et du corollaire 3.2.6 (ii) que $S_{\pi_1} = \mathcal{O}_1^- S_{\pi_1\setminus\{\infty\}}$ et $S_{\pi_2} = \mathcal{O}_2^- S_{\pi_2\setminus\{\infty\}}$. Le fait 4.3.4 donne

$$S_{\pi\setminus\{\infty\}} = \prod_{p\in\pi\setminus\{\infty\}} S_p, \quad S_{\pi_1\setminus\{\infty\}} = \prod_{p\in\pi_1\setminus\{\infty\}} S_p \quad \text{et} \quad S_{\pi_2\setminus\{\infty\}} = \prod_{p\in\pi_2\setminus\{\infty\}} S_p$$

On en déduit $S_{\pi_1\setminus\{\infty\}} S_{\pi_2\setminus\{\infty\}} = S_{\pi\setminus\{\infty\}} = S_{\pi_2\setminus\{\infty\}} S_{\pi_1\setminus\{\infty\}}$, d'où le résultat.

Réciproquement, supposons $S_{\pi_1} S_{\pi_2}/K = S_{\pi_2} S_{\pi_1}/K$ pour tout $\pi_1 \subseteq \mathcal{P}^+$ et tout $\pi_2 \subseteq \mathcal{P}^+$. Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$ et $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ avec $\sigma \subseteq \pi$. Montrons que S_π contient S_σ. Soit $S = S_\pi S_\sigma$. Comme on a $S_\pi S_\sigma = S_\sigma S_\pi$, le lemme 4.3.13 dit que S est un sous-groupe localement clos de H. Si R/K est un π-sous-groupe de Hall de S/K contenant S_σ/K, alors le théorème 4.1.18 dit qu'il existe $s \in S$ tel que $R = S_\pi^s$. Comme $S = S_\pi S_\sigma$, on a $S_\sigma \leq R = S_\pi$. Ceci prouve que $\mathfrak{S}$ est une base de Sylow généralisée de H/K. $\square$

4.4 Sous-groupes couvrants de Hall

Nous considérons un autre analogue aux sous-groupes de Hall pour les groupes de rang de Morley fini : les *sous-groupes π-couvrants de Hall* (définition 4.4.5). π désigne ici un sous-ensemble de $\mathcal{P}^+$. Cette notion est à la base de la théorie des formations qui sera développée dans le chapitre 5. En effet, la théorie des sous-groupes de Hall généralisés s'avère inefficace pour développer la théorie des formations des sections localement closes. Cela est principalement dû au fait qu'en général, les sous-groupes de Hall généralisés ne se préservent pas par quotientement (exemple 4.2.7).

L'idée est basée sur le fait que, pour $\pi \subseteq \mathcal{P}$, un π-sous-groupe de Hall d'un groupe fini résoluble G est un sous-groupe *minimal* parmis ceux qui couvrent chaque π-section normalisée par G. En fait, il s'agit de voir les sous-groupes de Hall comme étant des objets minimaux. D'autre part, si H est un π-sous-groupe de Hall d'un groupe fini résoluble G, alors H vérifie deux propriétés duales l'une de l'autre :

(i) $H \cap A$ est un π-sous-groupe de Hall de A pour tout sous-groupe normal A de G ;

(ii) HK/K est un π-sous-groupe de Hall de G/K pour tout sous-groupe normal K de G.

Or, les sous-groupes de Hall généralisés vérifient (i) et pas (ii) (corollaire 4.1.19 et exemple 4.2.7), tandis que, pour les sous-groupes π-couvrants de Hall, c'est l'inverse (corollaire 4.4.10 et exemple 4.4.13). Finalement, les deux notions sont équivalentes lorsque $\infty \notin \pi$ (lemme 4.4.7). Dans cette section, nous montrons des propriétés des sous-groupes π-couvrants de Hall, en particulier l'existence et la conjugaison (théorème 4.4.9). Toutefois, pour étudier les sous-groupes π-couvrants de Hall, nous utilisons fortement l'étude des sous-groupes de Hall généralisés (cf. preuve du théorème 4.4.17).

Nous commençons cette section par un rappel sur les *π^*-groupes.* Ces sous-groupes ont été introduits dans [12] par A. V. Borovik et A. Nesin. Cette notion a d'abord constitué un outil important pour établir les faits 4.2.2 et 4.2.3. Les π^*-groupes auront un rôle crucial dans l'étude des sous-groupes couvrants de Hall.

Définition 4.4.1. – **([12])** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et $\pi \subseteq \mathcal{P}$. G est un* π^*-groupe *si G est connexe et si ses sections définissables, abéliennes et connexes sont π-divisibles.*

Fait 4.4.2. – **([12], Borovik, Nesin)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et connexe et $\pi \subseteq \mathcal{P}$. Alors les π^*-sous-groupes maximaux de G sont conjugués. Si K est l'un d'eux, alors $G = B_\pi(G)K$ et $B_\pi(G) \cap K$ est un sous-groupe fini.*

Lemme 4.4.3. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et connexe et $\pi \subseteq \mathcal{P}$. Alors les π^*-sous-groupes maximaux de G sont exactement les sous-groupes de G de la forme*

$B_{\pi^\perp}(G)D$ où D désigne un sous-groupe définissable et divisible maximal d'un sous-groupe de Carter de G.

Preuve. – Soient D un sous-groupe définissable et divisible maximal d'un sous-groupe de Carter C de G (C existe d'après le théorème 2.2.9 (*ii*)). Alors $B_{\pi^\perp}(G)D$ est un π^*-sous-groupe de G. Montrons la maximalité de $B_{\pi^\perp}(G)D$. Soit K un π^*-sous-groupe maximal de G qui contient $B_{\pi^\perp}(G)D$. Alors $K \cap B_\pi(G)$ est fini d'après le fait 4.4.2, donc $B_{\pi^\perp}(G)$ est d'indice fini dans $K \cap Q(G)$. La proposition 2.7.9 dit que $G/Q(G)$ est abélien et divisible, donc le corollaire 2.4.8 dit que $G = CQ(G)$. Soit B le sous-groupe d'exposant borné définissable et connexe maximal de C. Comme C est définissable et connexe d'après le théorème 2.4.7, le fait 1.3.13 montre que $C = B * D$, en particulier $G/Q(G) = (BQ(G)/Q(G))(DQ(G)/Q(G))$. Comme $G/Q(G)$ est divisible, on obtient $G = DQ(G) = KQ(G)$. On en déduit que $B_{\pi^\perp}(G)D$ est d'indice fini dans K, donc $B_{\pi^\perp}(G)D = K$ puisque K est connexe. Ainsi, $B_{\pi^\perp}(G)D$ est bien un π^*-sous-groupe maximal de G. Par conjugaison des π^*-sous-groupes maximaux de G (fait 4.4.2), tous les π^*-sous-groupes maximaux de G sont de cette forme, ce qui prouve le lemme. □

Lemme 4.4.4. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble tel que $G = G^+$ et $\pi \subseteq \mathcal{P}$. Si T est un π^*-sous-groupe maximal de G, alors $T = T^+$.*

Preuve. – Le fait 4.4.2 montre que $G = B_\pi(G)T$, en particulier $B_\pi(G)T^+$ est normal dans G. Or T/T^+ est localement fini, donc $G/B_\pi(G)T^+$ aussi. Ainsi on a $G^+ \leq B_\pi(G)T^+$, et $G = B_\pi(G)T^+$. Mais le fait 4.4.2 dit que $B_\pi(G) \cap T$ est fini, donc T/T^+ est fini. T étant connexe, on a le résultat. □

Définition 4.4.5. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G, R/K une section localement close de H et $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Si R couvre toutes les π-sections localement closes normales de H, on dit que R/K est un* sous-groupe π-couvrant *de H/K. De plus, si R/K est un sous-groupe π-couvrant minimal de H/K, alors R/K est un* sous-groupe π-couvrant de Hall *de H/K.*

Pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, on notera $\pi^- = \pi \setminus \{\infty\}$. Dans toute cette partie, G désigne un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G et π un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}^+$.

Lemme 4.4.6. – *Si R/K est un sous-groupe π-couvrant de H/K et si S/K est un sous-groupe π-couvrant de R/K, alors S/K est un sous-groupe π-couvrant de H/K.*

Preuve. – Soit E/D une π-section localement close et normale de H. Alors $E = (R \cap E)D$ puisque R/K est un sous-groupe π-couvrant de H/K. Or $(R \cap E)/(R \cap D)$ est une π-section localement close et normale de R, donc on a $R \cap E = (S \cap E)(R \cap D)$. Ceci prouve que $E = (S \cap E)D$, et on en déduit le résultat. □

Lemme 4.4.7. – *Si $\pi \subseteq \mathcal{P}$, alors les sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K sont exactement les π-sous-groupes de Hall de H/K. De plus, tout sous-groupe π-couvrant de H/K contient un π-sous-groupe de Hall de H/K.*

Preuve. – Soit R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K. Montrons que R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. D'après le corollaire 3.2.6 (*ii*), R/K est un sous-groupe π-couvrant de H/K. Supposons que R/K contienne strictement un sous-groupe π-couvrant S/K de H/K. D'après la proposition 3.5.7, il existe un ordinal α et une suite croissante $(H_i)_{i \leq \alpha}$ de sous-groupes normaux et localement clos de H avec $H_0 = K$, $H_\alpha = H$, $H_\mu = \cup_{i<\mu} H_i$ pour tout ordinal limite μ et, pour tout $i < \alpha$, la section H_{i+1}/H_i est H/K-d_{loc}-minimale. Comme on a $S < R$, il existe un plus petit $j \leq \alpha$ tel qu'on ait $S \cap H_j < R \cap H_j$.

j est nécessairement un ordinal successeur, donc il existe un ordinal k tel que $j = k+1$. Par minimalité de j, on a $S \cap H_k = R \cap H_k$. Ainsi S ne couvre pas H_j/H_k. Comme R n'évite pas H_j/H_k et comme H_j/H_k est H/K-d_{loc}-minimal, H_j/H_k est une p-section pour un $p \in \pi$. Ceci contredit le fait que S/K soit un sous-groupe π-couvrant de H/K, et R/K est bien un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K.

Supposons maintenant que R/K soit un sous-groupe π-couvrant de H/K. Soit S/K un π-sous-groupe de Hall de R/K. Le corollaire 3.2.6 (ii) montre que S/K est un sous-groupe π-couvrant de R/K. On déduit alors du lemme 4.4.6 que S/K est sous-groupe π-couvrant de H/K. Soit T/K un π-sous-groupe de Hall de H/K qui contient S/K. Alors T/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K d'après ce qui précède, donc $T = S$. Ceci finit la preuve du lemme. □

Lemme 4.4.8. – *On suppose $\infty \in \pi$. Si L/K est un sous-groupe π-couvrant de H/K et si $(K \cap H^+)^- = 1$, alors L contient un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+.*

Preuve. – Montrons $H^+ = L^+Q(H^+)$. $H^+K/Q(H^+)K$ étant abélien (proposition 2.7.9), $H^+K/Q(H^+)K$ possède un unique $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall $V/Q(H^+)K$. Alors H^+K/V est sans torsion et LV contient H^+K, d'où $H^+K = L^+V$. $L^+V/L^+Q(H^+)K$ est localement fini, donc $(L^+V)^+$ est contenu dans $L^+Q(H^+)K$. Mais on a $(L^+V)^+K/K = (H^+K)^+K/K = H^+K/K = L^+V/K$, ce qui prouve $L^+V = L^+Q(H^+)K$. Comme H^+ centralise K puisque $(K \cap H^+)^- = 1$, $L^+Q(H^+)$ est normal dans L^+V. Comme $(K \cap H^+)^- = 1$, K est localement fini, donc $L^+V/L^+Q(H^+)$ aussi. Ainsi on obtient $H^+ = (H^+K)^+ = (L^+V)^+ \leq L^+Q(H^+)$ et on a bien $H^+ = L^+Q(H^+)$.

$B_\pi(H^+)$ étant un π-groupe, L contient $B_\pi(H^+)$. On en déduit que $H^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)(L \cap H^+)^-$. Soit U un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de $(L \cap H^+)^-$. Alors $(L \cap H^+)^- = B_{\pi^\perp}((L \cap H^+)^-)U$ d'après le fait 4.4.2. Mais $B_{\pi^\perp}((L \cap H^+)^-)$ est contenu dans $B_{\pi^\perp}(H^+)$ puisque $\infty \in \pi$ et $H^+/Q(H^+)$ est divisible et abélien (proposition 2.7.9), donc $H^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)U$. Soit U_1 un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ qui contient U. Alors $U_1 \cap B_{\pi^\perp}(H^+)$ est fini d'après le fait 4.4.2, donc U est d'indice fini dans U_1 et $U = U_1$. Ceci prouve que L contient un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+. □

Théorème 4.4.9. – *Tout sous-groupe π-couvrant de H/K contient un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K et les sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K sont conjugués dans H/K. De plus, si R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K, alors :*

(i) R/K contient un π-sous-groupe de Hall de H/K ;

(ii) si $\infty \in \pi$, il existe un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal T de H^+ et un π^--sous-groupe de Hall S de H qui normalise T tel que $R = TKS$ et $S \cap H^+ \leq T$, en particulier $R \cap H^+K = TK$;

(iii) si $\infty \in \pi$ et si R_1 est un sous-groupe de H de la forme TKS où T est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ et S un π^--sous-groupe de Hall de H qui normalise TK, R_1/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K.

Preuve. – D'après le lemme 4.4.7 et le théorème 3.2.5, il suffit de prouver le théorème lorsque $\infty \in \pi$. Donc, durant toute la preuve, on supposera $\infty \in \pi$. On va d'abord prouver ceci :

$(*)$ *Soient T un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ et R/TK un π^--sous-groupe de Hall de $N_H(T)K/TK$. Alors R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K et tout sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K est de cette forme. De plus, $R \cap H^+K = TK$ et tout sous-groupe π-couvrant de H/K contient un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K.*

Notons $K_1 = (K \cap H^+)^-$, $\overline{K} = K/K_1$, $\overline{T} = TK_1/K_1$ et $\overline{H} = H/K_1$. Supposons l'assertion $(*)$ vraie quand $K_1 = 1$. D'après le fait 4.4.2, $\overline{T}$ est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+/K_1. Aussi T est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de TK_1, donc $N_H(T)K_1/K_1 =$

$N_{\overline{H}}(\overline{T})$ d'après le fait 4.4.2 et l'argument de Frattini. On en déduit que $(N_{\overline{H}}(\overline{T})\overline{K})/(\overline{TK}) = (N_H(T)K/K_1)/(\overline{TK})$. Ce qui précède montre que $(R/K_1)/(\overline{TK})$ est un π^--sous-groupe de Hall de $(N_{\overline{H}}(\overline{T})\overline{K})/(\overline{TK})$. Comme $(\overline{K} \cap H^+/K_1)^- = 1$ et comme on suppose $(*)$ vraie lorsque $K_1 = 1$, on a montré que $(R/K_1)/\overline{K}$ est un sous-groupe π-couvrant de Hall de $\overline{H}/\overline{K}$ et tout sous-groupe π-couvrant de Hall de $\overline{H}/\overline{K}$ est de cette forme. Aussi, tout sous-groupe π-couvrant de $\overline{H}/\overline{K}$ contient un sous-groupe π-couvrant de Hall de $\overline{H}/\overline{K}$. De plus, on a $R/K_1 \cap H^+K/K_1 = \overline{TK}$. Donc l'assertion $(*)$ est toujours vraie, et on peut alors supposer $K_1 = 1$. Ainsi H^+ centralise K, donc K normalise T.

On va d'abord montrer que R/K contient un π^--sous-groupe de Hall de H/K. R/TK étant un π^--sous-groupe de Hall de $N_H(T)/TK$, le corollaire 3.2.6 (ii) dit que R contient un π^--sous-groupe de Hall S de $N_H(T)$. D'après le fait 4.4.2 et l'argument de Frattini on a $H = B_{\pi^\perp}(H^+)N_H(T)$. Alors, d'après le corollaire 3.2.6 (ii), $SB_{\pi^\perp}(H^+)/B_{\pi^\perp}(H^+)$ est un π^--sous-groupe de Hall de $H/B_{\pi^\perp}(H^+)$. Comme $B_{\pi^\perp}(H^+)$ est un $\pi^\perp$-groupe, on a montré que S est un π^--sous-groupe de Hall de H. En particulier SK/K est un π^--sous-groupe de Hall de H/K d'après le corollaire 3.2.6 (ii) et, ainsi, R/K contient un π^--sous-groupe de Hall de H/K.

Montrons que R/K est un sous-groupe π-couvrant de H/K. Soit E/D une π-section localement close et normale de H avec $K \leq D$. Comme, d'après ce qui précède, R/K contient un π^--sous-groupe de Hall de H/K, R couvre E/E^+D. Donc on peut supposer $E = E^+D$. Par le fait 4.4.2, les $(\pi^\perp)^*$-sous-groupes maximaux de H^+ sont conjugués, donc T contient un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal V de E^+. Or, comme $E^+/(E^+ \cap D)$ est un π-groupe, $E^+ \cap D$ contient $B_{\pi^\perp}(E^+)$ et $E^+ = V(E^+ \cap D)$ d'après le fait 4.4.2. On en déduit que $E = E^+D = VD \leq TD \leq RD$ et R couvre E/D.

Montrons que $R \cap H^+K = TK$ et que R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Comme R/TK est un π^--groupe et comme $H^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)T$ d'après le fait 4.4.2, on a $R \cap H^+K = TK$. Soit S/K un sous-groupe π-couvrant de H/K contenu dans R/K. Le lemme 4.4.8 dit que S contient un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal U de H^+, lequel est nécessairement contenu dans $(R \cap H^+)^-$. Comme T est aussi un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+, il existe $x \in (R \cap H^+)^-$ tel que $U^x = T$ d'après le fait 4.4.2. Comme R normalise T, on obtient $T = U \leq S$. Comme $R/(R \cap H^+K)$ est un π^--groupe, le lemme 4.4.7 et le corollaire 3.2.6 (ii) donnent $R = S(R \cap H^+K)$. Or on a vu que $R \cap H^+K = TK$, donc on a montré que $R = S$ et que R/K est bien un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K.

Finissons la preuve de l'assertion $(*)$. Soit L/K un sous-groupe π-couvrant de H/K. Montrons que L/K contient un sous-groupe de H/K conjugué à R/K. Par le lemme 4.4.8, L contient un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal U de H^+. Le fait 4.4.2 permet de supposer $U = T$. Alors T est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de $(L \cap H^+)^-$. Soit Q un π^--sous-groupe de Hall de $N_L(T)$. On a $L = B_{\pi^\perp}((L \cap H^+)^-)N_L(T)$ d'après le fait 4.4.2 et l'argument de Frattini, donc $QB_{\pi^\perp}((L \cap H^+)^-)/B_{\pi^\perp}((L \cap H^+)^-)$ est un π^--sous-groupe de Hall de $L/B_{\pi^\perp}((L \cap H^+)^-)$ d'après le corollaire 3.2.6 (ii). Comme $B_{\pi^\perp}((L \cap H^+)^-)$ est un $\pi^\perp$-groupe, on en déduit que Q est un π^--sous-groupe de Hall de L. Le lemme 4.4.7 dit que L contient un π^--sous-groupe de Hall de H, donc le théorème 3.2.5 dit que Q est un π^--sous-groupe de Hall de H. Par le corollaire 3.2.6 (ii), QTK/TK est un π^--sous-groupe de Hall de $N_H(T)/TK$. Ainsi, QTK/TK est conjugué à R/K (théorème 3.2.5) et, comme L contient QTK, L/K contient un sous-groupe de H/K conjugué à R/K. Comme on a vu que R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K, ceci finit la preuve de l'assertion $(*)$.

Montrons que les sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K sont conjugués. Soient R_1/K et R_2/K deux sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K. D'après $(*)$, il existe deux $(\pi^\perp)^*$-sous-groupes maximaux T_1 et T_2 de H^+ contenus respectivement dans R_1 et R_2 et telles que R_1/T_1K et R_2/T_2K soient des π^--sous-groupes de Hall de $N_H(T_1)K/T_1K$ et $N_H(T_2)K/T_2K$ respectivement. Le fait 4.4.2 permet de supposer $T_1 = T_2$ et le théorème 3.2.5 donnent la conjugaison de R_1/T_1K et de R_2/T_1K dans $N_H(T_1)K/T_1K$. Il reste donc à montrer (i), (ii) et (iii).

Montrons d'abord (iii). Soit R/K un sous-groupe de H/K de la forme TKS/K où T est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ et S un π^--sous-groupe de Hall de H qui normalise TK. Alors R normalise $(TK\cap H^+)^-$. Mais le fait 4.4.2 et l'argument de Frattini montrent que $N_H((TK\cap H^+)^-) \leq (TK\cap H^+)^- N_H(T) \leq KN_H(T)$, donc R est contenu dans $KN_H(T)$ et R/TK est un π^--sous-groupe de Hall de $N_H(T)K/TK$ d'après le corollaire 3.2.6 (ii). L'assertion $(*)$ permet de conclure.

Montrons (i) et (ii). Soit Q/K un π-sous-groupe de Hall de H/K. D'après la proposition 4.1.17 il existe un sous-groupe de Carter C de H^+ tel que Q normalise $B_\pi(H^+)CK$. Soient D le sous-groupe définissable et divisible maximal de C et $T = B_\pi(H^+)D$. On va montrer que TK contient $QTK\cap H^+K$. Par le fait 1.3.13, $D(C\cap B_\pi(H^+)K)/(C\cap B_\pi(H^+)K)$ est le sous-groupe divisible maximal de $C/(C\cap B_\pi(H^+)K)$, donc $TK/B_\pi(H^+)K$ est le sous-groupe divisible maximal de $CB_\pi(H^+)K/B_\pi(H^+)K$. Alors TK est normal dans $N_H(B_\pi(H^+)CK)$ et Q normalise TK. Le lemme 4.4.3 dit que T est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ et le fait 4.4.2 donne $H^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)T$. Donc $(QTK\cap H^+K)/TK(= (QTK\cap B_{\pi^\perp}(H^+))TK/TK)$ est à la fois un π-groupe et un $\pi^\perp$-groupe et, par conséquent, est trivial. Ainsi TK contient $QTK\cap H^+K$.

Comme $QTK\cap H^+K \leq TK$, QTK/TK est localement fini et QTK/TK est un π^--groupe. Le fait 4.4.2 et l'argument de Frattini donnent $N_H(TK) = N_H((TK\cap H^+)^-) = (TK\cap H^+)^- N_H(T) = KN_H(T)$, donc QTK est contenu dans $KN_H(T)$. Par le théorème 4.1.18, Q/K contient un π^--sous-groupe de Hall de H/K, donc le corollaire 3.2.6 (ii) dit que QTK/TK est un π^--sous-groupe de Hall de $N_H(T)K/TK$. Puisque T est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+, l'assertion $(*)$ montre que QTK/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Comme les sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K sont conjugués, on peut supposer $R = QTK$ et on a donc prouvé (i). De plus, on a prouvé que $R\cap H^+K = (Q\cap H^+K)TK = TK$. D'après le théorème 4.1.18, Q/K contient un π^--sous-groupe de Hall de H/K et, donc, le corollaire 3.2.6 (ii) montre que Q contient un π^--sous-groupe de Hall S_0 de H. Le corollaire 3.2.6 (ii) dit que $R = QTK = S_0TK$ puisque QTK/TK est localement fini. Comme S_0 normalise TK, S_0 normalise $(TK\cap H^+)^-$. Notons $B = B_{\pi^\perp}((TK\cap H^+)^-)$. Alors le fait 4.4.2 dit que $(TK\cap H^+)^- = BT$. Soit S un π^--sous-groupe de Hall de $N_{BTS_0}(T)$. D'après l'argument de Frattini, on a $BTS_0 = BN_{BTS_0}(T)$. SB/B est un π^--sous-groupe de Hall de BTS_0/B d'après le corollaire 3.2.6 (ii). Comme B est un $\pi^\perp$-groupe, on en déduit que S est un π^--sous-groupe de Hall de BTS_0. Le théorème 3.2.5 dit alors que S est un π^--sous-groupe de Hall de H donc, comme R/TK est un π^--groupe, on a $R = TKS$ d'après le corollaire 3.2.6 (ii). Comme on a $T(S\cap H^+) = (B_{\pi^\perp}(H^+)\cap T(S\cap H^+))T$ d'après le fait 4.4.2, $T(S\cap H^+)/T$ est à la fois un π-groupe et un $\pi^\perp$-groupe, donc $S\cap H^+ \leq T$. Ceci finit la preuve de (ii). □

Corollaire 4.4.10. – *Si A/K est une section localement close et normale de H et si R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K, alors RA/A est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/A.*

Preuve. – Si $\pi \subseteq \mathcal{P}$, le lemme 4.4.7 et le corollaire 3.2.6 (ii) donnent le résultat. Sinon c'est le théorème 4.4.9 (ii) et (iii) qui permet de conclure. □

Corollaire 4.4.11. – *Si R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K, et si U/K est une section localement close de H qui contient R/K, alors R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de U/K.*

Preuve. – Si $\pi \subseteq \mathcal{P}$, le lemme 4.4.7 donne le résultat. Sinon le théorème 4.4.9 (ii) dit qu'il existe T un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ et S un π^--sous-groupe de Hall de H qui normalise T tel que $R = TKS$. Comme $R \leq U$, on a $T \leq U$ donc $T^+ \leq U^+$. Alors le lemme 4.4.4 dit que T est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de U^+, donc le théorème 4.4.9 (iii) donne le résultat. □

Corollaire 4.4.12. – *Si H/K est localement nilpotent, H/K possède un unique sous-groupe π-couvrant de Hall.*

Preuve. – On peut supposer $K^- = 1$ et $\infty \in \pi$. Alors H^+ est nilpotent et divisible d'après la proposition 3.3.6. En particulier, H^+ est un $(\pi^\perp)^*$-groupe. Soit S_1/K l'unique π^--sous-groupe de Hall de H/K. Par le corollaire 3.2.6 (ii), il existe S un π^--sous-groupe de Hall de H tel que $S_1 = SK$. D'après le théorème 4.4.9, H/K possède un sous-groupe π-couvrant de Hall R/K et on a $R = H^+KS = H^+S_1$. Ainsi, R/K est normal dans H/K donc, par conjugaison des sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K (théorème 4.4.9), R/K est l'unique sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. □

L'exemple 4.4.13 montre que l'intersection d'un sous-groupe π-couvrant de Hall ($\pi \subseteq \mathcal{P}^+$) d'un groupe de rang de Morley fini résoluble G avec un sous-groupe normal et localement clos T de G n'est pas nécessairement un sous-groupe π-couvrant de Hall de T. La proposition 4.4.14 donne une information sur les intersections des sous-groupes π-couvrants de Hall ($\pi \subseteq \mathcal{P}^+$) des sections localement closes des groupes de rang de Morley fini résolubles avec les sous-groupes normaux.

Exemple 4.4.13. – Si G est un pur groupe isomorphe à $\mathbb{C}^*$ et si on choisit T un sous-groupe non trivial et localement fini de G, alors G est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de G. Pourtant $\{1\}$ est l'unique sous-groupe ∞-couvrant de Hall de T, et $G \cap T \neq 1$.

Proposition 4.4.14. – *Si A/K est une section localement close et normale de H et si R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K, alors $(R \cap A)/K$ contient un unique sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K.*

Preuve. – Si $\pi \subseteq \mathcal{P}$, le lemme 4.4.7 et le corollaire 3.2.6 (i) donnent le résultat. Donc on peut supposer $\infty \in \pi$. On peut aussi supposer $K^- = 1$. Le théorème 4.4.9 (ii) montre qu'il existe un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal T de H^+ et un π^--sous-groupe de Hall S de H qui normalise T tels que $R = TKS$. Alors $(T \cap A^+)^\circ$ est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de A^+ d'après le fait 4.4.2 et, d'après le corollaire 3.2.6 (i), $S \cap A$ est un π^--sous-groupe de Hall de A qui normalise $(T \cap A^+)^\circ$. Donc le théorème 4.4.9 (iii) dit que $(T \cap A^+)^\circ K(S \cap A)/K$ est un sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K, en particulier $(R \cap A)/K$ est un sous-groupe π-couvrant de A/K.

Supposons que $(R \cap A)/K$ ait un unique sous-groupe π-couvrant de Hall V/K. Comme $(R \cap A)/K$ est un sous-groupe π-couvrant de A/K, le lemme 4.4.6 et le corollaire 4.4.11 montrent que V/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K. Or V/K est l'unique sous-groupe π-couvrant de Hall de $(R \cap A)/K$, donc le corollaire 4.4.11 dit que $(R \cap A)/K$ ne contient pas d'autre sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K. Il suffit donc de démontrer le résultat pour $H = R$.

Soit U/K un sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K. Le théorème 4.4.9 (ii) montre qu'il existe un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal T de H^+ tel que R normalise TK et, aussi, $R \cap H^+K = TK$. Mais on a $R = H$, donc $H^+K = TK$ et, comme H^+ centralise K puisque $K^- = 1$ (fait 1.2.6), T centralise K et T est normal dans H^+. K étant localement fini, H/T est aussi localement fini, donc $H^+(= R^+) = T$. Ainsi R^+ est un $(\pi^\perp)^*$-groupe, donc $(A \cap R^+)^-$ aussi. En particulier $(A \cap R^+)^-K/K$ est contenu dans tout sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K. Par le corollaire 4.4.10, il suffit de montrer que $U/(A \cap R^+)^-K$ est l'unique sous-groupe π-couvrant de Hall de $A/(A \cap R^+)^-K$, c'est-à-dire qu'on peut supposer $(A \cap R^+)^- \leq K$. Comme $K^- = 1$, on a $(A \cap R^+)^- = 1$ et le fait 1.2.6 montre que A centralise R^+. Comme $A^+ \leq (A \cap R^+)^-$, A est localement fini. D'après le lemme 4.4.7, U/K est un π^--sous-groupe de Hall de A/K. Soit $\mathcal{O}/K = \mathcal{O}_\pi(R/K)$. Alors $U\mathcal{O}/\mathcal{O}$ est un π^--sous-groupe de Hall de $A\mathcal{O}/\mathcal{O}$ d'après le corollaire 3.2.6 (ii). Comme A est localement fini, U/K et $U\mathcal{O}/\mathcal{O}$ sont des π-sous-groupes de Hall de A/K et de $A\mathcal{O}/\mathcal{O}$ respectivement, en particulier $U = U\mathcal{O} \cap A$. Si $U\mathcal{O}/\mathcal{O}$ est l'unique π-sous-groupe de Hall de $A\mathcal{O}/\mathcal{O}$ alors tout sous-groupe π-couvrant de Hall de A/K est contenu dans $(U\mathcal{O} \cap A)/K = U/K$, donc on a le résultat et on peut alors supposer $\mathcal{O}/K = 1$.

U/K est un π-sous-groupe de Hall de A/K, donc UR^+/R^+K est un π-sous-groupe de Hall de AR^+/R^+K. Comme R/R^+K est un π-groupe, on en déduit que $UR^+ = AR^+$. Ainsi on a $A/K = U/K * (A \cap R^+K)/K$ et U/K est l'unique π-sous-groupe de Hall de A/K et, donc, U/K est normal dans R/K. Comme $\mathcal{O}/K = 1$, on a montré que $U/K = 1$, donc A/K n'a qu'un seul π-sous-groupe de Hall (c'est le sous-groupe trivial). □

Lemme 4.4.15. – *Si U/K est une section localement close de H/K et si U/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant (de U/K) propre, alors U/K est contenu dans un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K.*

Preuve. – Si $\infty \notin \pi$, le lemme 4.4.7 donne le résultat, donc on peut supposer $\infty \in \pi$. On peut aussi supposer $K^- = 1$. On fait la preuve par induction sur le rang de H^+. Soit B/K l'intersection des sous-groupes π-couvrants de Hall de H/K. Alors B est un sous-groupe localement clos et normal de H. U/K étant sans sous-groupe π-couvrant propre, $U/(U \cap B^-K)$ est aussi sans sous-groupe π-couvrant propre, donc UB^-/B^-K et $(UB^-/B^-)/(B^-K/B^-)$ aussi. Si $B^- \neq 1$, l'hypothèse d'induction dit qu'il existe un sous-groupe π-couvrant de Hall $(S/B^-)/(B^-K/B^-)$ de $(H/B^-)/(B^-K/B^-)$ avec $UB^- \leq S$. D'après le corollaire 4.4.10, il existe un sous-groupe π-couvrant de Hall S_0/K de H/K avec $S = S_0B^-$. Par le choix de B, S_0 contient B, donc S/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K qui contient U/K, et on peut supposer $B^- = 1$.

D'après le fait 1.3.13, on a $F(H^+)^\circ = B_{\pi^\perp}(H^+) * D$ où D est l'unique $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de $F(H^+)^\circ$. Mais D est normal dans H^+ et, donc, D est contenu dans tout $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+. D'après le théorème 4.4.9 (*ii*), D est contenu dans B, donc $D = 1$ puisque $B^- = 1$. En particulier, si H^+ est nilpotent alors H^+ et H sont localement finis, et le lemme 4.4.7 donne le résultat. Ainsi on peut supposer H^+ non nilpotent et on a $F(H^+)^\circ = B_{\pi^\perp}(H^+) = Q(H^+)$ et $F(H^+)$ ne contient pas de $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe non trivial. Donc, d'après le fait 1.3.19, tout $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe de H^+ est abélien. Si $U^+ = 1$, le lemme 4.4.7 donne le résultat, donc on peut supposer $U^+ \neq 1$. Soit T un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de U^+. Le théorème 4.4.9 (*ii*) donne $U^+K = U \cap U^+K = TK$. Comme $K^- = 1$, T centralise K. Alors TK/T est un groupe localement fini et on obtient $U^+ \leq (U^+K)^+ = (TK)^+ \leq T$, et $U^+ = T$ est un $(\pi^\perp)^*$-groupe. Comme $F(H^+)$ ne contient pas de $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe non trivial, U^+ intersecte finiment $F(H^+)$ et U^+ est abélien (fait 1.3.19). Alors, comme $U^+ \neq 1$, $E_{H^+}(U^+)$ est un sous-groupe définissable, anormal et propre de H^+ d'après les corollaires 2.4.5 et 2.6.2, donc $N_H(E_{H^+}(U^+))^+ < H^+$. Aussi, comme K centralise H^+ du fait que $K^- = 1$, on a $K \leq N_H(E_{H^+}(U^+))$. Donc l'hypothèse d'induction dit que U/K est contenu dans un sous-groupe π-couvrant de Hall R/K de $N_H(E_{H^+}(U^+))/K$. Par le théorème 4.4.9 (*ii*), on a $R = T_1KS_1$ où T_1 est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de $N_H(E_{H^+}(U^+))^+$ et S_1 un π^- sous-groupe de Hall de $N_H(E_{H^+}(U^+))$ qui normalise T_1. Comme H^+ centralise K, T_1 centralise K et R normalise T_1.

$E_{H^+}(U^+)$ étant un sous-groupe anormal de H^+, la proposition 2.7.9 et le corollaire 2.6.2 donnent $H^+ = Q(H^+)E_{H^+}(U^+)$, d'où $H^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)E_{H^+}(U^+)$. Comme $B_{\pi^\perp}(H^+)$ est normal dans H^+, on obtient $H^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)E_{H^+}(U^+)^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)N_H(E_{H^+}(U^+))^+$. Le fait 4.4.2 donne alors $H^+ = B_{\pi^\perp}(H^+)T_1$. Ceci prouve que T_1 est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+. Soit S_2 un π^--sous-groupe de Hall de $N_H(T_1)$ qui contient S_1. Comme $H = B_{\pi^\perp}(H^+)N_H(T_1)$ d'après le fait 4.4.2 et l'argument de Frattini, le corollaire 3.2.6 (*ii*) montre que S_2 est un π^--sous-groupe de Hall de H. Le théorème 4.4.9 (*iii*) montre que T_1KS_2/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Comme T_1KS_2/K contient U/K, on a finit la preuve. □

Définition 4.4.16. – *Une* base de Sylow couvrante *de H/K est une famille $(R_\pi/K)_{\pi \subseteq \mathcal{P}^+}$ où R_π/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et où $R_\sigma \leq R_\pi$ pour tout $\sigma \subseteq \pi$.*

Théorème 4.4.17. – (*i*) *H/K possède une unique classe de conjugaison de bases de Sylow couvrantes.*

De plus, si $(R_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow couvrante de H/K, alors :

(ii) il existe une base de Sylow généralisée $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ de H/K et un sous-groupe de Carter C de H^+ tels que, pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$, S_π normalise $B_\pi(H^+)CK$, $R_\pi = S_\pi$ si $\infty\notin\pi$ et, si on note D le sous-groupe définissable et divisible maximal de C, $R_\pi = S_\pi D$ si $\infty\in\pi$. De plus on a $R_\pi R_\sigma = R_{\pi\cup\sigma}$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$ et tout $\sigma\subseteq\mathcal{P}^+$;

(iii) la base de Sylow généralisée $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ de (ii) est l'unique base de Sylow généralisée de H/K telle que $S_\pi\le R_\pi$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$.

Preuve. – On va d'abord montrer l'existence d'une base de Sylow couvrante $(R_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ de H/K qui vérifie (*ii*). D'après le théorème 4.3.8, H/K possède une base de Sylow généralisée $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$. Aussi, la proposition 4.3.9 dit qu'il existe un sous-groupe de Carter C de H^+ tel que S_π normalise $B_\pi(H^+)CK$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$. C a un unique sous-groupe D définissable et divisible maximal. Alors S_π normalise $B_\pi(H^+)DK$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$. Pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$, on note $T_\pi = B_\pi(H^+)D$. Le lemme 4.4.3 montre que, pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$ tel que $\infty\in\pi$, T_π est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+. Alors, pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$ tel que $\infty\in\pi$, $R_\pi/K = T_\pi S_{\pi^-}/K$ est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K d'après le théorème 4.4.9 (*iii*). De même, si $\infty\notin\pi$, le lemme 4.4.7 dit que $R_\pi/K = S_\pi/K$ est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Soient $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$ et $\sigma\subseteq\mathcal{P}^+$. Si $\infty\notin\pi\cup\sigma$, alors on a $R_\pi R_\sigma = S_\pi S_\sigma = S_{\pi\cup\sigma} = R_{\pi\cup\sigma}$. Si $\infty\in\pi\setminus\sigma$, alors on a $R_\pi R_\sigma = B_\pi(H^+)DS_{\pi^-}S_\sigma = B_\pi(H^+)DS_{\pi^-\cup\sigma} = B_{\pi\cup\sigma}(H^+)DS_{(\pi\cup\sigma)^-} = R_{\pi\cup\sigma}$. De façon analogue on a $R_\pi R_\sigma = R_{\pi\cup\sigma}$ si $\infty\in\sigma\setminus\pi$. De même, si $\infty\in\pi\cap\sigma$, alors on a $R_\pi R_\sigma = (B_\pi(H^+)DS_{\pi^-})(B_\sigma(H^+)DS_{\sigma^-}) = B_{\pi\cup\sigma}(H^+)DS_{(\pi\cup\sigma)^-} = R_{\pi\cup\sigma}$. On en déduit que $(R_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow couvrante de H/K qui vérifie (*ii*).

Montrons que toute base de Sylow couvrante $(U_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ de H/K est conjuguée à $(R_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$. On va montrer cela par induction sur le rang de H^+. On peut supposer $K^- = 1$. Supposons d'abord H^+ abélien. Alors H^+ est divisible (corollaire 3.3.5). Le théorème 4.4.9 (*ii*) dit que H^+K/K est l'unique sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K, et on a $R_\infty = H^+K = U_\infty$. Comme $(U_p/K)_{p\in\mathcal{P}}$ et $(R_p/K)_{p\in\mathcal{P}}$ sont deux bases de Sylow de H/K et sont conjuguées d'après la proposition 4.3.3, on peut supposer $U_\pi = R_\pi$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}$. Ainsi, si $\infty\in\pi\subseteq\mathcal{P}^+$, on a $R_\pi = H^+R_{\pi^-} = U_\pi$. On en déduit qu'on peut supposer H^+ non abélien. Par la proposition 2.7.9, $Q(H^+)$ contient un sous-groupe H-minimal A. D'après le corollaire 4.4.10 $(R_\pi A/AK)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ et $(U_\pi A/AK)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ sont des bases de Sylow couvrantes de H/AK, et elles sont conjugués par hypothèse d'induction. Donc on peut supposer $R_\pi A = U_\pi A$ pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$. Soit $p\in\mathcal{P}^+$ tel que A soit un p-groupe. Alors $R_{p^\perp}/K$ et $U_{p^\perp}/K$ sont deux sous-groupes $p^\perp$-couvrants de Hall de $R_{p^\perp}A/K(= U_{p^\perp}A/K)$ d'après le corollaire 4.4.11. Le théorème 4.4.9 dit alors que $R_{p^\perp}$ et $U_{p^\perp}$ sont A-conjugués. Donc on peut supposer $R_{p^\perp} = U_{p^\perp}$.

Montrons que DK contient $A\cap R_{p^\perp}$. Si $p=\infty$ alors $R_{p^\perp}/K$ est un $p^\perp$-groupe d'après le lemme 4.4.7 et $A\cap R_{p^\perp}$ est contenu dans K. Donc on peut supposer $p\ne\infty$. Soit S un p-sous-groupe de Sylow de D. Le corollaire 3.2.6 (*ii*) dit que $SKB_{p^\perp}(H^+)/KB_{p^\perp}(H^+)$ est un p-sous-groupe de Sylow de $DKB_{p^\perp}(H^+)/KB_{p^\perp}(H^+)$. Comme $B_{p^\perp}(H^+)K/K$ est un $p^\perp$-groupe, on en déduit que SK/K est un p-sous-groupe de Sylow de $B_{p^\perp}(H^+)DK/K$. Mais $B_{p^\perp}(H^+)D$ est un p^*-sous-groupe maximal de H^+ d'après le lemme 4.4.3, donc on a $R_{p^\perp} = B_{p^\perp}(H^+)DS_{p'}$ et $R_{p^\perp}\cap H^+K = B_{p^\perp}(H^+)DK$ d'après le théorème 4.4.9 (*ii*). En particulier, $(A\cap R_{p^\perp})K/K$ est un p-sous-groupe normal de $B_{p^\perp}(H^+)DK/K$ et on obtient $A\cap R_{p^\perp}\le SK\le DK$.

On déduit de l'inégalité $A\cap R_{p^\perp}\le DK$ que, pour tout $\pi\subseteq p^\perp$ tel que $\infty\in\pi$, on a $R_\pi = R_\pi A\cap R_{p^\perp} = U_\pi A\cap U_{p^\perp}$. Donc U_π/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K contenu dans R_π/K, d'où $U_\pi = R_\pi$. Comme on a $R_{\{p,\infty\}^\perp}A = U_{\{p,\infty\}^\perp}A$, on a $R_{\{p,\infty\}^\perp}(A\cap R_{p^\perp}) = U_{\{p,\infty\}^\perp}(A\cap U_{p^\perp})$. Donc le lemme 4.4.7 dit que $R_{\{p,\infty\}^\perp}/K$ et $U_{\{p,\infty\}^\perp}/K$ sont des p'-sous-groupes de Hall de $R_{\{p,\infty\}^\perp}(A\cap R_{p^\perp})/K$ et le théorème 3.2.5 dit qu'il existe $a\in A\cap R_{p^\perp}$ tel que $R^a_{\{p,\infty\}^\perp} = U_{\{p,\infty\}^\perp}$. Comme on a $a\in A$, a appartient à R_π pour tout $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$ tel que $p\in\pi$. Aussi, comme on a $a\in A\cap R_{p^\perp}\le DK$, a appartient à R_π pour tout $\pi \subseteq p^\perp$ tel que $\infty \in \pi$. Ainsi, on a $R^a_\pi = R_\pi = U_\pi$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ qui contient p ou ∞. Si $\pi \subseteq \{p,\infty\}^\perp$, alors on a

$$R^a_\pi = R^a_\pi \cap R_\pi A \cap R^a_{\{p,\infty\}^\perp} = R^a_\pi \cap U_\pi A \cap U_{\{p,\infty\}^\perp} = R^a_\pi \cap U_\pi(A \cap U_{\{p,\infty\}^\perp})$$

Comme A/K est un p-groupe et comme $U_{\{p,\infty\}^\perp}/K$ est un p'-groupe (lemme 4.4.7), on obtient $R^a_\pi = R^a_\pi \cap U_\pi$ et R^a_π/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K contenu dans U_π/K, d'où $R^a_\pi = U_\pi$. On a donc prouvé la conjugaison des bases de Sylow couvrantes de H/K.

Il reste à montrer l'unicité de $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$. Soit $(V_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ une base de Sylow généralisée de H/K telle que $V_\pi \leq R_\pi$ pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Soit $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Montrons que $((R_\pi \cap H^+K)/K)'$ est un π-groupe. Si $\infty \notin \pi$ le lemme 4.4.7 donne le résultat. Sinon, comme $B_\pi(H^+)D$ est un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+, le théorème 4.4.9 donne $R_\pi \cap H^+K = (B_\pi(H^+)D)K$. Or D' est sans torsion (fait 1.3.13) et est contenu dans $Q(H^+)$ (proposition 2.7.9), donc D' est contenu dans $B_\pi(H^+)$. Ceci prouve que $(R_\pi \cap H^+K)' \leq B_\pi(H^+)K$, donc $((R_\pi \cap H^+K)/K)'$ est bien un π-groupe. On en déduit que $(R_\pi \cap H^+K)/K$ a un unique π-sous-groupe de Hall $\mathcal{O}/K$. En particulier $\mathcal{O} = V_\pi \cap H^+K = S_\pi \cap H^+K$ et, aussi, les π-sous-groupes de Hall de $H/\mathcal{O}$ sont localement fini. Ainsi, d'après le corollaire 3.2.6 (*ii*), on a $S_\pi\mathcal{O}/\mathcal{O} = S_{\pi^-}\mathcal{O}/\mathcal{O}$ et $V_\pi\mathcal{O}/\mathcal{O} = V_{\pi^-}\mathcal{O}/\mathcal{O}$. Mais, par le lemme 4.4.7, on a nécessairement $S_{\pi^-} = R_{\pi^-} = V_{\pi^-}$, donc $S_\pi = V_\pi$. Ceci finit la preuve du théorème. □

On dira que la base de Sylow généralisée $(S_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ du théorème ci-dessus est la *base de Sylow généralisée de H/K associée à $(R_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$*.

L'exemple ci-dessous dit que, si π et σ sont deux sous-ensembles de $\mathcal{P}^+$, on n'a pas nécessairement $R_\pi \cap R_\sigma = R_{\pi\cap\sigma}$.

Exemple 4.4.18. – On considère un pur groupe G isomorphe à $\mathbb{C}^*$. Pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}$, on note S_π le π-sous-groupe de Hall de G. Pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, on note $R_\pi = S_\pi$ si $\infty \notin \pi$ et $R_\pi = G$ sinon. Alors $(R_\pi)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow couvrante de G. Or, si $\pi \subseteq \mathcal{P}$ n'est pas vide, on a $R_\pi \cap R_{\pi^\perp} = S_\pi \neq 1 (= R_{\pi\cap\pi^\perp})$.

Nous finissons ce chapitre en donnant une caractérisation des bases de Sylow couvrantes. Cette caractérisation est analogue à la proposition 4.3.14 :

Proposition 4.4.19. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G et $\mathfrak{G} = (R_\pi/K)_{\pi\subseteq\mathcal{P}^+}$ une famille de sous-groupes où, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, R_π/K désigne un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Alors $\mathfrak{G}$ est une base de Sylow couvrante de H/K si et seulement si $R_{\pi_1}R_{\pi_2}/K = R_{\pi_2}R_{\pi_1}/K$ pour tout $\pi_1 \subseteq \mathcal{P}^+$ et tout $\pi_2 \subseteq \mathcal{P}^+$.*

Preuve. – Le théorème 4.4.17 (*ii*) dit que, si $\mathfrak{G}$ est une base de Sylow couvrante de H/K, alors on a $R_{\pi_1}R_{\pi_2}/K = R_{\pi_1\cup\pi_2}/K = R_{\pi_2}R_{\pi_1}/K$ pour tout $\pi_1 \subseteq \mathcal{P}^+$ et tout $\pi_2 \subseteq \mathcal{P}^+$. Donc il suffit de montrer la réciproque. Supposons $R_{\pi_1}R_{\pi_2}/K = R_{\pi_2}R_{\pi_1}/K$ pour tout $\pi_1 \subseteq \mathcal{P}^+$ et tout $\pi_2 \subseteq \mathcal{P}^+$. Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$ et $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ avec $\sigma \subseteq \pi$. Montrons que R_π contient R_σ. Soit $R = R_\pi R_\sigma$. Comme on a $R_\pi R_\sigma = R_\sigma R_\pi$, le lemme 4.3.13 dit que R est un sous-groupe localement clos de H. Le lemme 4.4.6 montre que R_σ/K ne contient pas de sous-groupe σ-couvrant (de R_σ/K) propre. Donc R_σ/K ne contient pas de sous-groupe π-couvrant propre puisque $\sigma \subseteq \pi$. Le lemme 4.4.15 dit que R_σ/K est contenu dans un sous-groupe π-couvrant de Hall S/K de R/K. Le théorème 4.4.9 dit qu'il existe $r \in R$ tel que $S = R^r_\pi$. Comme $R = R_\pi R_\sigma$, on a $R_\sigma \leq S = R_\pi$. Ceci prouve que $\mathfrak{G}$ est une base de Sylow couvrante de H/K. □

Chapitre 5

Théories des formations

W. Gaschütz a introduit dans [34] la *théorie des formations* pour les groupes finis résolubles. Cette théorie unifie, et généralise considérablement, les notions de sous-groupes de Carter et de sous-groupes de Hall. Elle a ensuite été généralisée à beaucoup de classes de groupes localement finis et localement résolubles : groupes (localement nilpotents)-par-finis [72], FC-groupes [75], groupes localement finis linéaires [82] et $\mathfrak{U}$-groupes [33]. Tout ces travaux ont été unifiés dans [48]. Mais des théories des formations ont été établies pour d'autres classes de groupes : classe des groupes polycycliques ([59] et [60]), groupes localement finis et localement résolubles satisfaisant min-p pour tout entier premier p [22].... Ces théories permettent de mieux comprendre la structure des groupes appartenant à ces classes en fournissant une approche générale à certains phénomènes de recouvrements. On rappelle qu'il existe une théorie des formations pour les sous-groupes localement finis des groupes de rang de Morley fini résolubles (voir [4]). Elle utilise fortement les résultats connus sur les $\mathfrak{U}$-groupes. Dans ce chapitre, nous établissons deux théories des formations : la première concerne les sections localement closes résolubles et généralise la théorie des formations de [4], la seconde s'établit dans le contexte des groupes de rang de Morley fini résolubles et connexes.

Pour ce qui concerne la théorie des formations des sections localement closes résolubles, l'idée de départ était de suivre l'approche de [33] pour la théorie des formations des $\mathfrak{U}$-groupes. La difficulté est que la classe de groupes que nous étudions n'est pas une classe de groupes localement finis. Toutefois, l'étude semblait être rendue possible par l'introduction des notions d'∞-*élément* et de *sous-groupe de Hall généralisé* (définition 4.1.1). Finalement, il n'a pas été possible de concrétiser l'idée du départ, la principale raison étant que les sous-groupes de Hall généralisés ne se préservent pas, en général, par quotientement (exemple 4.2.7). A l'inverse des sous-groupes de Hall généralisés, les sous-groupes π-couvrants de Hall (pour $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$) sont préservés par quotientement (corollaire 4.4.10). C'est essentiellement grâce à cette propriété que nous pouvons établir une théorie des formations pour les sections localement closes.

A partir de la notion de sous-groupe couvrant de Hall, nous introduisons une notion de $\mathcal{M}$-*normalisateur* (définition 5.1.6) similaire à celle de [33]. On montre que ces sous-groupes sont préservés par quotientement (théorème 5.1.9). Ce résultat est similaire au lemme 2.13 de [33], mais la preuve est très différente. Le point qui va marquer notre différence avec [33] est l'impossibilité de trouver un théorème de "couverture et d'évitement" analogue au théorème 3.4 de [33] (exemples 5.1.11 et 5.1.12). Ceci aura des conséquences importantes sur l'étude des *projecteurs* (définition 5.3.7). Pour remédier à ce problème, nous introduisons la notion de $\mathcal{M}^*$-*normalisateur* (définition 5.1.21). Ce sont des sous-groupes des $\mathcal{M}$-normalisateurs qui ne sont pas très loin de vérifier la propriétés de couverture et d'évitement. Nous montrons alors des propriétés des $\mathcal{M}^*$-normalisateurs qui vont nous permettre de suivre la stratégie de [33] pour la fin de la preuve du théorème principal (théorème 5.3.14).

De façon analogue à [33], nous définissons des *fonctions de préformation* f sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$

auxquelles on associe des classes de groupes $\mathfrak{F}(f)$ et $\mathfrak{F}^*(f)$ (définition 5.2.2). La classe $\mathfrak{F}(f)$ est une $\mathfrak{R}$-*formation* (définition 5.2.14, proposition 5.2.26) à la différence de $\mathfrak{F}^*(f)$ (exemple 5.2.27). Par contre, c'est la classe $\mathfrak{F}^*(f)$ qui permet de travailler et d'arriver à des résultats généraux, puisque les projecteurs en rapport avec $\mathfrak{F}(f)$ n'existent pas toujours (exemple 5.3.8). Les fonctions f les plus intéressantes sont celles pour lesquelles tout π-groupe dans $\mathfrak{F}^*(f)$ est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. Le théorème 5.2.12 donne un critère pour que f vérifie cette propriété. Nous arrivons au théorème principal concernant les formations (théorème 5.3.14). Il concerne l'existence et la conjugaison des projecteurs. Ce théorème unifie plusieurs résultats importants concernants les groupes de rang de Morley fini résolubles : conjugaison des sous-groupes de Hall et des sous-groupes de Hall généralisés, le théorème 5 de [4] (qui concerne les formations), existence et conjugaison des sous-groupes π-couvrants de Hall, existence et conjugaison des sous-groupes de Carter (proposition 5.3.18).

Ensuite, on donnera une application du théorème 5.3.14 à la superrésolubilité. On montre l'existence d'une fonction de préformation f_s qui détermine quelles sections localement closes sont localement superrésolubles (proposition 5.4.19). Comme cette fonction vérifie les hypothèses du théorème 5.2.12, on a $\mathfrak{F}(f_s) = \mathfrak{F}^*(f_s)$ et on en déduit un théorème sur les projecteurs localement superrésolubles (théorème 5.4.21). Cette section est aussi l'occasion d'étudier plus précisément les sous-groupes localement superrésolubles des groupes de rang de Morley fini et, notamment, de montrer qu'ils sont toujours (localement nilpotents)-par-(finis, abéliens) (proposition 5.4.7).

Dans la section 5.5, on établit une théorie des formations pour les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles : la *théorie des formations connexes*. La méthode utilisée pour développer cette théorie des formations est très différente de celle utilisée pour les sections localement closes. En effet, nous n'utilisons plus la théorie des sous-groupes de Hall. Nous avons juste besoin de l'existence d'une notion de sous-groupe de Frattini (définition 2.3.1). Il est intéressant de remarquer que nous traitons notre cas de la même façon qu'est traité le cas fini dans [69] p. 269 à 274. Le résultat principal de cette section (théorème 5.5.5) est alors indépendant des chapitres 3 et 4, et de la théorie des formations des sections localement closes. Seuls la section 2.1 et quelques faits biens connus (inscrits au chapitre 1) sont nécessaires.

Nous illustrons cette théorie par deux exemples de formations connexes saturées : les groupes de rang de Morley fini connexes et nilpotents (formation connexe $\mathcal{N}^\circ$) et les π^*-groupes. Nous montrons que, si G désigne un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble alors, les sous-groupes $\mathcal{N}^\circ$-couvrants de G sont exactement les sous-groupes de Carter de G (corollaire 5.5.14). La seconde formation permet de retrouver un théorème de Borovik et Nesin sur les π^*-groupes (fait 4.4.2, corollaire 5.5.17).

Nous finissons ce chapitre en établissant un lien entre les deux théories des formations que nous avons étudiées (proposition 5.6.5).

5.1 $\mathcal{M}$-normalisateurs

Pour étudier les groupes résolubles finis, P. Hall avait introduit la notion de *normalisateur de système* [37]. L'usage de notions analogues s'avère nécessaire pour l'étude de certaines théories des formations de classes de groupes infinis ([33], [72]). La théorie des formations des sections localement closes nécessite de bonnes connaissances des $\mathcal{M}$-*normalisateurs* et $\mathcal{M}^*$-*normalisateurs* (définitions 5.1.6 et 5.1.21), qui sont des analogues des normalisateurs de système des groupes finis. Le résultat principal de cette section dit que les $\mathcal{M}$-normalisateurs sont préservés par quotientement (théorème 5.1.9).

Pour commencer, on montre un résultat concernant les normalisateurs des sous-groupes de Hall des sections localement closes des groupes de rang de Morley fini (corollaire 5.1.4). Le contrexemple suivant montre qu'un normalisateur d'un p-sous-groupe ($p \in \mathcal{P}$) d'un groupe de rang de Morley fini n'est pas nécessairement localement clos.

Exemple 5.1.1. – On considère K un pur corps de caractéristique non nulle, algébriquement clos, indénombrable, et $G = K_+ \rtimes K^*$ où K^* agit linéairement sur K_+. Si u désigne un élément non trivial de K_+, x un élément d'ordre infini de K^* et $V = \langle u, x\rangle$, alors $N_G(V \cap K_+)$ contient x et pas $d(x)$. En particulier, $N_G(V \cap K_+)$ n'est pas localement clos.

Dans toute cette section G désigne un groupe de rang de Morley fini résoluble et H/K une section localement close de G.

Lemme 5.1.2. – *Soit V/K une section localement close de H qui intersecte trivialement $(H/K)^{\mathcal{LN}}_{loc}$. Alors $N_{H/K}(V/K)$ est une section localement close et V/K est hypercentral dans $N_{H/K}(V/K)$.*

Preuve. – Soit $L/K = (H/K)^{\mathcal{LN}}_{loc}$. Pour tout ordinal i, on note $Z_i/L = Z_i(H/L)$ et $V_i = Z_i \cap V$. Z_i et V_i sont localement clos pour tout ordinal i (corollaire 3.1.34). H/L étant hypercentral (proposition 3.4.18), il existe un ordinal μ tel que $V = V_\mu$. Soit $N/K = N_{H/K}(V/K)$. Alors N/K centralise V_{i+1}/V_i pour tout $i < \mu$. Donc V/V_0 est contenu dans $Z_\infty(N/V_0)$. Comme V/K intersecte trivialement L/K, on a $V_0 = L \cap V = K$, et V/K est hypercentral dans N/K. On note $C_0 = H$; pour tout ordinal $i < \mu$, $C_{i+1}/V_i = C_{C_i/V_i}(V_{i+1}/V_i)$ et, pour tout ordinal limite $\nu \leq \mu$, $C_\nu = \bigcap_{i<\nu} C_i$. Alors C_μ/K normalise V/K et, comme N/K est contenu dans C_μ/K, $C_\mu = N$. Mais C_μ est localement clos d'après la proposition 3.1.33, donc on a prouvé le lemme. □

Proposition 5.1.3. – *Si V/K est une section localement close de H telle que $V/K \cap (H^+K/K)^{\mathcal{LN}}_{loc}$ soit normal dans H/K, alors $N_{H/K}(V/K)$ est une section localement close de H.*

Preuve. – Supposons $V/K \cap H^+K/K$ normal dans H/K. Soient $N/K = N_{H/K}(V/K)$, $U/K = V/K \cap H^+K/K$ et $C/U = C_{H/U}(V/U)$. Alors C est localement clos d'après la proposition 3.1.33. Mais on a $[N_{H^+K/K}(V/K), V/K] \leq U/K$, donc $N_{H^+K/K}(V/K) = (C \cap H^+)K/K$ et, comme H/H^+K est localement fini, on en déduit que N est localement clos.

Finissons la preuve de la proposition. Soit $B/K = V/K \cap (H^+K/K)^{\mathcal{LN}}_{loc}$. Quitte à considérer H/B au lieu de H/K, on peut supposer $B/K = 1$. Le lemme 5.1.2 montre que $N_{H^+K/K}(V/K \cap H^+K/K)$ est une section localement close. Comme H/H^+K est localement fini, $N_{H/K}(V/K \cap H^+K/K)$ est une section localement close. Soit $N/K = N_{H/K}(V/K \cap H^+K/K)$. Alors, $V/K \cap N^+K/K$ étant contenu dans H^+K/K, $V/K \cap N^+K/K$ est normal dans N/K. Ce qui précède dit que $N_{N/K}(V/K)$ est une section localement close. Mais $N_{H/K}(V/K)$ est contenu dans N/K, donc $N_{H/K}(V/K)$ est une section localement close. □

Corollaire 5.1.4. – *Soient L/K une section normale et localement close de H/K, $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et R/K un π-sous-groupe de Hall de L/K. Alors $N_{H/K}(R/K)$ est une section localement close de G.*

Preuve. – Soit $A/K = (H^+K/K)^{\mathcal{LN}}_{loc}$. D'après le corollaire 4.1.24 et la proposition 5.1.3, il suffit de montrer que $R/K \cap A/K$ est normal dans H/K. A/K est un sous-groupe nilpotent de H/K d'après le fait 1.3.18, donc $A/K \cap L/K$ possède un unique π-sous-groupe de Hall R_0/K (proposition 4.1.12). De plus, R_0/K est normal dans H/K. Comme on a $R/K \cap A/K = R_0/K$ d'après le corollaire 4.1.19, on a prouvé le corollaire. □

Corollaire 5.1.5. – *Si L/K est une section localement close et normale de H/K et si R/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de L/K ($\pi \subseteq \mathcal{P}^+$), alors $N_H(R)$ est localement clos.*

Preuve. – Si $\infty \notin \pi$ le lemme 4.4.7 et le corollaire 5.1.4 donnent le résultat. Donc on peut supposer $\infty \in \pi$. Alors, d'après le théorème 4.4.9 (*ii*), il existe un $(\pi^\perp)^*$-sous-groupe maximal T de H^+ et un π^--sous-groupe de Hall de S de H qui normalise T tel que $R = TKS$ et $R \cap H^+K = TK$. T étant contenu dans $(TK \cap H^+)^-$, on a $TK = (TK \cap H^+)^-K$, en particulier $N_H(TK) = N_H((TK \cap H^+)^-)$ est localement clos. Ainsi $R/TK(= STK/TK)$ est un π^--sous-groupe de Hall de $N_H(TK)/TK$ d'après le corollaire 3.2.6 (*ii*). Le corollaire 5.1.4 dit alors que $N_{N_H(TK)}(R)$ est localement clos. Comme $R \cap H^+K = TK$, $N_H(R)$ normalise TK et, ainsi, $N_H(R)(= N_{N_H(TK)}(R))$ est localement clos. $\square$

Ce résultat est essentiel pour la suite. Notamment, il montre que les $\mathcal{M}$-*normalisateurs* (définition 5.1.6) sont des sections localement closes.

Définition 5.1.6. – *Pour tout* $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\pi}$ *est un* π-système *de* H/K *si, pour tout* $\sigma \subseteq \pi$, M_σ *est un sous-groupe normal et localement clos de* H *et si* $M_{\sigma_1} \leq M_{\sigma_2}$ *dès que* $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$.

Soit $\mathfrak{P} = (R_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ *une base de Sylow couvrante de* H/K. *D'après la proposition 4.4.14, pour tout* $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, *il existe un unique sous-groupe* $\sigma^\perp$*-couvrant de Hall* $R^*_{\sigma^\perp}/K$ *de* M_σ/K *contenu dans* $(R_{\sigma^\perp} \cap M_\sigma)/K$. *Alors* $R_\pi/K \cap \bigcap_{\sigma\subseteq\pi} N_{H/K}(R^*_{\sigma^\perp}/K)$ *est appelé* $\mathcal{M}$-normalisateur *de* H/K *associé à* $\mathfrak{P}$.

Remarque 5.1.7. – Par le théorème 4.4.17, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et tout π-système $\mathcal{M}$ d'une section localement close H/K d'un groupe de rang de Morley fini résoluble, les $\mathcal{M}$-normalisateurs de H/K sont conjugués. De plus, le corollaire 5.1.5 montre que ce sont des sections localement closes de H.

On peut remarquer que les $\mathcal{M}$-normalisateurs dans le sens "classique" (cf. [33]) correspondent exactement aux nôtres si H/K est localement fini. Ainsi le fait 5.1.8 peut se déduire du lemme 2.13 de [33] (où il est donné pour les $\mathfrak{U}$-groupes) et du fait qu'un $\mathcal{M}_c$-groupe résoluble de torsion est un $\mathfrak{U}$-groupe [16].

Fait 5.1.8. – **([33], lemme 2.13, Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *On suppose* H/K *localement fini. Soient* A/K *un sous-groupe normal de* H/K, $\pi \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\pi}$ *un* π-système *de* H/K, $\overline{\mathcal{M}} = (M_\sigma A/A)_{\sigma\subseteq\pi}$, $(R_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ *une base de Sylow couvrante de* H/K *et* N/K *le* $\mathcal{M}$*-normalisateur de* H/K *associé à* $(R_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$. *Alors* NA/A *est le* $\overline{\mathcal{M}}$*-normalisateur de* H/A *associé à* $(R_\sigma A/A)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ *et tout* $\overline{\mathcal{M}}$*-normalisateur de* H/A *est de cette forme.*

Théorème 5.1.9. – *Soient* A/K *une section localement close et normale de* H, $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\pi}$ *un* π*-système de* H/K, $\overline{\mathcal{M}} = (M_\sigma A/A)_{\sigma\subseteq\pi}$, $\mathfrak{P} = (R_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ *une base de Sylow couvrante de* H/K *et* N/K *le* $\mathcal{M}$*-normalisateur de* H/K *associé à* $\mathfrak{P}$. *Alors* NA/A *est le* $\overline{\mathcal{M}}$*-normalisateur de* H/A *associé à* $(R_\sigma A/A)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ *et tout* $\overline{\mathcal{M}}$*-normalisateur de* H/A *est de cette forme.*

Preuve. – Par conjugaison des $\overline{\mathcal{M}}$-normalisateurs dans H/A (remarque 5.1.7), il suffit de montrer que NA/A est le $\overline{\mathcal{M}}$-normalisateur de H/A associé à $(R_\sigma A/A)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$. On peut supposer $K^- = 1$. Pour tout $\sigma \subseteq \pi$, on note $R^*_{\sigma^\perp}/K$ l'unique sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall de M_σ/K contenu dans $R_{\sigma^\perp}/K \cap M_\sigma/K$. Alors, pour tout $\sigma \subseteq \pi$, $R^*_{\sigma^\perp}(A\cap M_\sigma)/(A\cap M_\sigma)$ est un sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall de $M_\sigma/(A\cap M_\sigma)$ d'après le corollaire 4.4.10. Donc, pour tout $\sigma \subseteq \pi$, $R^*_{\sigma^\perp}A/A$ est un sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall de $M_\sigma A/A$. Soit M/A le $\overline{\mathcal{M}}$-normalisateur de H/A associé à $(R_\sigma A/A)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$. Comme, pour tout $\sigma \subseteq \pi$, $R_{\sigma^\perp}A/A \cap M_\sigma A/A$ contient $R^*_{\sigma^\perp}A/A$, la proposition 4.4.14 donne $M/A = R_\pi A/A \cap \bigcap_{\sigma\subseteq\pi} N_{H/A}(R^*_{\sigma^\perp}A/A)$, en particulier $AN \leq M$. Montrons l'inclusion inverse. Pour cela on va d'abord montrer le résultat lorsque $\pi = \mathcal{P}^+$ (partie I). Ensuite, dans la partie II, on traitera le cas général.

I.1) *Si* A/K *est un* p*-groupe pour un* $p \in \mathcal{P}^+$.

Soient $N_0 = N_M(R^*_{p^\perp})$ et $N_1 = N_{N_0}(R^*_{\{p,\infty\}^\perp})$. $R^*_{p^\perp}/K$ étant un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall de M_p/K, il n'a pas de sous-groupe $p^\perp$-couvrant propre. Mais $R^*_{p^\perp}/K$ est un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de $AR^*_{p^\perp}/K$ donc, par le lemme 4.4.15, $R^*_{p^\perp}/K$ est un sous-groupe

$p^{\perp}$-couvrant de Hall de $AR^*_{p^{\perp}}/K$. Par le théorème 4.4.9 et l'argument de Frattini on obtient $M = AN_0$. D'autre part on a $AR^*_{\{p,\infty\}^{\perp}} \cap R^*_{p^{\perp}} = (A \cap R^*_{p^{\perp}})R^*_{\{p,\infty\}^{\perp}}$ et le lemme 4.4.7 dit que $R^*_{\{p,\infty\}^{\perp}}/K$ est un $\{p,\infty\}^{\perp}$-sous-groupe. Donc $R^*_{\{p,\infty\}^{\perp}}/K$ est un $\{p,\infty\}^{\perp}$-sous-groupe de Hall de $(A \cap R^*_{p^{\perp}})R^*_{\{p,\infty\}^{\perp}}/K$ et le théorème 3.2.5 et l'argument de Frattini montrent que $N_0 = (A \cap R^*_{p^{\perp}})N_1$. On en déduit que $M = AN_1$. Il suffit donc de montrer que N_1 est contenu dans N. Soit $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$.

Si $p \notin \sigma$, $R^*_{\sigma^{\perp}}$ contient $A \cap M_\sigma$. Donc, comme M/A normalise $R^*_{\sigma^{\perp}}A/A$, M/K normalise $R^*_{\sigma^{\perp}}/K$.

Si $p \in \sigma$ et $\infty \in \sigma$, on a $R^*_{\{p,\infty\}^{\perp}} \cap R^*_{\sigma^{\perp}}A = R^*_{\sigma^{\perp}}(R^*_{\{p,\infty\}^{\perp}} \cap A) = R^*_{\sigma^{\perp}}$ puisque $R^*_{\{p,\infty\}^{\perp}}/K$ est un $\{p,\infty\}^{\perp}$-groupe d'après le lemme 4.4.7. En particulier N_1/K normalise $R^*_{\sigma^{\perp}}/K$.

On peut donc supposer $p \in \sigma$ et $\infty \notin \sigma$ (donc $p \in \mathcal{P}$). Pour tout $\nu \subseteq \mathcal{P}^+$, on note U_ν/K l'unique sous-groupe ν-couvrant de Hall de M_σ/K contenu dans $R_\nu/K \cap M_\sigma/K$ (donc $U_{\sigma^{\perp}} = R^*_{\sigma^{\perp}}$). Alors $(U_\nu/K)_{\nu \subseteq \mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow couvrante de M_σ/K. D'après le théorème 4.4.17, il existe un sous-groupe définissable et divisible maximal D d'un sous-groupe de Carter de M^+_σ tel que $D \leq U_\nu$ pour tout $\nu \subseteq \mathcal{P}^+$ qui contient ∞ et tel que U_ν normalise $B_\nu(M^+_\sigma)DK$ pour tout $\nu \subseteq \mathcal{P}^+$. Comme N_0/K normalise $R^*_{p^{\perp}}/K$ et comme $p \in \sigma$, N_0/K normalise $U_{p^{\perp}}/K$. En particulier $N_1/K(\leq N_0/K)$ normalise $R^*_{\sigma^{\perp}}A/K \cap U_{p^{\perp}}/K = R^*_{\sigma^{\perp}}(A \cap U_{p^{\perp}})/K$. Si on note $B = B_{p^{\perp}}(M^+_\sigma)$, alors BD est un p^*-sous-groupe maximal de M^+_σ (lemme 4.4.3) et le théorème 4.4.9 (iii) montre que $U_{p^{\perp}} = (BD)KU_{p'}$. Comme BDK est normal dans $U_{p^{\perp}}$ (par le choix de D) et comme A/K est un p-groupe, ceci montre que $A \cap U_{p^{\perp}} = A \cap BDK$ (corollaire 3.2.6 (i)). Soit $D_1 = AB \cap DK$. Comme tous les p-éléments de AB/K sont contenus dans A/K, $(D_1 \cap A)/K$ est l'unique p-sous-groupe de Sylow de D_1/K. En particulier le corollaire 3.2.6 (ii) montre que, comme $D_1/(B \cap D_1)K$ est un p-groupe, $D_1 = (D_1 \cap A)(B \cap D_1)$. Ainsi on obtient $A \cap U_{p^{\perp}} = A \cap B(AB \cap DK) = A \cap B(D_1 \cap A)(B \cap D_1) = (D_1 \cap A)(A \cap B)$. Or $A \cap B \leq K$ puisque A/K est un p-groupe, donc on a $A \cap U_{p^{\perp}} = A \cap DK$. Mais DK est contenu dans $U_{\sigma^{\perp}}(= R^*_{\sigma^{\perp}})$ d'après le choix de D, donc on a montré que N_1/K normalise $R^*_{\sigma^{\perp}}/K$. On en déduit que N_1 est contenu dans N, d'où $M = AN$.

I.2) *On peut supposer $Q(H^+) = 1$, A localement fini. De plus, on peut supposer qu'on a soit $A \leq H^+K$, soit $A \cap H^+K = K$.*

D'après I.1) on peut supposer $A = A^\circ K$ et $A \cap Q(d(H)^\circ) \leq K$, en particulier A/K est abélien et central dans $H^\circ K/K$ (proposition 2.7.9). On peut même supposer que, si $Q(d(H)^\circ)$ possède un q-élément non trivial pour $q \in \mathcal{P}$, A/K ne possède pas de q-élément non trivial. Soit A_0/K le sous-groupe de torsion maximal de A/K. Alors A/A_0 est sans torsion, donc on peut supposer $A = A_0$ et A est localement fini puisque $K^- = 1$. De plus, on peut supposer $A \leq H^+K$ ou $A \cap H^+K = K$.

Montrons que $Q(H^+) \cap M$ est contenu dans N. Il suffit de montrer que, pour tout $p \in \mathcal{P}^+$ et tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, $B_p(H^+) \cap M$ normalise $R^*_{\sigma^{\perp}}$. Soient $p \in \mathcal{P}^+$, $x \in B_p(H^+) \cap M$ et $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$. Si $p \notin \sigma$, on a $[x, R^*_{\sigma^{\perp}}] \leq B_p(H^+) \cap M_\sigma \leq R^*_{\sigma^{\perp}}$. Si $p \in \sigma$ et $\infty \in \sigma$, alors $R^*_{\sigma^{\perp}}/K$ est un $\sigma^{\perp}$-groupe d'après le lemme 4.4.7. Donc, comme on a $A \cap Q(d(H)^\circ) \leq K$, $[x, R^*_{\sigma^{\perp}}]$ est contenu dans $B_p(H^+) \cap R^*_{\sigma^{\perp}}A \leq B_p(H^+) \cap A \leq Q(d(H)^\circ) \cap A \leq K$. On peut donc supposer $p \in \sigma$ et $\infty \notin \sigma$.

Le théorème 4.4.9 (ii) dit qu'il existe un σ^*-sous-groupe maximal T de M^+_σ et un σ'-sous-groupe de Hall S de M_σ tels que TK soit normal dans $R^*_{\sigma^{\perp}}$ et $R^*_{\sigma^{\perp}} = TKS$. On en déduit que $(B_p(H^+)TA \cap R^*_{\sigma^{\perp}}A)/TA$ est à la fois un σ'-groupe et un p-groupe, d'où $B_p(H^+) \cap R^*_{\sigma^{\perp}}A \leq TA$. Or, si $A \cap H^+K = K$, $TA \cap H^+$ est contenu dans TK et on obtient $B_p(H^+) \cap R^*_{\sigma^{\perp}}A \leq TK \leq R^*_{\sigma^{\perp}}$. Sinon on a $A \leq H^+K$ et $A = (A \cap H^+)K$. Comme A/K est central dans $H^\circ K/K$ et comme $K^- = 1$, $A \cap H^+$ est central dans H^+, donc $A \cap H^+$ est contenu dans tout sous-groupe de Carter de H^+. Soient C un sous-groupe de Carter de H^+ et D son sous-groupe définissable et divisible maximal. Comme C est définissable et connexe d'après le théorème 2.4.7, le fait 1.3.13 montre que $C = (C \cap B_{\mathcal{P}}(H^+)) * D$. Comme A/K ne possède pas de q-élément non trivial ($q \in \mathcal{P}$) si $Q(d(H)^\circ)$ en possède un, et comme $A \cap H^+$ est contenu dans C, on a $(A \cap H^+)K/K = (A \cap D)K/K$. Or $B_{\sigma^\perp}(H^+)D$ est un σ^*-sous-groupe maximal de H^+ d'après le lemme 4.4.3. Donc, d'après le fait 4.4.2 et comme C est un sous-groupe de Carter quelconque de H^+, on peut supposer $T = B_{\sigma^\perp}(H^+)D$. En particulier on a $A \cap H^+ \leq TK$, ce qui donne $B_p(H^+) \cap R^*_{\sigma^\perp}A = B_p(H^+) \cap TA = B_p(H^+) \cap TK \leq R^*_{\sigma^\perp}$. On a montré que $[x, R^*_{\sigma^\perp}]$ est contenu dans $R^*_{\sigma^\perp}$ pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$. On a donc bien $Q(H^+) \cap M \leq N$.

Supposons le résultat vrai lorsque $Q(H^+) \neq 1$. Par I.1, on a $MQ(H^+) = ANQ(H^+)$. Mais $Q(H^+) \cap M$ est contenu dans N, donc $M = AN(M \cap Q(H^+)) = AN$ et, ainsi, on peut supposer $Q(H^+) = 1$.

I.3) *$M \cap H^+K$ est contenu dans AN.*

Comme $Q(H^+) = 1$, la proposition 2.7.9 montre que H^+ est divisible et abélien, donc $R_\infty/K = H^+K/K$. En particulier H^+K normalise $R^*_{\sigma^\perp}$ dès que $\infty \notin \sigma$. On a donc $M \cap H^+K = \cap_{\sigma \subseteq \mathcal{P}} N_{H^+K}(R_{\sigma'}A \cap M_{\sigma \cup \{\infty\}}A)$ et, de même, $N \cap H^+K = \cap_{\sigma \subseteq \mathcal{P}} N_{H^+K}(R_{\sigma'} \cap M_{\sigma \cup \{\infty\}})$. En particulier on obtient

$$R_{\infty^\perp} \cap H^+K \cap M = \cap_{\sigma \subseteq \mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp} \cap H^+K}(R_{\sigma'}A \cap (M_{\sigma \cup \{\infty\}} \cap R_{\infty^\perp})A)$$

et, aussi,

$$R_{\infty^\perp} \cap H^+K \cap N = \cap_{\sigma \subseteq \mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp} \cap H^+K}(R_{\sigma'} \cap (M_{\sigma \cup \{\infty\}} \cap R_{\infty^\perp}))$$

Supposons $A \leq H^+K$. Alors le fait 5.1.8 montre que $\cap_{\sigma \subseteq \mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}}(R_{\sigma'}A \cap (M_{\sigma \cup \{\infty\}} \cap R_{\infty^\perp})A) = A(\cap_{\sigma \subseteq \mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}}(R_{\sigma'} \cap (M_{\sigma \cup \{\infty\}} \cap R_{\infty^\perp})))$, donc on a $R_{\infty^\perp} \cap H^+K \cap M = A(R_{\infty^\perp} \cap H^+K \cap N)$. Mais, si $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$ contient ∞, le lemme 4.4.7 montre que $R^*_{\sigma^\perp}/K$ est un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de $(A \cap M_\sigma)R^*_{\sigma^\perp}/K$. Par l'argument de Frattini on obtient $M \cap H^+K = (A \cap M_\sigma)N_{M \cap H^+K}(R^*_{\sigma^\perp})$. En particulier, comme A est localement fini et comme H^+ est abélien, $(M \cap H^+K)/N_{M \cap H^+K}(R^*_{\sigma^\perp})$ est localement fini. Or on a $N \cap H^+K = \cap_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+, \infty \in \sigma} N_{M \cap H^+K}(R^*_{\sigma^\perp})$, donc $(M \cap H^+K)/(N \cap H^+K)$ est localement fini et $M \cap H^+K = (R_{\infty^\perp} \cap H^+K \cap M)(N \cap H^+K)$ d'après le corollaire 3.2.6 (*ii*). Ce qui précède montre qu'on a bien $M \cap H^+K = A(N \cap H^+K)$.

Donc, par I.2), on peut supposer $A \cap H^+K = K$. Soit $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$ qui contient ∞. Alors $[M \cap H^+K, R^*_{\sigma^\perp}]$ est contenu dans $H^+K \cap R^*_{\sigma^\perp}A$. Or $R^*_{\sigma^\perp}A/A$ est un $\sigma^\perp$-groupe d'après le lemme 4.4.7, donc $(H^+K \cap R^*_{\sigma^\perp}A)/K \cong (H^+K \cap R^*_{\sigma^\perp}A)A/A$ est aussi un $\sigma^\perp$-groupe puisque $A \cap H^+K = K$. $(R^*_{\sigma^\perp} \cap H^+K)/K$ étant le $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de H^+K/K, on en déduit que $H^+K \cap R^*_{\sigma^\perp}A = H^+K \cap R^*_{\sigma^\perp}$, donc $[M \cap H^+K, R^*_{\sigma^\perp}]$ est contenu dans $R^*_{\sigma^\perp}$ et $M \cap H^+K$ normalise $R^*_{\sigma^\perp}$. Ceci étant vrai pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$ qui contient ∞, $M \cap H^+K$ est contenu dans N.

I.4) *Argument final (lorsque $\pi = \mathcal{P}^+$).*

Montrons que, pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}$, on a $R^*_{\sigma^\perp} = M^+_\sigma(R_{\sigma'} \cap M_\sigma)$. Comme I.2) donne $Q(H^+) = 1$, H^+ est abélien (proposition 2.7.9). Donc M^+_σ est abélien, et le corollaire 3.3.5 dit que M^+_σ est divisible. Le théorème 4.4.9 (*ii*) donne $R^*_{\sigma^\perp} = M^+_\sigma KS$ pour un σ'-sous-groupe de Hall S de M_σ. Comme $(R_{\sigma'} \cap M_\sigma)/K$ est un σ'-sous-groupe de Hall de M_σ/K (corollaire 3.2.6 (*i*)) et comme $(R_{\sigma'} \cap M_\sigma)/K$ est contenu dans $R^*_{\sigma^\perp}/K$ puisque $R_{\sigma'} \leq R_{\sigma^\perp}$, $(R_{\sigma'} \cap M_\sigma)/K$ est un σ'-sous-groupe de Hall de $R^*_{\sigma^\perp}/K$. Comme SK/K est un σ'-sous-groupe de Hall de M_σ/K (corollaire 3.2.6 (*ii*)), SK/K est un σ'-sous-groupe de Hall de $R^*_{\sigma^\perp}/K$, et le théorème 3.2.5 dit que $(R_{\sigma'} \cap M_\sigma)/K$ et SK/K sont conjugués dans $R^*_{\sigma^\perp}/K$, d'où $R^*_{\sigma^\perp} = M^+_\sigma(R_{\sigma'} \cap M_\sigma)$.

Pour finir la preuve du théorème (lorsque $\pi = \mathcal{P}^+$), il reste à montrer que $MH^+ = ANH^+$. En effet, on aura alors $M = AN(M \cap H^+) = AN$ d'après I.3). Notons $X =$

$\cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}}(R_{\sigma'} \cap M_\sigma)$ et $Y = \cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}}(R_{\sigma'}A \cap M_\sigma A)$. On peut appliquer le fait 5.1.8 à X et Y, et on obtient

$$\frac{X(R_{\infty^\perp} \cap H^+A)}{(R_{\infty^\perp} \cap H^+A)} = \bigcap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}/(R_{\infty^\perp}\cap H^+A)}\Big(\frac{R_{\sigma'}(R_{\infty^\perp} \cap H^+A)}{(R_{\infty^\perp} \cap H^+A)} \cap \frac{M_\sigma(R_{\infty^\perp} \cap H^+A)}{(R_{\infty^\perp} \cap H^+A)}\Big)$$

et, de même, $Y(R_{\infty^\perp} \cap H^+A) = \bigcap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{R_{\infty^\perp}}(R_{\sigma'}(R_{\infty^\perp} \cap H^+A) \cap M_\sigma(R_{\infty^\perp} \cap H^+A))$. Or $R_{\infty^\perp}$ couvre H/H^+A d'après le corollaire 3.2.6 (ii), donc le fait 5.1.8 donne

$$XH^+A/H^+A = YH^+A/H^+A = \cap_{\sigma\subseteq\mathcal{P}} N_{H/H^+A}(R_{\sigma'}H^+A/H^+A \cap M_\sigma H^+A/H^+A)$$

Comme on a $R^*_{\sigma^\perp} = M^+_\sigma(R_{\sigma'} \cap M_\sigma)$ pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}$, N et M normalisent $(R_{\sigma'} \cap M_\sigma)H^+A = R_{\sigma'}H^+A \cap M_\sigma H^+A$ pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}$. Donc M et N sont contenus dans $XH^+A = YH^+A$.

Montrons que X est contenu dans N et que Y est contenu dans M. Soit $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$ qui contient ∞. Alors on a $R^*_{\sigma^\perp} = R_{(\sigma^-)'} \cap M_\sigma$ d'après le lemme 4.4.7 et le corollaire 3.2.6 (i). Comme X normalise $R_{(\sigma^-)'} \cap M_{\sigma^-}$ et comme on a $M_\sigma \leq M_{\sigma^-}$, X normalise $R^*_{\sigma^\perp}$. Aussi on a $R_{(\sigma^-)'}A \cap M_\sigma A = (R_{(\sigma^-)'} \cap M_\sigma)A = R^*_{\sigma^\perp}A$, et Y normalise $R_{(\sigma^-)'}A \cap M_{\sigma^-}A$. Comme on a $M_\sigma \leq M_{\sigma^-}$, Y normalise $R^*_{\sigma^\perp}A$. Si on a $\sigma \subseteq \mathcal{P}$ alors, comme $R^*_{\sigma^\perp} = M^+_\sigma(R_{\sigma'} \cap M_\sigma)$, X normalise $R^*_{\sigma^\perp}$ et, comme on a $(R_{\sigma'} \cap M_\sigma)A = R_{\sigma'}A \cap M_\sigma A$, Y normalise $R^*_{\sigma^\perp}A$. On a montré que, pour tout $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, X normalise $R^*_{\sigma^\perp}$ et Y normalise $R^*_{\sigma^\perp}A$. Ceci prouve que X est contenu dans N et que Y est contenu dans M.

On déduit de ce qui précède que $ANH^+ = XH^+A = YH^+A = MH^+$, ce qui permet de conclure.

II. *Cas général (π quelconque).*

On suppose $A \neq K$. Alors, d'après le corollaire 3.1.26, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une suite croissante $(A_i)_{i=0,\dots,n}$ de sous-groupes normaux et localement clos de H avec $A_0 = K$, $A_n = A$ et, pour tout $i = 0, \dots, n-1$, A_{i+1}/A_i est soit un π-groupe, soit un $\pi^\perp$-groupe. On peut donc clairement supposer que A/K est soit un π-groupe, soit un $\pi^\perp$-groupe. En particulier, si on note $U/K = \cap_{\sigma\subseteq\pi} N_{H/K}(R^*_{\sigma^\perp}/K)$, alors A est contenu soit dans R_π, soit dans U.

Soit $V/A = \cap_{\sigma\subseteq\pi} N_{H/A}(R^*_{\sigma^\perp}A/A)$. On définit $M_\sigma = K$ pour tout $\sigma \not\subseteq \pi$ et on note $\mathcal{N} = (M_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ et $\overline{\mathcal{N}} = (M_\sigma A/A)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ des $\mathcal{P}^+$-systèmes de H/K et H/A respectivement. Alors U/K est le $\mathcal{N}$-normalisateur de H/K associé à $\mathfrak{P}$ et V/A est le $\overline{\mathcal{N}}$-normalisateur de H/A associé à $(R_\sigma A/A)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$. La partie I prouve que $V = UA$. Or on a $N = R_\pi \cap U$ et $M = R_\pi A \cap V$, d'où $M = R_\pi A \cap UA$. Comme on a $A \leq R_\pi$ ou $A \leq U$, on obtient $M = (R_\pi \cap U)A = NA$. Le résultat est donc prouvé. □

L'exemple 5.1.11 montre qu'il est impossible de trouver un théorème de couverture et d'évitement analogue au théorème 3.4 de [33] :

Fait 5.1.10. – **([33], th. 3.4, Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *Soient G un $\mathfrak{U}$-groupe, $\pi \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{M} = (M_\sigma)_{\sigma\subseteq\pi}$ un π-système de G, S une base de Sylow de G et D le $\mathcal{M}$-normalisateur de G associé à S. Alors D évite tous les facteurs chefs de G, sauf les p-facteurs chefs centralisés par M_p pour $p \in \pi$, lesquels sont couverts.*

Exemple 5.1.11. – Si G est un pur groupe isomorphe à $\mathbb{C}^*$ et si $\pi = \{\infty\}$, on note $\mathcal{M} = (G)_{\sigma\subseteq\pi}$ un π-système de G. Alors G est l'unique $\mathcal{M}$-normalisateur de G et G couvre des p-sections G-d_{loc}-minimales non triviales de G pour $p \notin \pi$.

Aussi, comme le montre l'exemple suivant, il est possible, en présence d'un mauvais corps, qu'il existe une section H/K-d_{loc}-minimale de H qui ne soit ni couverte, ni évitée par les $\mathcal{M}$-normalisateurs de H/K (où $\mathcal{M}$ désigne un π-système de H/K pour $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$).

Exemple 5.1.12. – On suppose qu'il existe un mauvais corps ${}_0K$ de caractéristique nulle avec T un sous-groupe de ${}_0K^*$ définissable, infini et sans torsion. On considère $U = ({}_0K_+ \rtimes T) \times ({}_0K_+ \rtimes T)$ (où T agit linéairement sur ${}_0K_+$) et i l'automorphisme involutif de U qui, à tout $(u,v) \in U$ associe (v,u). On forme le produit semi-direct $G = U \rtimes \langle i \rangle$. Soit $\mathcal{M} = (G)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ un $\mathcal{P}^+$-système de G. Si M est un $\mathcal{M}$-normalisateur de G associé à une base de Sylow couvrante $(S_\sigma)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ de G avec $S_{\{2\}} = \langle i \rangle$, alors $M = C_G(i)$. On en déduit que ${}_0K_+ \times {}_0K_+$ est un sous-groupe G-d_{loc}-minimal de G qui n'est ni couvert, ni évité par M.

On peut ajouter à ce qui précède que l'exemple 1.1.4 (qui donne un ∞-groupe non nilpotent) donne un groupe G de rang de Morley fini avec un sous-groupe K_+ sans torsion et minimal normal avec $\mathcal{O}_\infty(A_G(K_+)) \neq 1$. Ceci nous empêche de trouver un analogue au corollaire 3.3 de [33] :

Fait 5.1.13. – **([33], cor. 3.3, Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *Soit $p \in \mathcal{P}$. Si G est un groupe localement fini et localement résoluble et si H/K est un p-facteur chef de G, alors $\mathcal{O}_p(A_G(H/K)) = 1$.*

Le corollaire 5.1.14 dit que, pour tout $p \in \pi$, toute p-section H/K-d_{loc}-minimale centrale de H est couverte par les $\mathcal{M}$-normalisateurs H/K.

Corollaire 5.1.14. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \pi}$ un π-système de H/K et N/K un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K. Alors, pour tout $p \in \pi$, N couvre toute p-section normale de H/K centralisée par M_p.*

Preuve. – Soient $p \in \pi$ et U/A une p-section normale de H/K centralisée par M_p/K. On reprend les notations du théorème 5.1.9. Comme U/A est une p-section et comme U/A centralise M_pA/A, U/A est contenu dans $M/A = NA/A$. Ceci prouve le résultat. □

Lemme 5.1.15. – *Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, R/K un sous-groupe σ-couvrant de Hall de H/K et U/K un sous-groupe ∞-couvrant de R/K. Alors U/K contient un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de R/K. En particulier, tout sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K contenu dans R/K contient un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de R/K.*

Preuve. – Montrons que U/K contient un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de R/K. D'après le lemme 4.4.7, on peut supposer $\infty \in \sigma$. On peut supposer U/K sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K. Le lemme 4.4.6 dit que U/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K. D'après le théorème 4.4.17, il existe une base de Sylow couvrante $\mathfrak{P} = (R_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \mathcal{P}^+}$ de H/K. Par conjugaison des sous-groupes σ-couvrants de Hall de H/K et des sous-groupes ∞-couvrants de Hall de R/K (théorème 4.4.9), on peut supposer $R = R_\sigma$ et $U = R_\infty$. Par le théorème 4.4.17 (*ii*), il existe un sous-groupe de Carter C de H^+ tel que, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, R_π normalise $B_\pi(H^+)CK$ et tel que, si $\infty \in \pi$, $R_\pi = R_{\pi^-}D$ où D est le sous-groupe définissable et divisible maximal de C. Or $T = B_\sigma(H^+)D$ est un $(\sigma^\perp)^*$-sous-groupe maximal de H^+ (lemme 4.4.3) et R_σ normalise TK, donc $R_\sigma = B_\sigma(H^+)DKR_{\sigma^-}$ d'après le théorème 4.4.9 (*iii*). De même, on a $R_\infty = B_\infty(H^+)DK$. Soit S/K un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de DK/K. Alors $S(DK \cap B_\sigma(H^+)K)/(DK \cap B_\sigma(H^+)K)$ est un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de $DK/(DK \cap B_\sigma(H^+)K)$ (corollaire 3.2.6 (*ii*)). On en déduit que $SB_\sigma(H^+)K/B_\sigma(H^+)K$ est un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de $B_\sigma(H^+)DK/B_\sigma(H^+)K$. Mais $B_\sigma(H^+)K/K$ est sans $\sigma^\perp$-élément non trivial, donc S/K est un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de $B_\sigma(H^+)DK/K$. Comme $R = R_\sigma = B_\sigma(H^+)DKR_{\sigma^-}$, S/K est un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de R/K. Comme $S \leq DK \leq U$, on a le résultat.

Si L/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K contenu dans R/K, alors le corollaire 4.4.11 dit que L/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K. Ce qui précède dit que L/K contient un $\sigma^\perp$-sous-groupe de Hall de R/K. Ceci finit la preuve. □

Corollaire 5.1.16. – *Soient $\nu \subseteq \mathcal{P}^+$, R/K un sous-groupe ν-couvrant de Hall de H/K et S/K un $\nu^\perp$-sous-groupe de Hall de R/K. Alors S/K est abélien et divisible.*

Preuve. – On peut supposer $\infty \in \nu$. Soit $\mathfrak{P} = (R_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ une base de Sylow couvrante de H/K avec $R = R_\nu$. D'après le théorème 3.2.5 et le lemme 5.1.15, on peut supposer S/K contenu dans R_∞/K. Le théorème 4.4.9 (*ii*) dit qu'il existe un $\mathcal{P}^*$-sous-groupe maximal T de H^+ tel que $R_\infty = TK$ et la proposition 2.7.9 dit que T' est sans torsion. Ainsi $R_\infty/R'_\infty K$ est abélien et divisible et, comme $S \cap R'_\infty K = K$, $SR'_\infty/R'_\infty K$ est isomorphe à S/K. Mais le corollaire 3.2.6 (*ii*) dit que $SR'_\infty/R'_\infty K$ est un $\nu^\perp$-sous-groupe de Hall de $R_\infty/R'_\infty K$, donc S/K est abélien et divisible. □

Lemme 5.1.17. – *Soient U/V une section H/K-d_{loc}-minimale de H, $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et R/K un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Alors R couvre ou évite U/V.*

Preuve. – On peut supposer $K^- = 1$, en particulier H^+ centralise K. On peut aussi supposer que U/V est une p-section pour un $p \notin \pi$ et que U/V n'est pas évité par R. Si $\infty \notin \pi$, R/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K d'après le lemme 4.4.7. Alors R évite U/V, ce qui est contradictoire. Donc on a $\infty \in \pi$. Le théorème 4.4.9 dit que R/K contient un sous-groupe ∞-couvrant de Hall R_∞/K de H/K. Mais le lemme 5.1.15 dit alors que R_∞/K contient un $\pi^\perp$-sous-groupe de Hall R_0/K de R/K. Comme $p \in \pi^\perp$ et comme R n'évite pas U/V, R_0 n'évite pas U/V, donc R_∞ non plus. On peut alors supposer $\pi = \{\infty\}$, en particulier $R = R_\infty$. D'après le théorème 4.4.9 (*ii*), $R = TK$ pour un $\mathcal{P}^*$-sous-groupe maximal T de H^+, en particulier T n'évite pas U/V.

Notons $B = B_\mathcal{P}(H^+)$. Supposons U/V non couverte par B. Alors B évite U/V et on a $[B, (U\cap T)V] \leq B\cap U \leq V$. Comme le fait 4.4.2 donne $H^+ = BT$, on obtient $[H^+, (U\cap T)V] \leq V[T, (U\cap T)V] \leq (U\cap T)V$ et H^+ normalise $(U\cap T)V$. Par conjugaison des $\mathcal{P}^*$-sous-groupes maximaux dans H^+ (fait 4.4.2), on a $(U \cap T_1)V = (U \cap T)V$ pour tout $\mathcal{P}^*$-sous-groupe maximal T_1 de H^+. On en déduit que $(U\cap T)V$ est normal dans H. Par minimalité de U/V et comme T n'évite pas U/V, on a $(U \cap T)V = U$. Mais $(U \cap T)V = (U \cap R)V$, donc R couvre U/V et on en déduit qu'on peut supposer que B couvre U/V. Quitte à remplacer U/V par $(U \cap BK)/(V \cap BK)$, on peut supposer $U \leq BK$.

Soit T_0 un p-sous-groupe de Sylow de T. Par le corollaire 3.2.6 (*ii*), T_0 n'évite pas U/V. De plus, comme T est un $\mathcal{P}^*$-groupe, on a $B_p(T)$=1 et $T_0\cap Q(T) = 1$. Mais $T_0Q(T)/Q(T)$ est un p-sous-groupe de Sylow de $T/Q(T)$ (corollaire 3.2.6 (*ii*)), et $T/Q(T)$ est abélien et divisible (proposition 2.7.9), donc $T_0 \cong T_0Q(T)/Q(T)$ est un p-tore. Comme on a $B(K\cap H^+) \leq F(H^+)$ puisque $K\cap H^+ \leq Z(H^+)$, $T_0\cap BK = T_0\cap B(K\cap H^+)$ est central dans H^+ (lemme 4.1.20). On en déduit que $(T_0K \cap BK)/K$ est central dans H^+K/K. Par conjugaison des p-sous-groupes de Sylow de T et par conjugaison des $\mathcal{P}^*$-sous-groupes maximaux de H^+ (fait 4.4.2), on en déduit que $T_0K \cap BK$ est normal dans H. Ceci prouve que $T_0K\cap U$ est normal dans H et, comme T_0 n'évite pas U/V, T_0 couvre U/V par minimalité de U/V. On en déduit que R couvre U/V. □

Lemme 5.1.18. – *Soit H/K est une section localement close abélienne et divisible. Alors les sous-groupes d'exposant bornés de H/K sont finis.*

Preuve. – Il suffit de montrer que, pour tout $p \in \mathcal{P}$, les p-sous-groupes d'exposant bornés de H/K sont finis. Soient $p \in \mathcal{P}$, B/K un p-sous-groupe d'exposant borné de H/K et S/K un p-sous-groupe de Sylow de H/K. Alors S/K est un p-tore. Le corollaire 3.2.6 (*ii*) et le fait 1.4.7 (*i*) montrent qu'il existe un p-tore T de H qui couvre S/K. Le fait 1.4.5 dit que T est de taille finie. Donc S/K est aussi de taille fini et B/K, par conséquent, est fini. □

Lemme 5.1.19. – *Soient U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H ($p \in \mathcal{P}$), M/K une section normale et localement close de H qui ne centralise pas U/V et R/K un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall de M/K. Alors, soit $N_H(R)$ évite U/V, soit R^+ couvre U/V. De plus, si R^+ couvre U/V, alors U/V est finie.*

Preuve. – On suppose que $N_H(R)$ n'évite pas U/V. Montrons d'abord que R n'évite pas U/V. Soit $D = M/C_M(U/V)$, on a $D \neq 1$ par hypothèse. D agit sur U/V par conjugaison. Soit S_1 un p-sous-groupe de Sylow de M. Alors, d'après le corollaire 3.2.6 (*ii*), S_1 couvre U/V et S_1 couvre $\mathcal{O}_p(D)$. De plus, S_1 est hypercentral (proposition 3.4.18), donc $U/V \rtimes \mathcal{O}_p(D)$ aussi et $C_{U/V}(\mathcal{O}_p(D)) \neq 1$. Or $C_{U/V}(\mathcal{O}_p(D))$ est une section localement close (proposition 3.1.33) normalisée par H, donc $\mathcal{O}_p(D)$ centralise U/V par minimalité de U/V. On en déduit que $\mathcal{O}_p(D) = 1$. Comme $D \neq 1$, on a $\mathcal{O}_{p^\perp}(D) \neq 1$. Si R évite U/V, alors $N_{U/V}(RV/V)$ est centralisé par R et, comme R couvre $\mathcal{O}_{p^\perp}(D)$, on obtient $1 \neq N_U(R)V/V \leq N_{U/V}(RV/V) \leq C_{U/V}(R) \leq C_{U/V}(\mathcal{O}_{p^\perp}(D))$. Ainsi, par minimalité de U/V, $\mathcal{O}_{p^\perp}(D)$ centralise U/V, ce qui est contradictoire. Donc R n'évite pas U/V.

Montrons maintenant que R^+ couvre U/V. D'après le lemme 5.1.15, si S/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K, S/K contient un p-sous-groupe de Sylow de R/K. En particulier S n'évite pas U/V (corollaire 3.2.6 (*ii*)). D'après le lemme 4.4.6, S/K n'a pas de sous-groupe ∞-couvrant propre et, d'après le lemme 4.4.15, il existe un sous-groupe ∞-couvrant de Hall S_0/K de H/K qui contient S/K. Mais S/K est un sous-groupe ∞-couvrant de H/K (lemme 4.4.6), ce qui prouve que $S/K = S_0/K$. Alors S couvre U/V d'après le lemme 5.1.17. Comme S/K n'a pas de sous-groupe ∞-couvrant propre et comme S/S^+K est localement fini, on a $S = S^+K$ et S^+ couvre U/V. En particulier R^+ couvre U/V.

Montrons que U/V est finie. Soient R_∞/K un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K et P/K un p-sous-groupe de Sylow de R_∞/K. Par le lemme 5.1.15, P/K est un p-sous-groupe de Sylow de R/K. Comme R couvre U/V, le corollaire 3.2.6 (*ii*) montre que P couvre U/V. Mais le corollaire 5.1.16 dit que P/K est un p-tore et PV/V est un p-tore. Or U/V est une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H/K. Donc U/V est un sous-groupe d'exposant p de PV/V et le lemme 5.1.18 dit que U/V est finie. □

Lemme 5.1.20. – *Soient H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble et U/K une section localement close de H qui couvre ou évite chaque section H/K-d_{loc}-minimale de H. Si un sous-groupe L/K de U/K couvre les mêmes sections H/K-d_{loc}-minimales de H que U/K, alors $L = U$.*

Preuve. – Supposons $L < U$. D'après la proposition 3.5.7, il existe un ordinal μ et une suite croissante $(H_i)_{i\leq\mu}$ de sous-groupes normaux et localement clos de H tels que $H_0 = K$, $H_\mu = H$, H_{i+1}/H_i soit H/K-d_{loc}-minimal pour tout $i < \mu$ et $H_\alpha = \cup_{j<\alpha} H_j$ pour tout ordinal limite $\alpha \leq \mu$. Il existe un plus petit ordinal $\nu < \mu$ tel que $H_\nu \cap L \neq H_\nu \cap U$. ν ne peut pas être un ordinal limite, donc il existe un ordinal β tel que $\beta+1 = \nu$. On a $H_\beta \cap U \neq H_\nu \cap U$, donc U n'évite pas H_ν/H_β et U couvre H_ν/H_β. On en déduit que L couvre aussi H_ν/H_β. Soit $u \in (H_\nu \cap U) \setminus L$. Alors il existe $l \in L \cap H_\nu$ et $h \in H_\beta$ tels que $u = lh$. Comme $l \in U$, h appartient à $H_\beta \cap U (= H_\beta \cap L)$, ce qui est contradictoire. □

Définition 5.1.21. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\pi}$ un π-système de H/K, N/K un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K et N^*/K une section localement close de N qui, pour tout $p \in \pi$, couvre toutes les p-sections normales de H/K centralisées par M_p. Si N^*/K est minimale pour ces conditions, alors N^*/K est appelé* $\mathcal{M}^*$-normalisateur *de H/K.*

Lemme 5.1.22. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ contenant ∞ et $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\pi}$ un π-système de H/K. On suppose que M_∞ centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de M_∞. Alors les $\mathcal{M}^*$-normalisateurs de H/K sont exactement les sous-groupes π-couvrants de Hall des $\mathcal{M}$-normalisateurs de H/K.*

Preuve. – Soient $\mathfrak{P} = (R_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ une base de Sylow couvrante de H/K et N/K le $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K associé à $\mathfrak{P}$. Pour tout $\sigma \subseteq \pi$, on note $R^*_{\sigma^\perp}/K$ l'unique sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall de M_σ/K contenu dans $R_{\sigma^\perp}/K \cap M_\sigma/K$. Si M/K est une section localement close de N qui, pour tout $p \in \pi$, couvre toutes les p-sections localement closes normales de H/K centralisées par M_p, alors tout sous-groupe π-couvrant R/K de Hall de M/K possède la même propriété. Comme R/K est contenu dans un sous-groupe π-couvrant de Hall de N/K d'après les lemmes 4.4.6 et 4.4.15, on en déduit qu'il suffit, pour prouver le lemme, de montrer que les sous-groupes π-couvrants de Hall de N/K sont des $\mathcal{M}^*$-normalisateurs de H/K.

D'après le corollaire 5.1.14, pour tout $p \in \pi$, tout sous-groupe π-couvrant de Hall de N/K couvre toutes les p-sections localement closes normales de H/K centralisées par M_p. Soit L/K une section localement close d'un sous-groupe π-couvrant de Hall R/K de N/K telle que, pour tout $p \in \pi$, L couvre toutes les p-sections localement closes normales de H/K centralisées par M_p. On va montrer qu'on a nécessairement $L/K = R/K$, ce qui finira la preuve du lemme.

Soit U/V une q-section H/K-d_{loc}-minimale de H ($q \in \pi^-$) qui n'est pas évitée par N. Montrons que L couvre U/V. D'après le choix de L, on peut supposer U/V non centralisée par M_q. Comme N n'évite pas U/V, $N_H(R^*_{q^\perp})$ n'évite pas U/V et $R^*_{q^\perp}$ couvre U/V (lemme 5.1.19). Alors le lemme 5.1.15 et le corollaire 3.2.6 (ii) disent que U/V est couverte par R_∞ donc, par conjugaison des sous-groupes ∞-couvrants de Hall de H/K (théorème 4.4.9), tout sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K couvre U/V. Or L couvre toutes les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H d'après l'hypothèse faite sur M_∞. Donc, par le théorème 4.4.9, L/K contient un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K, ce qui prouve que L couvre U/V. De plus, on a montré que N couvre ou évite chaque π^--section H/K-d_{loc}-minimale de H.

Montrons que $L/K = R/K$. Soient P/K un π^--sous-groupe de Hall de L/K et P_1/K un π^--sous-groupe de Hall de R/K qui contient P/K. Par ce qui précède et par le corollaire 3.2.6 (ii), P et P_1 couvrent chaque π^--section H/K-d_{loc}-minimale de H non évitée par N. Comme P et P_1 sont contenus dans N, P et P_1 évitent les π^--sections H/K-d_{loc}-minimales de H évitées par N. Alors le lemme 5.1.20 donne $P = P_1$. Aussi, L/K contient un sous-groupe ∞-couvrant de Hall Q/K de H/K d'après le théorème 4.4.9. D'après le corollaire 4.4.11, Q/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K. Le théorème 4.4.17 (ii) montre que $R = PQ_1$ pour un sous-groupe ∞-couvrant de Hall Q_1/K de R/K. Par conjugaison des sous-groupes ∞-couvrants de Hall de R/K (théorème 4.4.9), on obtient $R = PQ \leq L$. Ceci finit la preuve du lemme. $\square$

Proposition 5.1.23. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ contenant ∞ et $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma \subseteq \pi}$ un π-système de H/K. On suppose que H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de lui-même. Alors il existe N^*/K un $\mathcal{M}^*$-normalisateur de H/K. De plus, il existe un sous-groupe de Carter C/K de $M^+_\infty K/K$ tel que $N^* = B_{\mathcal{P}}(M^+_\infty)N_H(C)$. En particulier les $\mathcal{M}^*$-normalisateurs de H/K sont conjugués.*

Preuve. – Montrons qu'un sous-groupe N^*/K de H/K de la forme $N^* = B_{\mathcal{P}}(M^+_\infty)N_H(C)$, où C désigne un sous-groupe de Carter de M^+_∞, est un sous-groupe localement clos de H/K qui, pour tout $p \in \pi$, couvre toutes les p-sections localement closes normales de H/K centralisées par M_p. Par le théorème 2.4.7 et l'argument de Frattini, $H = M^+_\infty N_H(C) = M^+_\infty N^*$. Notons $B_0 = B_\infty(M^+_\infty)$. Par la proposition 2.7.9 et le corollaire 2.4.8, C couvre $M^+_\infty/Q(M^+_\infty)$, donc N^* couvre M^+_∞/B_0. On en déduit que $H = B_0N^*$. Mais, par le corollaire 2.4.8, C couvre chaque section M^+_∞-minimale centrale de M^+_∞. Donc, comme B_0 est sans torsion, N^* couvre chaque ∞-section H/K-d_{loc}-minimale centrale de M_∞ et on en déduit que N^* est un sous-groupe (localement clos) de H/K qui, pour tout $p \in \pi$, couvre toutes les p-sections normales de H/K centralisées par M_p.

Montrons maintenant la minimalité de N^*/K. Soit M/K un sous-groupe localement clos de H/K qui, pour tout $p \in \pi$, couvre toutes les p-sections normales de H/K centralisées par M_p. Soient $B_0 = B_\infty(M^+_\infty)$ et $B = B_0K$. Comme H normalise un sous-groupe $\infty^\perp$-couvrant de Hall de M_∞/K et comme $(M^+_\infty)'B/B$ est d'exposant borné d'après la proposition 2.7.9, toutes les ∞-sections H/B-d_{loc}-minimales de H sont centralisées par $M_\infty B/B$. Donc, par le théorème 5.1.9 et le lemme 5.1.22, MB/B est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/B. Comme H/B n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre puisque H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de lui-même, on a $H = MB$. Soit $L = M \cap M^+_\infty$. Alors on a $M^+_\infty = LB_0$ et, donc, $M_\infty^+ = L^+B_0$. B_0 étant sans torsion, on en déduit que $L = L^+$ et L est définissable et connexe.

Montrons que L est anormal dans M_∞^+. Soit $(A_i)_{i=1,...,n}$ une suite croissante de sous-groupes normaux de M_∞^+ tels que $A_0 = 1$, $A_n = B_0$ et A_{i+1}/A_i soit M_∞^+-minimal pour tout $i < n$. De plus on suppose qu'il existe une sous-suite $(A_k)_{k=i_1,...,i_l}$ de $(A_i)_{i=1,...,n}$ telle que $A_{i_{m+1}}/A_{i_m}$ soit H-minimale pour tout $m < l$. Si $A_{i_{m+1}}/A_{i_m}$ (pour $m < l$) n'est pas centralisée par M_∞^+, le corollaire 2.6.7 appliqué à $Q = A_{i_{m+1}}/A_{i_m} \rtimes M_\infty^+/(M_\infty^+)'$ muni de l'action naturelle montre que $M_\infty^+/(M_\infty^+)'$ est un sous-groupe de Carter de Q. Donc A_{k+1}/A_k n'est pas centralisée par M_∞^+ pour tout $k = i_m, ..., i_{m+1} - 1$. En particulier L couvre chaque section A_{i+1}/A_i qui est centralisée par M_∞^+. On note $L_0 = L$ et, si on suppose L_j construit pour un $j \in \mathbb{N}$ et $L_j \neq M_\infty^+$, on note $L_{j+1} = L_jA_{i(j)}$ où $i(j)$ est le plus petit entier de $1, ..., n$ tel que $A_{i(j)} \nleq L_j$. Soit j_1 l'entier tel que $L_{j_1} = M_\infty^+$. Comme $M_\infty^+ = LB_0$ alors, pour tout $i = 1, ..., n$, A_{i+1}/A_i est L-minimale puisque B_0 est nilpotent. On en déduit que, pour tout $j = 1, ..., j_1$, L_{j-1} est un sous-groupe propre, définissable et connexe maximal de L_j. De plus, comme L couvre chaque section A_{i+1}/A_i qui est centralisée par M_∞^+, L_{j-1} ne centralise pas $A_{i(j)}/A_{i(j-1)}$ et L_{j-1} n'est pas normal dans L_j pour tout $j = 1, ..., j_1$. Le théorème 2.5.1 (*iii*) dit alors que L est anormal dans M_∞^+ et que L contient un sous-groupe de Carter C_0 de M_∞^+. Soit $C^*/K = C_0K/K$.

Alors C^*/K est un sous-groupe de Carter de M_∞^+K/K d'après le corollaire 2.4.8. Comme M/K normalise LK/K et comme LK/K est anormal dans M_∞^+K/K, on a $N_{H/K}(LK/K) = M/K$ puisque $H = MB$. Par l'argument de Frattini, $N_{H/K}(LK/K) = LN_M(C^*)/K$, donc on obtient $H = M_\infty^+N_M(C^*)$ et $N_H(C^*) = N_M(C^*)$. Soit S le $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de $L \cap Q(M_\infty^+)$. Comme $M_\infty^+ = LB_0$, on a $Q(M_\infty^+) = (L \cap Q(M_\infty^+))B_0$ et, comme $Q(M_\infty^+)/B_0$ est localement fini, le corollaire 3.2.6 (*ii*) donne $SB_0/B_0 = Q(M_\infty^+)/B_0$. On en déduit $S = B_{\mathcal{P}}(M_\infty^+)$ et on obtient $B_{\mathcal{P}}(M_\infty^+)N_H(C^*) \leq M$. La conjugaison des sous-groupes de Carter de M_∞^+K/K donne la minimalité de N^*/K, ce qui permet de conclure. □

Corollaire 5.1.24. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ contenant ∞ et $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\pi}$ un π-système de H/K. On suppose que H/K est un $\mathcal{M}^*$-normalisateur de lui-même. Alors M_∞/K centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H.*

Preuve. – Soit U/V une ∞-section H/K-d_{loc}-minimale de H. Montrons que M_∞/K centralise U/V. On peut supposer que M_∞ couvre U/V, et même que U soit contenu dans M_∞. Comme H/K est un $\mathcal{M}^*$-normalisateur de H/K, H/K est, en particulier, un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K et la proposition 5.1.23 montre que $H = B_{\mathcal{P}}(M_\infty^+)N_H(C)$ où C/K est un sous-groupe de Carter de M_∞^+K/K. En particulier on a $M_\infty^+K = B_{\mathcal{P}}(M_\infty^+)C$. Soit R/K un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de M_∞/K. Alors R contient $B_{\mathcal{P}}(M_\infty^+)$ et couvre M_∞/M_∞^+ d'après le corollaire 3.2.6 (*ii*), et on obtient $M_\infty = RC$. Comme H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K, R est normal dans H. Alors, comme R/K est localement fini et comme U/V est sans torsion, R évite U/V, et R centralise U/V. Mais $M_\infty/R(\cong C/(C \cap R))$ est localement nilpotent. Donc M_∞/R est hypercentral (proposition 3.4.18) et, d'après la proposition 3.1.33, M_∞ centralise ses sections H/R-d_{loc}-minimales. On en déduit que M_∞ centralise U/V. □

Lemme 5.1.25. – *Soit $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. On suppose que, pour tout $p \in \pi$, H/K possède un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall normal $U_{p^\perp}/K$. Alors H/K a un sous-groupe $\pi^\perp$-couvrant de Hall normal R/K.*

Preuve. – Soit R/K un sous-groupe $\pi^\perp$-couvrant de Hall de H/K. Notons $\aleph$ le plus petit cardinal strictement supérieur à $Card\,(H/K)$. Nous allons construire une suite décroissante $(L_i/K)_{i\leq\aleph}$ de sous-groupes localement clos et normaux de H/K telle que $L_\aleph = R$, ce qui prouvera le résultat. Soit $L_0 = H$. Supposons que, pour un ordinal $i \leq \aleph$, on ait construit L_j pour tout $j < i$ et que R soit toujours contenu dans L_j pour $j < i$. Alors, si i est un ordinal limite, on note $L_i = \cap_{\beta<i}L_\beta$ et on a bien $R \leq L_i$. Sinon, soit j un ordinal tel que $i = j + 1$. D'après la proposition 4.4.14, pour tout $p \in \pi$, $U_{p^\perp}/K \cap L_j/K$ contient un unique sous-groupe

$p^{\perp}$-couvrant de Hall $U_{p^{\perp},j}/K$ de L_j/K. On note $L_i = \cap_{p\in\pi} U_{p^{\perp},j}$. Comme R est contenu dans L_j, alors R/K est un sous-groupe $\pi^{\perp}$-couvrant de Hall de L_j/K (corollaire 4.4.11). Par le théorème 4.4.9, pour tout $p \in \pi$, $U_{p^{\perp},j}/K$ contient un sous-groupe $\pi^{\perp}$-couvrant de Hall de L_j/K. Aussi, les sous-groupes $\pi^{\perp}$-couvrants de Hall de L_j/K sont conjugués et $U_{p^{\perp},j}/K$ est normal dans L_j/K, donc $U_{p^{\perp},j}/K$ contient R/K. En particulier R/K est contenu dans $U_{p^{\perp},j}/K$ pour tout $p \in \pi$, donc $R \leq L_i$. Ceci prouve que R est contenu dans $L_{\aleph}$.

Montrons que R contient $L_{\aleph}$. Par le choix de $\aleph$, il existe un ordinal $\mu < \aleph$ tel que $L_\mu = L_{\mu+1}$, donc on a $L_\mu = L_{\aleph}$ et $L_\mu/K = U_{p^{\perp},\mu}/K$ pour tout $p \in \pi$. Supposons d'abord $\infty \in \pi$. Alors $U_{\infty^{\perp}}/K$ est localement fini (lemme 4.4.7), donc L_μ/K est localement fini et $U_{p^{\perp},\mu}/K$ est un p'-groupe pour tout $p \in \pi$. On en déduit que $L_\mu/K(= L_{\mu+1}/K)$ est un $\pi^{\perp}$-groupe, et R contient $L_{\aleph}$. Donc on peut supposer $\infty \notin \pi$. Soient $p \in \mathcal{P}^+$ et U/V une p-section de H/K couverte par L_μ. Montrons que R couvre U/V. On peut supposer $p \in \pi$. D'après le théorème 4.4.9, R/K contient un sous-groupe ∞-couvrant de Hall R_∞/K de L_μ/K. Comme $L_\mu/K = U_{p^{\perp},\mu}/K$, le lemme 5.1.15 dit que R_∞/K contient un p-sous-groupe de Sylow S/K de L_μ/K. Le corollaire 3.2.6 (ii) dit que S couvre U/V, donc R couvre U/V. Comme L_μ est normal dans H, L_μ couvre ou évite chaque section H/K-d_{loc}-minimale de H. Alors le lemme 5.1.20 donne le résultat. $\square$

Proposition 5.1.26. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $\mathcal{M} = (M_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\pi}$ un π-système de H/K. Alors H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K si et seulement si H/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre et si, pour tout $p \in \pi$, l'une des deux conditions suivantes est réalisée :*

(i) $p = \infty$ et M_∞/K a un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall normal;

(ii) $p \in \pi^-$ et toute p-section U/V H/K-d_{loc}-minimale de H est soit centralisée par M_p, soit couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K.

Preuve. – Supposons que H/K soit un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K. Soit $\mathfrak{P} = (R_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ une base de Sylow couvrante de H/K tel que H/K soit le $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K associé à $\mathfrak{P}$. Soit $p \in \pi$. Supposons $p = \infty$. D'après le lemme 4.4.7 et le corollaire 3.2.6 (i), $R_{\infty^{\perp}} \cap M_\infty/K$ est un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de M_∞/K normalisé par H/K, donc H/K vérifie (i). Supposons maintenant $p \in \pi^-$. Soit U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H non centralisée par M_p. Montrons que U/V est couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K. Notons R/K l'unique sous-groupe $p^{\perp}$-couvrant de Hall de M_p/K contenu dans $(R_{p^{\perp}} \cap M_p)/K$ (proposition 4.4.14). Alors H/K normalise R/K puisque H/K est le $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K associé à $\mathfrak{P}$. Aussi, M_p/R est un p-groupe. Ainsi M_p/R est localement nilpotent, donc hypercentral (proposition 3.4.18), ce qui montre que M_p centralise les p-sections H/K-d_{loc}-minimales de H non couvertes par R. En particulier R couvre U/V. Par le lemme 5.1.15, R_∞/K contient un p-sous-groupe de Sylow S/K de $R_{p^{\perp}}/K$, donc R_∞/K contient $(S\cap R)/K$ qui est un p-sous-groupe de Sylow de R/K (corollaire 3.2.6 (ii)). Comme $S \cap R$ couvre chaque p-section normale de H/K couverte par R (corollaire 3.2.6 (ii)), alors R_∞ couvre U/V. On a montré que H/K vérifie (ii).

Réciproquement supposons que H/K n'ait pas de sous-groupe π-couvrant propre et que, pour tout $p \in \pi$, l'une des conditions (i) et (ii) soit réalisée. Montrons que H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K. Il suffit de montrer que, pour tout $\sigma \subseteq \pi$, M_σ/K a un sous-groupe $\sigma^{\perp}$-couvrant de Hall normal. Supposons que, pour tout $p \in \pi$, M_p/K ait un sous-groupe $p^{\perp}$-couvrant de Hall normal $S_{p^{\perp}}/K$. Alors, pour tout $p \in \sigma$, M_σ/K a un unique sous-groupe $p^{\perp}$-couvrant de Hall $U_{p^{\perp}}/K$, lequel est contenu dans $(S_{p^{\perp}} \cap M_\sigma)/K$ (proposition 4.4.14). Comme $U_{p^{\perp}}/K$ est normal dans M_σ/K pour tout $p \in \sigma$, le lemme 5.1.25 dit que M_σ/K possède un sous-groupe $\sigma^{\perp}$-couvrant de Hall normal. On en déduit que pour montrer que H/K est un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K, il suffit de montrer que, pour tout $p \in \pi$, M_p/K a un sous-groupe $p^{\perp}$-couvrant de Hall normal. Par (i), on peut supposer $p \neq \infty$. Soient $p \in \pi^-$, R/K un sous-groupe $p^{\perp}$-couvrant de Hall de M_p/K et U/V une section H/K-d_{loc}-minimale de M_p. Montrons que $N_H(R)$ couvre U/V. On peut supposer U/V non couverte par R, donc U/V est une p-section. De plus, comme $p \in \mathcal{P}$, U/V est centralisée par M_p d'après (ii), en particulier U/V normalise RV/V. Mais le théorème 4.4.9 et l'argument de Frattini montrent que $N_{H/V}(RV/V) = N_H(R)V/V$, donc $N_H(R)$ couvre U/V. On a prouvé que, M_p/K a un sous-groupe $p^\perp$-couvrant de Hall normal, ce qui finit la preuve de la proposition. □

5.2 Formations

Nous introduisons la notion de *fonction de préformation* f sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, puis nous définissons les classes de groupes de la forme $\mathfrak{F}(f)$ et $\mathfrak{F}^*(f)$ (définition 5.2.2). Ce sont des analogues des classes de groupes étudiées dans la section 4 de [33] (lesquelles sont notées $\mathfrak{F}(f)$). Nous étudions les liens entre $\mathfrak{F}(f)$ et $\mathfrak{F}^*(f)$. Le résultat principal de la section donne un critère pour que tout π-groupe dans $\mathfrak{F}^*(f)$ appartienne à $\mathfrak{F}(f)$ (théorème 5.2.12). Aussi, nous cherchons à savoir si $\mathfrak{F}(f)$ et $\mathfrak{F}^*(f)$ sont des *formations* (définition 5.2.14). Il s'avère que $\mathfrak{F}(f)$ est toujours une formation (proposition 5.2.26), mais pas $\mathfrak{F}^*(f)$ (exemple 5.2.27 et proposition 5.2.29).

Définition 5.2.1. – *On désignera par $\mathcal{D}loc$ la classe des sections localement closes résolubles des groupes de rang de Morley fini.*

Soit $\mathfrak{D}$ une sous-classe de $\mathcal{D}loc$. $\mathfrak{D}$ est dite I-d_{loc}-close *si, pour tout $H/K \in \mathcal{D}loc$ et pour tout U sous-groupe localement clos de H, les trois conditions suivantes sont équivalentes :* (1) $UK/K \in \mathfrak{D}$; (2) $U/(U \cap K) \in \mathfrak{D}$; (3) $U^hK/K \in \mathfrak{D}$ *pour tout* $h \in H$.

Soit $\mathfrak{D}$ une sous-classe I-d_{loc}-close de $\mathcal{D}loc$. $\mathfrak{D}$ est dite Q-d_{loc}-close *si, pour tout $H/K \in \mathfrak{D}$ et tout $U/K \in \mathcal{D}loc$ sous-groupe normal de H/K, $H/U \in \mathfrak{D}$.*

Soit $\mathfrak{D}$ une sous-classe de $\mathcal{D}loc$. $\mathfrak{D}$ est dite S-d_{loc}-close*, si pour tout $H/K \in \mathfrak{D}$, tout sous groupe $U/K \in \mathcal{D}loc$ de H/K appartient à $\mathfrak{D}$.*

Dans toute la suite, $\mathfrak{R}$ désignera une sous-classe de $\mathcal{D}loc$ qui est S-d_{loc}-close et Q-d_{loc}-close. Le corollaire 3.4.12 nous permet de supposer, pour les démonstrations, que les éléments de $\mathfrak{R}$ sont des sections localement closes de groupes de rang de Morley fini *résolubles.*

Définition 5.2.2. – *Soient $p \in \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathcal{D}loc$ et $\mathfrak{E}$ une classe de groupes. On note $C_{H/K}(\mathfrak{E}, p)$ l'intersection des centralisateurs dans H/K des p-sections H/K-d_{loc}-minimales U/V de H telles que $A_H(U/V) \in \mathfrak{E}$. Si H/K n'a pas de telles sections, $C_{H/K}(\mathfrak{E}, p) = H/K$. Soit $C/K = C_{H/K}(\mathfrak{E}, p)$. Alors on note $A_{H/K}(\mathfrak{E}, p) = H/C$.*

Soit $\mathfrak{X}$ une sous-classe Q-d_{loc}-close de $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{X}$ est une $(\mathfrak{R}, p)$-préformation *pour $p \in \mathcal{P}^+$ si, pour tout $H/K \in \mathfrak{R}$, $A_{H/K}(\mathfrak{X}, p) \in \mathfrak{X}$.*

Soient π un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}^+$ et f une application qui, à chaque $p \in \pi$, associe une $(\mathfrak{R}, p)$-préformation $f(p)$ (on dit que f est une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur *π). On note $\mathfrak{F}(f)$ la classe des π-groupes $H/K \in \mathfrak{R}$ telle que $A_{H/K}(\mathfrak{R}, p) \in f(p)$ pour tout $p \in \pi$.*

Soient $H/K \in \mathfrak{R}$, π un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}^+$, f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur π, $p \in \pi$ et U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H. On dit que U/V est une f-section *de H/K si $A_H(U/V) \in f(p)$. Un sous-groupe $L/K \in \mathfrak{R}$ de H/K est un* sous-groupe f-couvrant *de H/K si L couvre toutes les f-sections de H/K. On note $\mathfrak{F}^*(f)$ la classe des groupes $H/K \in \mathfrak{R}$ sans sous-groupe f-couvrant propre.*

Remarque 5.2.3. – Soient π un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}^+$, f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur π et $H/K \in \mathfrak{R}$. Alors $H/K \in \mathfrak{F}(f)$ si et seulement si chaque section H/K-d_{loc}-minimale de H est une f-section. En particulier, le lemme 5.1.20 donne $\mathfrak{F}(f) \subseteq \mathfrak{F}^*(f)$.

Remarque 5.2.4. – Contrairement à [33], nous ne supposons pas les classes de groupes considérées closes par isomorphismes. Nous les supposons seulement I-d_{loc}-closes.

Cependant, nous pouvons quand même appliquer les résultats de [33] aux sections localement finies résolubles des groupes de rang de Morley fini. En effet, les résultats de [33] restent vrais si on remplace la condition *"toutes les classes de groupes considérées sont closes par isomorphismes"* par : *"un groupe de la forme UK/K appartient à une classe $\mathcal{D}$ de groupes si et seulement s'il en est de même pour $U/(U \cap K)$"*.

Le lemme 5.2.5 constitue une remarque importante, puisque c'est grâce à son existence, que l'on pourra appliquer les résultats de [33] à notre contexte.

Lemme 5.2.5. – *Soient π un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}^+$ et f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur π. Alors $\mathfrak{F}^*(f) \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{F}(f) \cap \mathfrak{U}$.*

Preuve. – Par la remarque 5.2.3, on a $\mathfrak{F}(f) \cap \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}^*(f) \cap \mathfrak{U}$. Soit $H/K \in \mathfrak{F}^*(f) \cap \mathfrak{U}$. Pour tout $p \in \pi$ on note $M_p/K = C_{H/K}(f(p), p)$. Alors $H/M_p \in f(p)$ pour tout $p \in \pi$. Soient $\mathcal{M} = (M_p/K)_{p\in\pi}$ et M/K un $\mathcal{M}$-normalisateur de H/K. D'après le fait 5.1.10, M/K est un sous-groupe f-couvrant de H/K. On en déduit $M = H$, en particulier H/K est un π-groupe et, pour tout $p \in \pi$, $A_{H/K}(\mathcal{D}loc, p) \in f(p)$. Ceci montre que H/K est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. $\square$

Lemme 5.2.6. – *Soit f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Alors $\mathfrak{F}^*(f)$ est Q-d_{loc}-close.*

Preuve. – $\mathfrak{F}^*(f)$ est I-d_{loc}-close. Montrons que $\mathfrak{F}^*(f)$ est Q-d_{loc}-close. Soient $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ et M/K un sous-groupe normal de H/K dans $\mathcal{D}loc$. Soient L/M un sous-groupe f-couvrant de H/M et U/V une f-section de H/K. Montrons que L couvre U/V. On peut supposer $UM \neq VM$. Alors UM/VM est une f-section de H/M et $UM = (L \cap UM)V$. Ainsi $U = (U \cap L)V$ et L couvre U/V. On en déduit que L/K est un sous-groupe f-couvrant de H/K, donc $L = H$ puisque $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. Ceci montre que $H/M \in \mathfrak{F}^*(f)$ et que $\mathfrak{F}^*(f)$ est Q-d_{loc}-close. $\square$

Nous nous intéresserons particulièrement aux fonctions de $\mathfrak{R}$-préformations f sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ pour lesquelles tout π-groupe dans $\mathfrak{F}^*(f)$ est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. Nous donnons un critère permettant de reconnaitre certaines d'entre elles (théorème 5.2.12).

Définition 5.2.7. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathcal{D}loc$. Le π-système $\mathcal{M}_{H/K}(f) = (\cap_{p\in\sigma} C_{H/K}(f(p), p))_{\sigma\subseteq\pi}$ de H/K est appelé* f-système *de H/K.*

Lemme 5.2.8. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathfrak{R}$. Alors $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*
(i) H/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K ;
(ii) si $\infty \in \pi$, $C_{H/K}(f(\infty), \infty)$ centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H.

Preuve. – Pour tout $\sigma \subseteq \pi$, on note $M_\sigma/K = \cap_{p\in\sigma} C_{H/K}(f(p), p)$. Supposons $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. D'après le corollaire 5.1.14, tout $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K est un sous-groupe f-couvrant de H/K. Donc H/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K et on peut supposer $\infty \in \pi$. D'après la proposition 5.1.23, H/K possède un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur N^*/K. H/K étant sans sous-groupe f-couvrant propre, on a $H = N^*$ et le corollaire 5.1.24 montre que M_∞ centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H.

Réciproquement, supposons que H/K soit un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K et que, si $\infty \in \pi$, M_∞ centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H. Alors H/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K. Soit L/K un sous-groupe f-couvrant de H/K. On va montrer que $L = H$. Montrons d'abord que L/K est un sous-groupe ∞-couvrant de H/K. Si $\infty \notin \pi$, alors H/K est localement fini et L/K est un sous-groupe ∞-couvrant de H/K, donc on peut supposer $\infty \in \pi$. Comme M_∞ centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H et comme $H/M_\infty \in f(\infty)$, L/K couvre toutes les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H et L/K est donc un sous-groupe ∞-couvrant de H/K.

Soient $p \in \mathcal{P}^+$, U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H et $C/K = C_{H/K}(U/V)$. Montrons que L couvre U/V. Ce qui précède permet de supposer $p \neq \infty$. Comme L/K est un sous-groupe ∞-couvrant de H/K et comme H/K est un sous-groupe π-couvrant de Hall de H/K, le lemme 5.1.15 dit que L/K contient un $\pi^{\perp}$-sous-groupe de Hall de H/K. Donc le corollaire 3.2.6 (ii) permet de supposer $p \in \pi$. Si $M_p \leq C$ alors, comme $H/M_p \in f(p)$, on a $H/C \in f(p)$ et U/V est une f-section de H/K, donc L couvre U/V. On va donc supposer $M_p \not\leq C$. Alors la proposition 5.1.26 dit qu'un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K couvre U/V. Mais le théorème 4.4.9 donne l'existence d'un sous-groupe ∞-couvrant de Hall S/K de H/K contenu dans L/K. Par conjugaison des sous-groupe ∞-couvrants de Hall de H/K (théorème 4.4.9), S couvre U/V, donc L couvre U/V. On en déduit que L couvre chaque p-section H/K-d_{loc}-minimale de H/K pour $p \in \mathcal{P}^+$, donc $L = H$ (lemme 5.1.20) et $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. □

Proposition 5.2.9. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathfrak{R}$. Alors $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ si et seulement si H/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre et si, pour tout $p \in \pi$ et toute p-section H/K-d_{loc}-minimale U/V de H, (i) ou (ii) est vérifiée :*

(i) U/V est une f-section ;

(ii) $p \in \pi^-$ et un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K couvre U/V.

Preuve. – Tout sous-groupe π-couvrant de H/K est f-couvrant donc, si $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$, H/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre. Le lemme 5.2.8 dit que les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H/K sont des f-sections. Aussi, le lemme 5.2.8 montre que H/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K, donc la proposition 5.1.26 montre que, si $p \in \pi^-$, alors toute p-section H/K-d_{loc}-minimale de H vérifie (i) ou (ii).

Réciproquement, supposons que H/K n'ait pas de sous-groupe π-couvrant propre et que, pour tout $p \in \pi$, toute p-section H/K-d_{loc}-minimale de H vérifie (i) ou (ii). Soit R/K un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de $C/K = C_{H/K}(f(\infty), \infty)$. Montrons que $N_C(R)$ couvre chaque p-section H/K-d_{loc}-minimale de C pour tout $p \in \mathcal{P}^+$. Soit U/V une telle section. Si $p \neq \infty$, le corollaire 3.2.6 (ii) dit que R couvre U/V, donc $N_C(R)$ couvre U/V. Donc on peut supposer $p = \infty$. Le théorème 3.2.5 et l'argument de Frattini donnent $N_{C/V}(RV/V) = N_C(R)V/V$. Mais U/V est centralisée par C/K d'après (i), donc $N_C(R)$ couvre U/V.

Montrons que H/K appartient à $\mathfrak{F}^*(f)$. $N_C(R)$ est localement clos d'après le corollaire 5.1.4. Donc, par le lemme 5.1.20 et par ce qui précède, C normalise R. Alors la proposition 5.1.26 dit que H/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K. Le lemme 5.2.8 permet de conclure. □

Lemme 5.2.10. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H un sous-groupe définissable et connexe de G qui normalise une section H-d_{loc}-minimale finie U/V de G. Alors H centralise U/V.*

Preuve. – Le fait 1.2.6 montre que $[H, U]$ et $[H, V]$ sont des sous-groupes définissables et connexes. En particulier, $[H, U]$ est contenu dans U^- et $[H, V]$ est contenu dans V^-. On peut donc supposer $U^- \not\leq V$, ce qui donne $U/V = U^-V/V$ puisque U/V est H-d_{loc}-minimale. Quitte à considérer $U^-/(U^- \cap V)$ au lieu de U/V, on peut supposer U définissable et connexe. Alors H centralise un sous-groupe d'indice fini de la section définissable U/V^-. Donc H centralise U/V^-, et on peut conclure. □

Proposition 5.2.11. – *Si f est une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et si H/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe, si il existe U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H ($p \in \mathcal{P}$) couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K, alors on a $\infty \in \pi$ et $A_H(U/V) \in f(\infty)$.*

Preuve. – Montrons $\infty \in \pi$. Comme un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K couvre U/V, H/K possède un sous-groupe ∞-couvrant de Hall non trivial. Alors H/K possède un élément d'ordre infini. Si S/K désigne un $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de H/K, le corollaire 3.2.6 (ii) dit que S couvre toutes les sections localement finies H/K-d_{loc}-minimales de H. Comme on a $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ et comme H/K possède un élément d'ordre infini, S/K ne couvre pas toutes les f-sections de H/K. Donc H/K possède une f-section sans torsion, ce qui prouve $\infty \in \pi$.

Montrons $A_H(U/V) \in f(\infty)$. On suppose le contraire. Soient $C/K = C_{H/K}(f(\infty), \infty)$, R/K un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K qui couvre U/V et R_0/K un sous-groupe $p^{\perp}$-couvrant de Hall de H/K qui contient R/K (R_0/K existe d'après les lemmes 4.4.6 et 4.4.15). D'après la proposition 4.4.14, $R_0/K \cap C/K$ contient un unique sous-groupe $p^{\perp}$-couvrant de Hall R_0^*/K de C/K. En particulier, R_0 normalise R_0^*/K et $N_H(R_0^*)$ couvre U/V. Comme C ne centralise pas U/V puisque $A_H(U/V) \notin f(\infty)$, le lemme 5.1.19 dit que U/V est fini. En particulier $(CR)^+$ centralise U/V (lemme 5.2.10).

Soit U_1/V une section CR/K-d_{loc}-minimale contenue dans U/V. Montrons que CR centralise U_1/V. R/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K (lemme 4.4.6), donc $R = R^+K$ puisque R/R^+K est localement fini. Alors R/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de $(CR)^+K/K$ (corollaire 4.4.11). Par l'argument de Frattini et par conjugaison des sous-groupes ∞-couvrants de Hall de $(CR)^+K/K$ (théorème 4.4.9), on obtient $CR = (CR)^+N_{CR}(R)$. Notons $N = N_{CR}(R)$ et montrons que N centralise U_1/V. Soit $(L_i)_{i\leq\alpha}$ (α ordinal) une suite croissante de sous-groupes localement clos de R normalisés par N avec $L_0 = K$, $L_\alpha = R$, L_{i+1}/L_i est N-d_{loc}-minimale pour tout $i < \alpha$ et $L_\beta = \cup_{j<\beta} L_j$ pour tout ordinal limite $\beta \leq \alpha$. De plus, on construit cette suite de telle façon que, si L_i évite U_1/V et si il existe une section N-d_{loc}-minimale M/L_i de R avec M qui évite U_1/V, alors L_{i+1} évite U_1/V. Alors il existe un plus petit ordinal j tel que L_j n'évite pas U_1/V. j est nécessairement un ordinal successeur et il existe $k < \alpha$ avec $j = k + 1$. L_k est un sous-groupe localement clos de R maximal parmis ceux qui évitent U_1/V et qui sont normalisés par N. Comme $(CR)^+$ centralise U/V et comme $CR = (CR)^+N$, U_1/V est N-d_{loc}-minimal. Donc tout sous-groupe localement clos de R qui est normalisé par N et qui contient strictement L_k couvre U_1/V. Comme R/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de R/K, il existe un $\mathcal{P}^*$-sous-groupe maximal T de R^+ tel que $R = TK$ (théorème 4.4.9 (*ii*)). T' étant sans torsion (proposition 2.7.9), $R'L_k/L_k$ est aussi sans torsion, donc $R'L_k$ ne couvre pas U_1/V d'où $R' \leq L_k$. Ainsi R/L_k est abélien. Soient W/L_k le plus grand sous-groupe de torsion de R/L_k. Comme $R = R^+K = R^+L_k$, R/L_k n'est pas localement fini et $W < R$. C centralise chaque ∞-section H/K-d_{loc}-minimale de H (lemme 5.2.8) donc, en particulier, $N_C(R)$ centralise chaque ∞-section N/K-d_{loc}-minimale de R et on a $C_{R/W}(N_C(R)) \neq 1$. Comme $N = N_C(R)R$ et comme R/W est abélien, on en déduit $C_{R/W}(N) \neq 1$. Notons $X/W = C_{R/W}(N)$. Pour tout $\overline{g} \in N/L_k$, on note

$$ad_{\overline{g}} : \begin{array}{ccc} X/L_k & \longrightarrow & W/L_k \\ \overline{x} & \longmapsto & [\overline{x}, \overline{g}] \end{array} .$$

C'est un homomorphisme de groupe et $Imad_{\overline{g}}$ est localement fini pour tout $\overline{g} \in N/L_k$, donc $(X/L_k)/C_{X/L_k}(N)$ est localement fini et $C_{X/L_k}(N) \neq 1$. Par maximalité de L_k, $C_{X/L_k}(N)$ couvre U_1/V, donc $N \leq C_H(U_1/V)$ et CR centralise U_1/V.

On a montré $C_{U/V}(C) \neq 1$, donc C centralise U/V par minimalité de U/V, ce qui est contradictoire. $\square$

Théorème 5.2.12. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. Si $\infty \in \pi$, on suppose que H/K vérifie*

(∗) Pour tout $p \in \mathcal{P}$ et toute p-section H/K-d_{loc}-minimale U/V de H couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K, si on a $A_H(U/V) \in f(\infty)$, alors $p \in \pi$ et $A_H(U/V) \in f(p)$.

Alors $H/K \in \mathfrak{F}(f)$.

Preuve. – On peut supposer $\infty \in \pi$. Soient $p \in \mathcal{P}$ et U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H. Montrons que U/V est une f-section. On suppose le contraire. Montrons d'abord que

U/V est couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K. Si $p \notin \pi$, le lemme 5.1.15 dit que U/V est couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K. Sinon, on a $p \in \pi^-$ et, comme H/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe, la proposition 5.2.9 (ii) dit qu'un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K couvre U/V.

La proposition 5.2.11 donne $A_H(U/V) \in f(\infty)$, et on obtient $p \in \pi$ et $A_H(U/V) \in f(p)$ d'après $(*)$. Donc U/V est une f-section, ce qui est contradictoire. □

Corollaire 5.2.13. – *Soit f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Si $\infty \in \pi$, on suppose $f(\infty) \subseteq \cap_{p\in\pi} f(p)$. Alors $\mathfrak{F}(f)$ est la classe des π-groupes appartenant à $\mathfrak{F}^*(f)$.*

Preuve. – La remarque 5.2.3 dit que $\mathfrak{F}(f)$ est contenu dans $\mathfrak{F}^*(f)$. Donc il suffit de montrer que tout π-groupe appartenant à $\mathfrak{F}^*(f)$ est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. Or, si H/K est un tel groupe, alors H/K vérifie la propriété $(*)$ du théorème 5.2.12, d'où $H/K \in \mathfrak{F}(f)$. □

Définition 5.2.14. – *Une sous-classe $\mathfrak{D}$ de $\mathcal{D}loc$ est dite* R-d_{loc}-close *si, pour tout $H/K \in \mathcal{D}loc$ et toute famille $(U_i/K)_{i\in I}$ de $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normaux de H/K avec $H/U_i \in \mathfrak{D}$ pour tout $i \in I$, on a $H/\cap_{i\in I} U_i \in \mathfrak{D}$.*

Une sous-classe R-d_{loc}-close de $\mathfrak{R}$ est appelée une $\mathfrak{R}$-formation.

Par exemple, la proposition 3.5.14 montre que la classe des sections localement closes et localement nilpotentes est une $\mathcal{D}loc$-formation. Nous allons généraliser ce résultat en montrant que, si f est une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, alors $\mathfrak{F}(f)$ est une $\mathfrak{R}$-formation (proposition 5.2.26). La preuve utilise la proposition 5.2.23, qui est un analogue au fait suivant :

Fait 5.2.15. – **([33], th. 3.8, Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *Soient $p \in \mathcal{P}$, G un groupe localement fini et localement résoluble et $\mathcal{O}_{p',p}(G)/\mathcal{O}_{p'}(G) = \mathcal{O}_p(G/\mathcal{O}_{p'}(G))$. Alors on a $\mathcal{O}_{p',p}(G) = C$ où C désigne l'intersection des centralisateurs des p-sections minimales normales de G.*

Définition 5.2.16. – *Soient G un groupe et N un sous-groupe normal de G. Si N est hypercentral, on note $H_G(N) = \langle U \trianglelefteq G : N \leq Z_\infty(U)\rangle$.*

Lemme 5.2.17. – *Soient $H/K \in \mathcal{D}loc$ et L/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K. On suppose L/K localement nilpotent. Alors $H_{H/K}(L/K)$ est égal à l'intersection des centralisateurs dans H/K des sections H/K-d_{loc}-minimales de L. De plus, $H_{H/K}(L/K)$ est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K contenant L/K, et on a $L/K \leq Z_\infty(H_{H/K}(L/K))$.*

Preuve. – On note C/K l'intersection des centralisateurs dans H/K des sections H/K-d_{loc}-minimales de L. Montrons que $H_{H/K}(L/K)$ est contenu dans C/K. Soient U/K un sous-groupe normal de H/K avec $L/K \leq Z_\infty(U/K)$ et A/B une section H/K-d_{loc}-minimale de L. Comme L/K est hypercentral dans U/K, A/B est hypercentral dans U/B et on a $C_{A/B}(U/B) \neq 1$. Mais $C_{A/B}(U/B)$ est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/B (proposition 3.1.33), et $C_{A/B}(U/B)$ est normal dans H/B. Donc, par minimalité de A/B, U centralise A/B et on en déduit que $H_{H/K}(L/K)$ est contenu dans C/K.

Montrons que C/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K contenant L/K. Comme L/K est normal dans H/K, C/K est normal dans H/K. Comme L/K est hypercentral (proposition 3.4.18), $H_{H/K}(L/K)$ contient L/K, d'où $L/K \leq C/K$. Aussi, la proposition 3.1.33 dit que C/K est une section localement close.

Il reste à montrer que L/K est un sous-groupe hypercentral de C/K. En effet, on aura donc $C/K \leq H_{H/K}(L/K)$, d'où $C/K = H_{H/K}(L/K)$ et $L/K \leq Z_\infty(H_{H/K}(L/K))$. D'après la proposition 3.5.7 il existe un ordinal α et une suite croissante $(A_i/K)_{i\leq\alpha}$ de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de H/K tels que $A_0/K = 1$, $A_\alpha = L$, A_{i+1}/A_i soit H/K-d_{loc}-minimale, pour tout $i < \alpha$ et, pour tout $i \leq \alpha$ ordinal limite, $A_i = \bigcup_{j<i} A_j$. Alors C/K centralise A_{i+1}/A_i pour tout $i < \alpha$, et on obtient $L/K \leq Z_\alpha(C/K)$. On a prouvé le résultat. □

Lemme 5.2.18. – *Soit G un groupe résoluble avec $HP(G)$ groupe hypercentral. Alors on a $H_G(HP(G)) = HP(G)$.*

Preuve. – Comme $HP(G)$ est hypercentral, on a $HP(G) \leq H_G(HP(G))$, et il suffit de prouver l'inclusion inverse. Soit U un sous-groupe normal de G avec $HP(G) \leq Z_\infty(U)$. Comme G est résoluble, il existe un plus petit entier k tel que $U^{(k+1)}$ soit contenu dans $HP(G)$. D'après le choix de U on a $HP(G) \leq Z_\infty(U^{(k)}HP(G))$ et, comme $U^{(k)}HP(G)/HP(G)$ est abélien, $U^{(k)}HP(G)$ est hypercentral. Donc $U^{(k)}HP(G)$ est localement nilpotent d'après les faits 1.5.2 et 1.5.3. On en déduit que $HP(G)$ contient $U^{(k)}$, ce qui prouve que $k = 0$ et $U \leq HP(G)$, d'où $H_G(HP(G)) \leq HP(G)$. $\square$

Définition 5.2.19. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathcal{D}loc$ et U/K un sous-groupe de H/K. On dit qu'un U/K est un $\pi^\#$-sous-groupe de H/K si U/K ne possède pas de $\pi^\perp$-élément.*

Par exemple, le pur groupe $\mathbb{C}^*$ est un $\mathcal{P}^\#$-groupe.

Remarque 5.2.20. – Un π-sous-groupe d'un $\mathcal{D}loc$-groupe est un $\pi^\#$-sous-groupe et, réciproquement, un $\pi^\#$-sous-groupe localement fini est un π-sous-groupe. Aussi, si on a $\infty \in \pi$, un $\pi^\#$-sous-groupe est la même chose qu'un π-sous-groupe.

Lemme 5.2.21. – *Soient $H/K \in \mathcal{D}loc$, $\pi \subseteq \mathcal{P}$ et U/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe localement nilpotent et normal de H/K. On suppose que U/K est un $\pi^\#$-groupe. Alors U^+K^-/K^- est abélien et divisible et, si R/K est le π-sous-groupe de Hall de U/K, $C_{H/K}(R/K) = C_{H/K}(U/K)$.*

Preuve. – Quitte à quotienter H par K^-, on peut supposer $K^- = 1$, en particulier U^+ centralise K d'après le fait 1.2.6. Comme on a $\pi \subseteq \mathcal{P}$ et comme U/K est un $\pi^\#$ groupe, R/K est l'unique $\mathcal{P}$-sous-groupe de Hall de U/K. La proposition 3.3.6 dit que U^+ est nilpotent et divisible et que $U = U^+ * R$. Alors $(U^+)'$ est sans torsion d'après le fait 1.3.13 et, comme $(U^+)'$ est définissable et connexe (fait 1.2.6), $(U^+)'K/K$ est un ∞-sous-groupe de U/K. Comme U/K est un $\pi^\#$-groupe, on obtient $(U^+)' \leq K$. On en déduit que $(U^+)'$ est contenu dans $K^- = 1$, ce qui montre que U^+ est abélien.

Montrons que $C_{H/K}(R/K) = C_{H/K}(U/K)$. Soient $C/K = C_{H/K}(R/K)$, $c \in C$ et $\overline{c}$ sa classe modulo K. Notons

$$\begin{array}{rccc} ad: & U^+K/K & \longrightarrow & U^+K/K \\ & \overline{u} & \longmapsto & [\overline{c}, \overline{u}] \end{array}.$$

Alors ad est un homomorphisme définissable de groupes puisque U^+ est abélien. On a donc $(U^+K/K)/Ker(ad) \cong [c, U^+]K/K$. Mais R/K contient toute la torsion de U/K et, comme $\overline{c}$ centralise R/K, on en déduit que $Ker(ad) = C_{U^+K/K}(\overline{c})$ contient toute la torsion de U^+K/K. Alors $(U^+K/K)/Ker(ad)$ et $[c, U^+]K/K$ sont sans torsion. Comme $[c, U^+]$ est définissable et connexe (fait 1.2.6), on obtient $[c, U^+]K/K = 1$ puisque U/K est un $\pi^\#$-groupe. On a prouvé que $\overline{c}$ centralise U^+K/K, d'où $C_{H/K}(R/K) = C_{H/K}(U/K)$. $\square$

Lemme 5.2.22. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathcal{D}loc$, $\mathcal{O}/K = \mathcal{O}_{\pi^\perp}(H/K)$ et $P/\mathcal{O}$ le π-sous-groupe de Hall de $HP(H/\mathcal{O})$. Alors $H_{H/\mathcal{O}}(P/\mathcal{O})$ est un $\pi^\#$-sous-groupe nilpotent-par-fini de $H/\mathcal{O}$.*

Preuve. – Notons $U/\mathcal{O} = HP(H/\mathcal{O})$. Montrons que $U/\mathcal{O}$ est une section localement close hypercentrale et nilpotente-par-finie, et que $U/\mathcal{O}$ est un $\pi^\#$-groupe. Le corollaire 4.1.26 dit que $\mathcal{O}$ est un sous-groupe localement clos, et le corollaire 3.3.3 et la proposition 4.1.12 montrent que $U/\mathcal{O}$ est une section localement close. Aussi, la proposition 3.4.18 dit que $U/\mathcal{O}$ est hypercentrale et nilpotente-par-finie. Comme on a $\mathcal{O}/K = \mathcal{O}_{\pi^\perp}(H/K)$, $H/\mathcal{O}$ n'a pas de $\pi^\perp$-sous-groupe normal, et la proposition 4.1.12 montre que $U/\mathcal{O}$ est un $\pi^\#$-groupe.

Supposons $\infty \in \pi$. Alors $U/\mathcal{O}$ est un π-groupe (remarque 5.2.20), et on obtient $P/\mathcal{O} = U/\mathcal{O}$. Donc le lemme 5.2.18 donne $H_{H/\mathcal{O}}(P/\mathcal{O}) = U/\mathcal{O}$, et $H_{H/\mathcal{O}}(P/\mathcal{O})$ est bien un $\pi^{\#}$-sous-groupe nilpotent-par-fini de $H/\mathcal{O}$. On peut donc supposer $\infty \notin \pi$.

Quitte à quotienter H par $\mathcal{O}^-$, on peut supposer $\mathcal{O}^- = 1$. Donc tous les sous-groupes normaux et quasiunipotents de H sont des π-groupes. Notons $L/\mathcal{O} = H_{H/\mathcal{O}}(P/\mathcal{O})$. L contient U puisque $U/\mathcal{O}$ est hypercentral. On va montrer que $L/\mathcal{O}$ est nilpotent-par-fini. Comme $[L^\circ, U^+]$ est quasiunipotent d'après le fait 1.2.6 et la proposition 2.7.9, $[L^\circ, U^+]$ est un π-groupe, et on obtient $[L^\circ, U^+] \leq P$. La proposition 3.3.6 donne $U = U^+ * P$. Comme on a $P/\mathcal{O} \leq Z_\infty(L/\mathcal{O})$ (lemme 5.2.17), on en déduit que $U/\mathcal{O}$ est contenu dans $Z_\infty(L^\circ U/\mathcal{O})$. On a prouvé que $H_{H/\mathcal{O}}(U/\mathcal{O})$ contient $L^\circ\mathcal{O}/\mathcal{O}$. Alors le lemme 5.2.18 dit que L° est contenu dans U. Comme $U/\mathcal{O}$ est nilpotent-par-fini, on en déduit que $L/\mathcal{O}$ est nilpotent-par-fini.

Il reste à montrer que $L/\mathcal{O}$ est un $\pi^{\#}$-sous-groupe de $H/\mathcal{O}$. Comme $U/\mathcal{O}$ est un $\pi^{\#}$-groupe, il suffit de montrer que L/U est un π-groupe. Supposons le contraire. Comme $L/\mathcal{O}$ est nilpotent-par-fini, L/U est fini et L/U contient un π'-élément non trivial $\overline{z}$. Alors $\langle\overline{z}\rangle P/\mathcal{O}$ est hypercentral puisqu'on a $P/\mathcal{O} \leq Z_\infty(L/\mathcal{O})$ (lemme 5.2.17). Donc $\langle\overline{z}\rangle P/\mathcal{O}$ est localement nilpotent d'après les faits 1.5.2 et 1.5.3. Comme $P/\mathcal{O}$ est un π-groupe et comme $\langle\overline{z}\rangle\mathcal{O}/\mathcal{O}$ est un π'-élément, on en déduit que $\langle\overline{z}\rangle\mathcal{O}/\mathcal{O}$ centralise $P\mathcal{O}/\mathcal{O}$. Or on a $C_{H/K}(P/\mathcal{O}) = C_{H/K}(U/\mathcal{O})$ d'après le lemme 5.2.21, donc $\langle\overline{z}\rangle\mathcal{O}/\mathcal{O}$ centralise $U/\mathcal{O}$. Alors le lemme 5.2.18 donne $\overline{z} \in U/\mathcal{O}$, ce qui contredit le choix de $\overline{z}$. □

Nous obtenons un analogue au fait 5.2.15 :

Proposition 5.2.23. – *Soient $p \in \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathcal{D}loc$, $C/K = C_{H/K}(\mathcal{D}loc, p)$, $\mathcal{O}/K = \mathcal{O}_{p^\perp}(H/K)$ et $F/\mathcal{O} = F(H/\mathcal{O})$. Alors on a $C/F = \mathcal{O}_p(H/F)$ et C/F est fini.*

Preuve. – Notons $U/\mathcal{O} = HP(H/\mathcal{O})$ et $V/U = \mathcal{O}_p(H/U)$. Montrons que C contient V. Soit A/B une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H. Si V ne couvre pas A/B, alors V évite A/B et on obtient $[V, A]B/B \leq (V \cap A)B/B = 1$. Donc on peut supposer que V couvre A/B. Alors, comme $\mathcal{O}$ évite A/B puisque $\mathcal{O}/K$ est un $p^\perp$-groupe, $(A \cap V)\mathcal{O}/(B \cap V)\mathcal{O}$ est une p-section $H/\mathcal{O}$-d_{loc}-minimale de V. Si V centralise $(A \cap V)\mathcal{O}/(B \cap V)\mathcal{O}$, alors on a $[A, V]B/B = [A \cap V, V]B/B \leq \mathcal{O}B/B \cap A/B = 1$ et V centralise A/B. Donc on peut supposer $A/B = (A \cap V)\mathcal{O}/(B \cap V)\mathcal{O}$. $U/\mathcal{O}$ étant hypercentral (proposition 3.4.18), on a $C_{A/B}(U) \neq 1$. Comme A/B est une section $H/\mathcal{O}$-d_{loc}-minimale, la proposition 3.1.33 montre que U centralise A/B. Soit R/B un p-sous-groupe de Sylow de V/B. Alors R/B est hypercentral (proposition 3.5.7), et on a donc $C_{A/B}(R) \neq 1$. Comme le corollaire 3.2.6 (*ii*) donne $V = UR$ et comme U centralise A/B, on obtient $C_{A/B}(V) = C_{A/B}(R) \neq 1$. Par $H/\mathcal{O}$-d_{loc}-minimalité de A/B, on en déduit que V centralise A/B. Ceci prouve que C contient V.

On note $L/\mathcal{O} = H_{H/\mathcal{O}}(P/\mathcal{O})$ et $P/\mathcal{O}$ le p-sous-groupe de Sylow de $U/\mathcal{O}$. Montrons les égalités $L = V = C$. On a $P \leq V \leq C$ et la proposition 3.5.7 montre que $P/\mathcal{O}$ est contenu dans l'hypercentre de $C/\mathcal{O}$. Donc L contient C. Montrons l'inclusion inverse. Le lemme 5.2.22 dit que $L/\mathcal{O}$ est un $p^{\#}$-groupe nilpotent-par-fini, donc L/U est un p-groupe fini. En particulier, L est contenu dans $V \leq C$. On a donc bien $L = V = C$ et, de plus, $C/\mathcal{O}$ est un $p^{\#}$-groupe nilpotent-par-fini.

Comme on a $F \leq U$, V/F contient $\mathcal{O}_p(H/F)$. Donc C contient F et C/F contient $\mathcal{O}_p(H/F)$. Réciproquement, comme $C/\mathcal{O}$ contient $F/\mathcal{O} = F(H/\mathcal{O})$, on a $F(C/\mathcal{O}) = F/\mathcal{O}$. Mais, $C/\mathcal{O}$ étant nilpotent-par-fini, $F(C/\mathcal{O})$ est d'indice fini dans $C/\mathcal{O}$ et C/F est fini. Comme $C/\mathcal{O}$ est un $p^{\#}$-groupe, on en déduit que C/F est un p-groupe. Donc on a bien $C/F \leq \mathcal{O}_p(H/F)$. □

Lemme 5.2.24. – *Soit $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Alors la classe des $\mathcal{D}loc$-groupes qui sont des π-groupes est une $\mathcal{D}loc$-formation.*

Preuve. – Soit H/K un $\mathcal{D}loc$-groupe avec une famille $(U_i/K)_{i\in I}$ de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes normaux tels que H/U_i soit un π-groupe pour tout $i \in I$. Montrons que $H/\cap_{i\in I} U_i$ est un π-groupe. On peut supposer $K = \cap_{i\in I}U_i$. Il faut donc montrer que H/K ne possède pas d'élément non trivial d'ordre p pour $p \in \pi^\perp$. Supposons qu'il existe $p \in \pi^\perp$ et un élément non trivial $\overline{h}$ d'ordre p de H/K. Si $p = \infty$, alors H/U_i est localement fini pour tout $i \in I$ et, donc, on a $H^+ \leq U_i$ pour tout $i \in I$. En particulier K contient H^+ et H/K est localement fini. Ceci est contradictoire et on a $p \neq \infty$. Mais il existe $i \in I$ tel que U_i/K ne contienne pas $\overline{h}$. Donc H/U_i possède un élément non trivial d'ordre p, ce qui contredit le fait que H/U_i soit un π-groupe. Ceci finit la preuve du lemme. $\square$

Lemme 5.2.25. – *Soit $p \in \mathcal{P}^+$. Alors la classe des $\mathcal{D}loc$-groupes H/K tels que $H/K = C_{H/K}(\mathcal{D}loc, p)$ est une $\mathcal{D}loc$-formation.*

Preuve. – Soit H/K un $\mathcal{D}loc$-groupe avec une famille $(U_i/K)_{i\in I}$ de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes normaux tels qu'on ait $H/U_i = C_{H/U_i}(\mathcal{D}loc, p)$ pour tout $i \in I$. On note $L = \cap_{i\in I}U_i$. Montrons que $H/L = C_{H/L}(\mathcal{D}loc, p)$. On note A/K l'intersection des $\mathcal{D}loc$-sous-groupes normaux H_1/K de H/K tel que H/H_1 soit un p-groupe, $B/K = (A/K)^{\mathcal{N}}$ et C/K l'intersection des $\mathcal{D}loc$-sous-groupes normaux B_1/K de B/K tel que B/B_1 soit un $p^\perp$-groupe.

Montrons que $H/C = C_{H/C}(\mathcal{D}loc, p)$. Le lemme 5.2.24 dit que H/A est un p-groupe et que B/C est un $p^\perp$-groupe. Aussi, A/B est nilpotent d'après la proposition 3.5.12. Donc la proposition 5.2.23 montre que $H/C = C_{H/C}(\mathcal{D}loc, p)$. En particulier C contient L.

Il suffit donc de montrer que L contient C. Soit $i \in I$. Alors on a $H/U_i = C_{H/U_i}(\mathcal{D}loc, p)$. On note $\mathcal{O}/U_i = \mathcal{O}_{p^\perp}(H/U_i)$ et $F/\mathcal{O} = F(H/\mathcal{O})$. La proposition 5.2.23 dit que H/F est un p-groupe, et A est contenu dans F. Mais $F/\mathcal{O}$ est nilpotent (corollaire 3.4.20), donc $A/(A\cap\mathcal{O})$ aussi, et B est contenu dans $\mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}/U_i$ est un $p^\perp$-groupe, on en déduit que C est contenu dans U_i. Ceci prouve que L contient C, d'où le résultat. $\square$

Nous pouvons alors prouver que, si f est une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, alors $\mathfrak{F}(f)$ est une $\mathfrak{R}$-formation. Un résultat identique a été prouvé dans le contexte des $\mathfrak{U}$-groupes ([33], lemme 4.2), et les preuves sont similaires.

Proposition 5.2.26. – *Si f est une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, alors $\mathfrak{F}(f)$ est une $\mathfrak{R}$-formation.*

Preuve. – Soit H/K un $\mathfrak{R}$-groupe avec une famille $(U_i/K)_{i\in I}$ de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes normaux tels qu'on ait $H/U_i \in \mathfrak{F}(f)$ pour tout $i \in I$. On note $L = \cap_{i\in I}U_i$. Il faut montrer que H/L est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. Le lemme 5.2.24 montre que H/L est un π-groupe. Soient $p \in \pi$ et $C/L = C_{H/L}(f(p), p)$. Alors H/C est un $f(p)$-groupe. Mais, pour tout $i \in I$, toutes les p-sections H/U_i-d_{loc}-minimales de H sont des f-sections puisque H/U_i est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. Donc on a $CU_i/U_i \leq C_{H/U_i}(\mathfrak{R}, p)$ pour tout $i \in I$. En particulier, CU_i/U_i centralise toutes ses p-sections CU_i/U_i-d_{loc}-minimales et il en est de même pour $C/(C\cap U_i)$. Alors on a $C/(C \cap U_i) = C_{C/(C\cap U_i)}(\mathcal{D}loc, p)$ pour tout $i \in I$. On déduit de ceci et du lemme 5.2.25 que $C/L = C_{C/L}(\mathcal{D}loc, p)$. On note $\mathcal{O}/L = \mathcal{O}_{p^\perp}(H/L)$, $F/\mathcal{O} = F(H/\mathcal{O})$ et $P/F = \mathcal{O}_p(H/F)$. La proposition 5.2.23 montre que C est contenu dans P puisque $C/L = C_{C/L}(\mathcal{D}loc, p)$, et que $P/L = C_{H/L}(\mathcal{D}loc, p) = C_{H/L}(\mathfrak{R}, p)$. Comme $C_{H/L}(\mathcal{D}loc, p)$ est contenu dans $C/L = C_{H/L}(f(p), p)$, on a $C = P$ et $A_{H/L}(\mathfrak{R}, p) = H/C \in f(p)$. On a prouvé que H/L est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. $\square$

La $\mathfrak{R}$-formation $\mathfrak{F}(f)$ sera appelée *$\mathfrak{R}$-formation saturée définie par f*.

L'exemple 5.2.27 montre qu'en général, les classes de groupes de la forme $\mathfrak{F}^*(f)$ ne sont pas des $\mathfrak{R}$-formations.

Exemple 5.2.27. – On considère le pur groupe $\mathbb{C}^*$ et F un groupe isomorphe à un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$. On note $\pi = \{\infty\}$ et $G = \mathbb{C}^* \times F$. G possède un sous-groupe U du même ordre que F qui intersecte trivialement $\mathbb{C}^* \cup F$. Si f est une fonction de $\mathcal{D}loc$-préformation sur π, alors G/F et G/U sont des $\mathfrak{F}^*(f)$-groupes. Pourtant, $G(\cong G/(F \cap U))$ n'est pas un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. Donc $\mathfrak{F}^*(f)$ n'est pas une $\mathcal{D}loc$-formation.

Il s'avère que l'exemple 5.2.27 est générique. En effet, pour chaque fonction de $\mathcal{D}loc$-préformation f avec $\mathfrak{F}^*(f) \neq \mathfrak{F}(f)$, on peut construire un $\mathcal{D}loc$-groupe H/K qui n'est pas un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe avec deux $\mathcal{D}loc$-sous-groupes normaux L_1/K et L_2/K qui s'intersectent trivialement et tels que H/L_1 et H/L_2 soient des $\mathfrak{F}^*(f)$-groupes (proposition 5.2.29).

Lemme 5.2.28. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. Si R/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K, alors $N_H(R)/K$ est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe.*

Preuve. – On peut supposer $\infty \in \pi$. Comme $N_H(R)/K$ est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K (corollaire 5.1.5), $N_H(R)/K$ est un $\mathfrak{R}$-groupe. Montrons que $N_H(R)/K$ n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre. Soit R_0/K un sous-groupe π-couvrant de $N_H(R)/K$. Comme $\infty \in \pi$, $(R_0 \cap R)/K$ est un sous-groupe ∞-couvrant de R/K (proposition 4.4.14). R/K n'a pas de sous-groupe ∞-couvrant propre (lemme 4.4.6). Donc R_0 contient R. Mais H/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre puisque $H/K \in \mathfrak{F}^*(f)$. Le lemme 5.1.15 dit que R/K contient un $\pi^\perp$-sous-groupe de Hall S/K de H/K. Alors S/K est un $\pi^\perp$-sous-groupe de Hall de $N_H(R)/K$ et tout $\pi^\perp$-élément de $N_H(R)/K$ est dans R/K. On en déduit que $N_H(R)/R$ est un π-groupe et $N_H(R) = R_0R = R_0$. Ceci prouve que $N_H(R)/K$ n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre.

Soient $p \in \pi$ et U/V une p-section $N_H(R)/K$-d_{loc}-minimal de $N_H(R)$. On suppose que soit $p \notin \pi^-$, soit U/V n'est pas couverte par R. D'après la proposition 5.2.9, il suffit de montrer que U/V est une f-section. Comme U/V n'est pas couverte par R, on peut supposer $R \leq V$ puisque $U/V \rtimes A_H(U/V)$ et $UR/VR \rtimes A_H(UR/VR)$ sont isomorphes. Mais il existe une section H/K-d_{loc}-minimale U_1/V_1 de H telle que V_1 évite U/V et U_1 n'évite pas U/V. Par minimalité de U/V, U_1 couvre U/V. Supposons que U_1/V_1 ne soit pas une f-section de H/K. La proposition 5.2.9 dit qu'on a $p \in \pi^-$ et, par conjugaison des sous-groupes ∞-couvrants de Hall de H/K (théorème 4.4.9), R couvre U_1/V_1. Alors on a $U_1 = (U_1 \cap R)V_1$ et, comme V contient R, on obtient $U_1 = (U_1 \cap V)V_1$. Ainsi, $U = (U \cap U_1)V = (U \cap V_1)V$ et V_1 couvre U/V, ce qui est contradictoire. Donc U_1/V_1 est une f-section.

Le théorème 4.4.9 (*ii*) et le fait 4.4.2 donnent $H^+ = Q(H^+)R$. Par l'argument de Frattini, on obtient $H = Q(H^+)N_H(R)$. Comme $Q(H^+)$ centralise U_1/V_1, on en déduit $C_H(U_1/V_1) = Q(H^+)C_{N_H(R)}(U_1/V_1)$. Mais U_1/V_1 est une f-section et $H/C_H(U_1/V_1)$ est un $f(p)$-groupe. Donc $N_H(R)/C_{N_H(R)}(U_1/V_1)$ est un $f(p)$-groupe. On a $C_{N_H(R)}(U_1/V_1) \leq C_{N_H(R)}(U/V)$ puisque U_1 couvre U/V et V_1 évite U/V. Donc $A_H(U/V)$ est un $f(p)$-groupe et U/V est une f-section de $N_H(R)/K$. □

Proposition 5.2.29. – *Si f est une fonction de $\mathcal{D}loc$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, alors $\mathfrak{F}^*(f)$ est une $\mathcal{D}loc$-formation si et seulement si $\mathfrak{F}^*(f) = \mathfrak{F}(f)$.*

Preuve. – Si $\mathfrak{F}^*(f) = \mathfrak{F}(f)$, la proposition 5.2.26 dit que $\mathfrak{F}^*(f)$ est une $\mathcal{D}loc$-préformation. Réciproquement, supposons $\mathfrak{F}^*(f) \neq \mathfrak{F}(f)$. La remarque 5.2.3 dit qu'il existe un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe H/K qui n'est pas un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. Le théorème 5.2.12 montre qu'on a $\infty \in \pi$, qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ et L/M une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall R/K de H/K, et qu'on a soit $p \notin \pi$, soit $A_H(L/M) \in f(\infty) \setminus f(p)$. Montrons qu'on peut supposer $H = N_H(R)$. La proposition 5.2.28 dit que $N_H(R)/K$ est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. D'après le corollaire 4.4.11, R/K est un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de $N_H(R)/K$. Il reste à montrer que $N_H(R)/K$ n'est pas un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. Comme R couvre L/M, on a $N_L(R)/N_M(R) \neq 1$. Le théorème 4.4.9 (*ii*) et le fait 4.4.2 donnent $H^+K = Q(H^+)R$. Par l'argument de Frattini et le théorème 4.4.9, $H = Q(H^+)N_H(R)$. Comme $Q(H^+)$ centralise L/M et comme $H = Q(H^+)N_H(R)$, $N_L(R)/N_M(R)$ est une section $N_H(R)/K$-d_{loc}-minimale.

Si $p \notin \pi$, $N_L(R)/N_M(R)$ n'est pas une f-section et $N_H(R)/K$ n'est pas un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. Donc on peut supposer $A_H(L/M) \in f(\infty) \setminus f(p)$. Comme on a

$$C_H(L/M) = Q(H^+)C_{N_H(L)}(L/M) = Q(H^+)C_{N_H(L)}(N_L(R)/N_M(R)),$$

on obtient $A_{N_H(R)}(N_L(R)/N_M(R)) \in f(\infty) \setminus f(p)$ et $N_L(R)/N_M(R)$ n'est pas une f-section. Ceci prouve que $N_H(R)/K$ n'est pas un $\mathfrak{F}(f)$-groupe et on peut supposer $H = N_H(R)$.

Comme R/K n'a pas de sous-groupe ∞-couvrant propre (lemme 4.4.6) et comme R/R^+K est localement fini, on a $R = R^+K$. La proposition 2.7.9 dit que $R'K/K$ est sans torsion et le lemme 3.1.25 dit que $R'K/K$ est un $\mathcal{D}loc$-groupe. Alors LR'/MR' est une p-section $H/R'K$-d_{loc}-minimale de H et on a $C_H(LR'/MR') = C_H(L/M)$. Ainsi, on a soit $p \notin \pi$, soit $A_H(LR'/MR') \in f(\infty) \setminus f(p)$ et $R/R'K$ n'est pas un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. On peut donc supposer R/K abélien. De plus, on a $H/M \in \mathfrak{F}^*(f) \setminus \mathfrak{F}(f)$ et on peut supposer $K = M$.

Soient D_1 et D_2 deux groupes définissablement isomorphes à $d(H)$ et ϕ_1 et ϕ_2 les isomorphismes de $d(H)$ sur D_1 et D_2 respectivement. Soit $G_1 = (D_1 \times D_2) \rtimes d(H)$ où $d(H)$ agit sur $D_1 \times D_2$ par conjugaison et, pour tout $u \in d(H)$ et $(\phi_1(u_1), \phi_2(u_2)) \in D_1 \times D_2$, $(\phi_1(u_1), \phi_2(u_2))^u = (\phi_1(u_1^u), \phi_2(u_2^u))$. Alors G_1 est un groupe de rang de Morley fini. On note $H_0 = (\phi_1(K) \times \phi_2(K)) \rtimes H$, $R_0 = (\phi_1(K) \times \phi_2(R)) \rtimes K$, $L_0 = (\phi_1(L) \times \phi_2(K)) \rtimes K$, $K_1 = (\phi_1(K) \times \phi_2(K)) \rtimes K$, $H_1 = L_0R_0H_0$ et $L_1 = \{(\phi_1(l), \phi_2(l), k) : l \in L, k \in K\}$. L_0/K_1 et L_1/K_1 sont des $\mathcal{D}loc$-sous-groupes normaux de H_1/K_1 qui s'intersectent trivialement. L_0/K_1 est une section H_1/K_1-d_{loc}-minimale de H_1 et L_0/K_1 n'est pas une f-section de H_1/K_1. Alors R_0H_0/K_1 est un sous-groupe f-couvrant propre de H_1/K_1 et H_1/K_1 n'est pas un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe.

Montrons que R_0H_0/K_1 est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. D'après la proposition 5.2.9, les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H sont des f-sections de H/K. Donc les ∞-sections R_0H_0/K_1-d_{loc}-minimales de R_0H_0 sont des f-sections de R_0H_0/K_1. Soit F_0/K_1 un sous-groupe f-couvrant de R_0H_0/K_1. Alors F_0 couvre $R_0H_0/R_0 (\cong H/K \in \mathfrak{F}^*(f))$. Soit $U_1/V_1 = \phi_2(U)/\phi_2(V)$ une ∞-section R_0H_0/K_1-d_{loc}-minimale de R_0/K_1. R_0/K_1 étant abélien, on a $A_{R_0H_0}(U_1/V_1) = H_0R_0/C_{H_0}(U_1/V_1)R_0 \cong H/C_H(U/V)$, et $A_{R_0H_0}(U_1/V_1)$ est un $f(\infty)$-groupe. En particulier, toutes les ∞-sections R_0H_0/K_1-d_{loc}-minimales de R_0/K_1 sont des f-sections de R_0H_0/K_1. Comme R/K n'a pas de sous-groupe ∞-couvrant propre (lemme 4.4.6), R_0/K_1 n'a pas de sous-groupe ∞-couvrant propre. On en déduit que F_0 contient R_0, d'où $F_0 = R_0H_0$ et R_0H_0/K_1 est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe.

Comme R_0H_0 couvre H_1/L_0 et H_1/L_1, H_1/L_0 et H_1/L_1 sont des $\mathfrak{F}^*(f)$-groupes. Mais on a $L_0/K_1 \cap L_1/K_1 = 1$ et, pourtant, H_1/K_1 n'est pas un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. Donc $\mathfrak{F}^*(f)$ n'est pas une $\mathcal{D}loc$-formation. □

5.3 Projecteurs

Dans cette section, nous montrons le théorème principal de la théorie des formations des sections localement closes résolubles (théorème 5.3.14). Il concerne l'existence et la conjugaison des *projecteurs* (définition 5.3.7).

Lemme 5.3.1. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et A/K une section localement close et normale de H telle que $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$. Si D/K est un sous-groupe f-couvrant de H/K, alors $H = AD$.*

Preuve. – Soit U/V une f-section de H/A. Alors U/V est aussi une f-section de H/K, et U/V est couverte par D. On en déduit que DA/A est un sous-groupe f-couvrant de H/A, d'où le résultat. □

Lemme 5.3.2. – *Soient H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble, A/K une section localement close, abélienne et normale de H, D/K une section* *localement close de H telle que $H = AD$, $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, R_σ/K un sous-groupe σ-couvrant de Hall de D/K et S_σ/K le sous-groupe σ-couvrant de Hall de A/K. Alors $R_\sigma S_\sigma/K$ est un sous-groupe σ-couvrant de Hall de H/K.*

Preuve. – Soit U/V une σ-section normale et localement close de H/K. $(U\cap D)/(U\cap VA\cap D)$ est une σ-section normale de D/K, donc R_σ couvre $(U\cap D)/(U\cap VA\cap D)$ et, comme D couvre $U/(U\cap VA)$, R_σ couvre $U/(U\cap VA)$. Aussi, $(U\cap A)/(V\cap A)$ est une σ-section de A, donc S_σ couvre $(U\cap A)/(V\cap A)$, ce qui montre que S_σ couvre $(U\cap VA)/V$. On en déduit que $R_\sigma S_\sigma$ couvre U/V, donc $R_\sigma S_\sigma/K$ est un sous-groupe σ-couvrant de H/K. Soit U_σ/K un sous-groupe σ-couvrant de Hall de H/K contenu dans $R_\sigma S_\sigma/K$ (U_σ/K existe par le théorème 4.4.9). Alors $(U_\sigma\cap A)/K$ contient un sous-groupe σ-couvrant de Hall de A/K (proposition 4.4.14), et on a $S_\sigma \leq U_\sigma$. U_σ/K est un sous-groupe σ-couvrant de Hall de DS_σ/K (corollaire 4.4.11). Donc U_σ/S_σ est un sous-groupe σ-couvrant de Hall de DS_σ/S_σ (corollaire 4.4.10). Mais, d'après le corollaire 4.4.10, $R_\sigma/(S_\sigma\cap D)$ est un sous-groupe σ-couvrant de Hall de $D/(S_\sigma\cap D)$, donc $R_\sigma S_\sigma/S_\sigma$ est un sous-groupe σ-couvrant de Hall de DS_σ/S_σ et on a le résultat. □

Lemme 5.3.3. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et A/K une section localement close, normale et abélienne de H telle que $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$. Si H/K a un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur D/K, alors $D/K \in \mathfrak{F}^*(f)$.*

Preuve. – Soit D_0/K un sous-groupe f-couvrant de D/K. Supposons $D \neq D_0$. D/K étant un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K, il existe une f-section U/V de H/K non couverte par D_0. Soit $p \in \mathcal{P}^+$ tel que U/V soit une p-section. A/K étant abélien, A/K centralise U/V. On en déduit que U/V est D/K-d_{loc}-minimale et $D/C_D(U/V) \in f(p)$. Ceci prouve que $(U\cap D)/(V\cap D)$ est une f-section de D/K, en particulier D_0 couvre $(U\cap D)/(V\cap D)$. Ainsi, D_0 couvre U/V, ce qui est contradictoire. □

La proposition 5.3.4 et les corollaires 5.3.5 et 5.3.6 sont des analogues du théorème 4.9 de [33] :

Proposition 5.3.4. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et A/K une section localement close, normale et abélienne de H telle que $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$. Si un sous-groupe $E/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ de H/K est tel que $H = AE$, alors E/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K.*

Preuve. – Soient $\mathfrak{B} = ((\cap_{p\in\sigma} C_{E/K}(f(p),p))A/K)_{\sigma\subseteq\pi}$, $\mathfrak{P} = (R_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ une base de Sylow couvrante de E/K et $\mathfrak{S} = (S_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ la base de Sylow couvrante de A/K. Le lemme 5.3.2 montre que $\mathfrak{T} = (R_\sigma S_\sigma/K)_{\sigma\subseteq\mathcal{P}^+}$ est une base de Sylow couvrante de H/K. Montrons que E/K est contenu dans E_1/K le $\mathfrak{B}$-normalisateur de H/K associé à $\mathfrak{T}$. La proposition 4.4.14 dit que, pour tout $\sigma \subseteq \pi$, $R_{\sigma^\perp}/K \cap (\cap_{p\in\sigma} C_{E/K}(f(p),p))$ contient un unique sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall $R^*_{\sigma^\perp}/K$ de $\cap_{p\in\sigma} C_{E/K}(f(p),p)$. Comme $E/K \in \mathfrak{F}^*(f)$, E/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de E/K (lemme 5.2.8), donc E/K normalise $R^*_{\sigma^\perp}/K$ pour tout $\sigma \subseteq \pi$. Mais $R^*_{\sigma^\perp} S_{\sigma^\perp}/K$ est un sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall de $(\cap_{p\in\sigma} C_{E/K}(f(p),p))A/K$ pour tout $\sigma \subseteq \pi$ (lemme 5.3.2), donc $E/K \leq E_1/K$.

Soient $\sigma \subseteq \pi$ et $B = A\cap E$. On appelle σ-f-section de H/K (resp. E/K) une f-section de H/K (resp. E/K) qui est une σ-section. Montrons :

$$(*)\qquad \cap_{p\in\sigma}\, C_{H/K}(f(p),p) \leq (\cap_{p\in\sigma} C_{E/K}(f(p),p))A/K$$

Si U/V est une σ-f-section de E/K évitée par A, alors $C_{E/K}(U/V)A/K = C_{H/K}(UA/VA)$, en particulier UA/VA est une σ-f-section de H/K. Si U/V est une σ-f-section de E/K non évitée par A, alors U/V est couverte par A et $C_{E/K}(U/V)A/K = C_{H/K}((U\cap A)/(V\cap A))$, en particulier $(U\cap A)/(V\cap A)$ est une σ-f-section de H/K. On en déduit que $\cap_{p\in\sigma}C_{H/K}(f(p),p)$ est contenu dans $\cap_{p\in\sigma}(C_{E/K}(f(p),p)A/K)$. Donc, pour montrer $(*)$, il suffit de montrer :

$$(1)\quad \cap_{p\in\sigma}\,(C_{E/K}(f(p),p)A/K) = (\cap_{p\in\sigma}C_{E/K}(f(p),p))A/K$$

A étant abélien, si on note $B = A\cap E$, alors $B \leq C_E(U/V)$ pour toute U/V σ-f-section de E/K. Donc montrer (1) revient à montrer :

$$(2)\quad \bigcap_{U/V\ \sigma-f-\text{section de } E/K} (C_{E/B}\times A/B) = (\bigcap_{U/V\ \sigma-f-\text{section de } E/K} C_{E/B})\times A/B$$

Comme $E/B\cap A/B = 1$, l'égalité (2) est vérifiée et on a démontré $(*)$.

Soit $\sigma\subseteq\pi$. $(*)$ montre que $R^*_{\sigma^\perp}S_{\sigma^\perp}/K$ contient un unique sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall $P^*_{\sigma^\perp}/K$ de $\cap_{p\in\sigma}C_{H/K}(f(p),p)$ (proposition 4.4.14). Alors $P^*_{\sigma^\perp}/K$ est l'unique sous-groupe $\sigma^\perp$-couvrant de Hall de $\cap_{p\in\sigma}C_{H/K}(f(p),p))$ contenu dans $R_{\sigma^\perp}S_{\sigma^\perp}/K$ et $P^*_{\sigma^\perp}/K$ est normalisée par E_1/K. On en déduit que E_1/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K, ce qui finit la preuve de la proposition. □

Corollaire 5.3.5. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$, $H/K\in\mathfrak{R}$ et A/K une section localement close, normale, abélienne et localement finie de H telle que $H/A\in\mathfrak{F}^*(f)$. Alors H/K possède un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur. Si un sous-groupe $E/K\in\mathfrak{F}^*(f)$ de H/K est tel que $H = AE$, alors E/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K.*

Preuve. – Comme A/K est localement fini et comme on a $H/A\in\mathfrak{F}^*(f)$, le lemme 5.2.8 dit que $C_{H/K}(f(\infty),\infty)$ centralise les ∞-sections H/K-d_{loc}-minimales de H. Le lemme 5.1.22 montre que H/K possède un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur et que, de plus, les $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateurs de H/K sont exactement les sous-groupes π-couvrants de Hall des $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateurs de H/K.

Supposons qu'il existe un sous-groupe $E/K\in\mathfrak{F}^*(f)$ de H/K est tel que $H = AE$. La proposition 5.3.4 dit qu'il existe D/K un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K qui contient E/K. Comme $E/K\in\mathfrak{F}^*(f)$, E/K n'a pas de sous-groupes π-couvrant propre et E/K est contenu dans un sous-groupe π-couvrant de Hall R/K de D/K (lemme 4.4.15). Comme R/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K d'après ce qui précède, on a fini la preuve du corollaire. □

Corollaire 5.3.6. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi\subseteq\mathcal{P}^+$, $H/K\in\mathfrak{R}$, A/K une section localement close, normale, abélienne et localement finie de H telle que $H/A\in\mathfrak{F}^*(f)$ et D/K un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K. Si un sous-groupe localement clos L/K de H/K contient D/K, alors D/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de L/K.*

Preuve. – D'après le lemme 5.3.3, D/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. Le lemme 5.3.1 donne $L = (L\cap A)D$ et le corollaire 5.3.5 dit que D/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur D_1/K de L/K. D'après le lemme 5.3.3, on a $D_1/K\in\mathfrak{F}^*(f)$. Comme $H = AL$, $L/(L\cap A)\in\mathfrak{F}^*(f)$ et le lemme 5.3.1 donne $L = (L\cap A)D_1$, d'où $H = AD_1$. Le corollaire 5.3.5 dit que D_1/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur D_2/K de H/K. Comme $D\leq D_2$, on obtient $D = D_1(= D_2)$. □

Définition 5.3.7. – *Soient $\mathfrak{F}$ une classe de groupes, $\sigma\subseteq\mathcal{P}^+$, $H/K\in\mathcal{D}loc$ et $F/K\in\mathfrak{F}$ un σ-sous-groupe de H/K. Si, pour tout $R/K\in\mathcal{D}loc$ σ-sous-groupe de H/K contenant F/K et tout $A/K\in\mathcal{D}loc$ sous-groupe normal de R/K tel que $R/A\in\mathfrak{F}$, on a $R = FA$, alors F/K est appelé* $(\mathfrak{F},\sigma)$-projecteur *de H/K.*

L'exemple 5.3.8 dit que les $(\mathfrak{F}(f),\sigma)$-projecteurs n'existent pas toujours. C'est pourquoi nous étudierons seulement les $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteurs. Toutefois, il suffit qu'une fonction f vérifie les hypothèses du théorème 5.2.12, pour que l'on obtienne $\mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}^*(f)$, et nous pouvons alors appliquer les résultats des $(\mathfrak{F}^*(f),\sigma)$-projecteurs aux $(\mathfrak{F}(f),\sigma)$-projecteurs.

Exemple 5.3.8. – On considère G un pur groupe isomorphe à $\mathbb{C}^*$. Si f désigne une fonction de $\mathcal{D}loc$-préformation sur $\{\infty\}$ et T le sous-groupe localement fini maximal de G, alors l'unique $\mathfrak{F}(f)$-sous-groupe de G est $\{1\}$. Mais G/T est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe, donc G n'a pas de $(\mathfrak{F}(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur.

Le fait 5.3.9 est le résultat principal de [33]. Ici, nous l'énonçons pour les sections localement closes et localement finies des groupes de rang de Morley fini résolubles. Cela est possible grâce au lemme 5.2.5.

Fait 5.3.9. – **([33], th. 5.4, Gardiner, Hartley, Tomkinson)** *Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathfrak{R}$. On suppose H/K localement fini. Alors H/K possède une unique classe de conjugaison de $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteurs.*

Remarque 5.3.10. – Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, $\mathfrak{F}$ une sous-classe Q-d_{loc}-close de $\mathcal{D}loc$, $H/K \in \mathcal{D}loc$, A/K une σ-section localement close et normale de H et F/K un $(\mathfrak{F}, \sigma)$-projecteur de H/K. Alors FA/A est un $(\mathfrak{F}, \sigma)$-projecteur de H/A.

Lemme 5.3.11. – *Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, $\mathfrak{F}$ une sous-classe Q-d_{loc}-close de $\mathcal{D}loc$, $H/K \in \mathcal{D}loc$, A/K une σ-section localement close et normale de H et F/A un $(\mathfrak{F}, \sigma)$-projecteur de H/A. Alors tout $(\mathfrak{F}, \sigma)$-projecteur de F/K est un $(\mathfrak{F}, \sigma)$-projecteur de H/K.*

Preuve. – Soient E/K un $(\mathfrak{F}, \sigma)$-projecteur de F/K, $R/K \in \mathcal{D}loc$ σ-sous-groupe de H/K contenant E/K et $B/K \in \mathcal{D}loc$ un sous-groupe normal de R/K tel que $R/B \in \mathfrak{F}$. F/A étant un $(\mathfrak{F}, \sigma)$-projecteur de H/A, F/K est un σ-sous-groupe de H/K et $F/A \in \mathfrak{F}$, donc on a $F = AE$, en particulier $F \leq AR$. Or RA/AB est un $\mathfrak{F}$-groupe et RA/K est un σ-groupe, donc on obtient $RA = FB$, en conséquence, $R = (R \cap F)B$. On en déduit que $(R \cap F)/(B \cap F)$ est un $\mathfrak{F}$-groupe, donc $R \cap F = (B \cap F)E$ puisque E/K est un $(\mathfrak{F}, \sigma)$-projecteur de F/K. Ceci prouve que $R = EB$. □

Les deux lemmes suivants sont des analogues du théorème 5.1 de [33] :

Lemme 5.3.12. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et A/K une section localement close, normale, abélienne et localement finie de H telle que $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$. Alors les $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateurs de H/K sont exactement les $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K.*

Preuve. – Si E/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K, alors $H = EA$ puisque $H/A \in \mathfrak{F}^*(f)$. Le corollaire 5.3.5 donne l'existence d'un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur D/K de H/K qui contient E/K. Mais $D/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ (lemme 5.3.3) et les $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K sont des $\mathfrak{F}^*(f)$-sous-groupes maximaux de H/K, donc $E = D$.

Réciproquement, soit D/K un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K. Le lemme 5.3.3 dit que D/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. Soient $L/K \in \mathcal{D}loc$ un sous-groupe de H/K qui contient D/K et $N/K \in \mathcal{D}loc$ un sous-groupe normal de L/K tel que $L/N \in \mathfrak{F}^*(f)$. D'après le corollaire 5.3.6, D/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de L/K. Alors $L = ND$ d'après le lemme 5.3.1, donc D/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K. □

Lemme 5.3.13. – *Soient f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et A un sous-groupe H-minimal de H avec AK/K sans torsion et tel que $H/AK \in \mathfrak{F}^*(f)$. Alors les $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateurs de H/K sont exactement les $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K. De plus, les $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K sont conjugués dans H/K.*

Preuve. – On peut supposer $H/K \notin \mathfrak{F}^*(f)$, en particulier AK/K n'est pas une f-section de H/K et on a $AK/K \neq 1$. Alors, comme A est H-minimal et comme AK/K est sans torsion, AK/K est un sous-groupe H/K-d_{loc}-minimal de H/K. Montrons d'abord que tout $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur E/K de H/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K. Par le lemme

5.3.3, E/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. On a $H = AE$ d'après le lemme 5.3.1. Par H/K-d_{loc}-minimalité de AK/K, toute section localement close U/K de H qui contient E/K couvre ou évite AK/K, en particulier E évite AK/K. Soient U/K une section localement close de H qui contient E/K et B/K une section localement close normale de U telle que $U/B \in \mathfrak{F}^*(f)$. Il faut montrer que $U = BE$. Si AK/K est contenu dans B/K, alors on a $H = AE = U$ et $U = BE$. Donc on peut supposer $AK/K \not\leq B/K$. Ainsi on a $AK/K \cap B/K = 1$ et $C_H(AK/K) = C_H(AB/B)$. Alors, comme AK/K n'est pas une f-section de H/K, AB/B n'est pas une f-section de H/B. Comme le lemme 5.2.8 (ii) dit que toute ∞-section U/B-d_{loc}-minimale de U/B est une f-section puisque $U/B \in \mathfrak{F}^*(f)$, on en déduit $U \neq H$. Alors U évite AK/K puisque $H = AE$ et $E \leq U$. Donc on a $U = E$. Ainsi, E/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K.

Montrons que tout $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur F/K de H/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K. On a $H = AF$ puisque $H/AK \in \mathfrak{F}^*(f)$. Comme A est un sous-groupe H-minimal avec AK/K sans torsion, on obtient $H/K = AK/K \rtimes F/K$ puisque $H/K \notin \mathfrak{F}^*(f)$. Ainsi, F couvre toutes les f-sections de H/K. Si F/K contient un sous-groupe f-couvrant F_1/K de H/K, alors $H = AF_1$ (lemme 5.3.1). On en déduit que F/K est un sous-groupe f-couvrant minimal de H/K. Aussi, la proposition 5.3.4 dit que F/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur E/K de H/K, donc F/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K.

Montrons la conjugaison des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K. Si H/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K, alors la proposition 5.1.23 donne le résultat. Sinon, soit E/K un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K. Comme E/K est un $\mathcal{M}_{H/K}(f)^*$-normalisateur de H/K, E/K est contenu dans un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur D/K de H/K. Mais on a $H/K = AK/K \rtimes E/K$ puisque $H/K \notin \mathfrak{F}^*(f)$. Donc, par H-minimalité de A, on a $H = D$ ou $E = D$. Comme $H \neq D$ puisque H/K n'est pas un $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateur de H/K, on a montré que les $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K sont des $\mathcal{M}_{H/K}(f)$-normalisateurs de H/K, en particulier ils sont conjugués (remarque 5.1.7). $\square$

Théorème 5.3.14. – *Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ et f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Alors H/K possède une unique classe de conjugaison de $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteurs.*

Preuve. – *1) Si $\sigma = \mathcal{P}^+$ et si H a un sous-groupe H-minimal A tel que $H/AK \in \mathfrak{F}^*(f)$.*

Soit T/K le sous-groupe de torsion maximal de AK/K. Montrons d'abord l'existence des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs. H/T a un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur F_0/T d'après le lemme 5.3.13. Le lemme 5.3.12 dit que F_0/K possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur F_1/K. F_1/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K (lemme 5.3.11).

Montrons maintenant la conjugaison des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K. Soient E_1/K et E_2/K deux $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K. Alors E_1T/T et E_2T/T sont des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/T (remarque 5.3.10). D'après le lemme 5.3.13, on peut supposer $E_1T = E_2T$. Mais le lemme 5.3.12 dit que E_1/K et E_2/K sont des $\mathcal{M}^*$-normalisateurs de E_1T/K, et le lemme 5.1.22 montrent qu'il existe M_1/K et M_2/K des $\mathcal{M}$-normalisateurs de E_1T/K tels que E_1/K et E_2/K soient des sous-groupes π-couvrants de Hall de M_1/K et M_2/K respectivement. Par conjugaison des $\mathcal{M}$-normalisateurs de E_1T/K (remarque 5.1.7), on peut supposer $M_1 = M_2$. Le théorème 4.4.9 dit que E_1/K et E_2/K sont conjugués dans M_1/K, ce qui finit la preuve.

2) Si $\sigma = \mathcal{P}^+$.

Par induction sur le rang et le degré de $d(H)$. Si H/K est localement fini, le fait 5.3.9 donne le résultat, donc on peut supposer $H^+ \neq 1$. Soit A un sous-groupe H-minimal de H^+. Alors H/AK possède une unique classe de conjugaison de $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs par hypothèse d'induction. Montrons d'abord que H/K possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur. Soit F/AK un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de H/AK. Si $d(H) = d(F)$, alors A est F-minimal et 1) dit que F/K a un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur. Sinon, par hypothèse d'induction, F/K possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur. Alors le lemme 5.3.11 donne l'existence d'un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de H/K.

Soient E_1/K et E_2/K deux $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/K. E_1A/AK et E_2A/AK étant des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de H/AK (remarque 5.3.10), l'hypothèse d'induction permet de supposer $E_1A = E_2A$. E_1/K et E_2/K sont des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de E_1A/K. L'hypothèse d'induction permet de supposer $d(E_1A) = d(H)$. Alors A est E_1A-minimal et 1) dit que E_1/K et E_2/K sont conjugués.

3) Si σ est un sous-ensemble quelconque de $\mathcal{P}^+$.

Par induction sur le rang et le degré de $d(H)$. Par le fait 5.3.9, on peut supposer $H^+ \neq 1$. Montrons d'abord l'existence des $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteurs de H/K. Supposons H^+ non abélien. D'après la proposition 2.7.9, H^+ possède un p-sous-groupe quasiunipotent H-minimal A ($p \in \mathcal{P}^+$). Par hypothèse d'induction, H/AK possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur E/AK. Si $p \in \sigma$, soit F/K un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur de E/K (il existe d'après 2)). E/K étant un σ-groupe, F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de E/K. Le lemme 5.3.11 montre que F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K. Donc on peut supposer $p \notin \sigma$. Soient F/K un σ-sous-groupe de Hall de E/K, U/K une σ-section localement close de H qui contient F/K et B/K une section localement close normale de U telle que $U/B \in \mathfrak{F}^*(f)$. U/K intersecte trivialement AK/K et on a $E/K = AK/K \rtimes F/K$ (corollaire 4.2.8). Aussi on a $E \leq UA$ et $UA/BA \in \mathfrak{F}^*(f)$, donc $UA = BE$ puisque E/AK est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/AK. Ainsi, on obtient $U = B(U \cap E) = BF$ et F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K.

On peut donc supposer H^+ abélien. Soit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_\sigma(H^+K/K)$. Supposons que $H/\mathcal{O}$ possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur $E/\mathcal{O}$. E/K possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur F/K d'après 2). E/K étant un σ-groupe, F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de E/K. Le lemme 5.3.11 dit que F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K. Ainsi, on peut supposer $\mathcal{O}/K = 1$, en particulier les σ-sous-groupes de H/K sont localement fini. Soit F/K un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur d'un σ-sous-groupe de Hall R/K de H/K (F/K existe d'après le fait 5.3.9). Comme R/K est un σ-groupe et comme $R/K \cap H^+K/K = 1$ puisque $\mathcal{O} = 1$, FH^+/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de RH^+/K. Comme H/H^+K est localement fini, le fait 5.3.9 montre que FH^+/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/H^+K. Soient U/K un σ-sous-groupe de H/K qui contient F/K et B/K un sous-groupe normal de U/K avec $U/B \in \mathfrak{F}^*(f)$. Alors on a $UH^+/BH^+ \in \mathfrak{F}^*(f)$, donc $UH^+ = BH^+F$ puisque FH^+/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/H^+K. Mais $U/K \cap H^+K/K = 1$ puisque U/K est un σ-groupe, donc $U = BF(U \cap H^+) = BF$. On en déduit que F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K.

Montrons que les $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteurs de H/K sont conjugués dans H/K. Soient F_1/K et F_2/K deux $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteurs de H/K. Le théorème 4.1.18 permet de supposer qu'un σ-sous-groupe de Hall R/K de H/K contient F_1/K et F_2/K. Alors F_1/K et F_2/K sont des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de R/K et 2) donne le résultat. □

Corollaire 5.3.15. – *Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et $H/K \in \mathfrak{R}$. Si $\infty \in \sigma \cap \pi$, on suppose $\sigma \subseteq \pi$ et $f(\infty) \subseteq \cap_{p \in \sigma} f(p)$. Alors H/K possède une unique classe de conjugaison de $(\mathfrak{F}(f), \sigma)$-projecteurs.*

Preuve. – Le corollaire 5.2.13 dit que tout σ-sous-groupe de H/K qui est dans $\mathfrak{F}^*(f)$ appartient à $\mathfrak{F}(f)$. Le théorème 5.3.14 donne le résultat. □

Corollaire 5.3.16. – *On suppose H/K localement nilpotent. Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, R/K l'unique σ-sous-groupe de Hall de H/K (proposition 4.1.12) et S/K l'unique sous-groupe π-couvrant de Hall de R/K (corollaire 4.4.12). Alors S/K est l'unique $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K. De plus, si $U/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ est un σ-sous-groupe de H/K, alors U/K est contenu dans S/K.*

Preuve. – Montrons que S/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe. Comme S/K est localement nilpotent, S/K est hypercentral (proposition 3.4.18) et centralise toutes ses sections S/K-d_{loc}-minimales. En particulier, les π-sections S/K-d_{loc}-minimales de S sont des f-sections de S/K. Comme S/K n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre (lemme 4.4.6), on a montré que S/K est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe.

Montrons que tout σ-sous-groupe $V/S \in \mathfrak{F}^*(f)$ de H/S est trivial. D'après le corollaire 4.4.11, S/K est l'unique sous-groupe π-couvrant de Hall de V/K. On en déduit que V n'a pas de π-section V/S-d_{loc}-minimale non triviale. Mais V/S est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe, donc V/S n'a pas de sous-groupe π-couvrant propre, ce qui prouve que V/S est trivial.

Ainsi, comme $\mathfrak{F}^*(f)$ est une classe Q-d_{loc}-close (lemme 5.2.6), tout σ-sous-groupe $U/K \in \mathfrak{F}^*(f)$ de H/K est contenu dans S/K.

D'après le théorème 5.3.14, H/K possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur L/K. Alors LS/S est un σ-groupe et un $\mathfrak{F}^*(f)$-sous-groupe de H/S (lemme 5.2.6). Ce qui précède montre que L/K est contenu dans S/K. Comme S/K est à la fois un σ-groupe et un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe, on obtient $L/K = S/K$. □

Proposition 5.3.17. – *Soient $\sigma \subseteq \mathcal{P}^+$, f une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, $H/K \in \mathfrak{R}$ un σ-groupe et F/K un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K. Alors $N_H(F)/F$ est une section localement close qui ne contient pas de $(\sigma \cap \pi)$-élément non trivial.*

Preuve. – Montrons que $N_H(F)/F$ est une section localement close. Par induction sur le rang de H^+. On peut supposer $K^- = 1$ et H/K non localement fini, donc $H^+ \neq 1$. Soit N_0 le plus grand sous-groupe normal et localement clos de H contenu dans $N_H(F)$. Alors F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de N_0F/K, donc le théorème 5.3.14 et l'argument de Frattini donnent $N_H(N_0F) = N_0N_H(F) = N_H(F)$. Quitte à considérer H/N_0 au lieu de H/K, on peut supposer $N_0 = K$. Comme $H^+ \neq 1$, H^+ possède un sous-groupe H-minimal A. $(FA/A)/(AK/A)$ est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de $(H/A)/(AK/A)$ et, par hypothèse d'induction, $N_H(FA)/FA$ est une section localement close. Comme $N_H(F) \leq N_H(FA)$, on peut supposer FA normal dans H. Par le théorème 5.3.14 et l'argument de Frattini, on obtient $H = AN_H(F)$, en particulier $A \cap F$ est normal dans H, donc $A \cap F \leq N_0 = K$ et $H/K = AK/K \rtimes N_H(F)/K$.

Soit $C/K = C_{H/K}(AK/K)$. Alors $C \cap F$ est un sous-groupe localement clos et normal de H, donc $C \cap F \leq N_0 = K$. Ainsi $[N_C(F), F] \leq C \cap F = K$, donc on a $N_C(F)/K = C_{C/K}(F/K)$ et, comme $C_{C/K}(F/K)$ est localement clos (proposition 3.1.33) et est normal dans H/K puisque $H = AN_H(F)$, $N_C(F) \leq N_0 = K$. Mais $H = AN_H(F)$, donc on obtient $C = AN_C(F) = AK$. En particulier, comme $Q(H^+)$ centralise A, on a $Q(H^+) \leq A(H^+ \cap K)$ et la proposition 2.7.9 donne $N_{H^+}(F)' \leq N_{H^+}(F) \cap Q(H^+) \leq N_{H^+}(F) \cap A(H^+ \cap K)$. Or $N_A(F) \leq K$, donc $N_{H^+}(F)/(H^+ \cap K)$ est abélien. Comme $K^- = 1$, H^+ centralise K (fait 1.2.6), ce qui prouve que $H^+ \cap K$ est central dans H^+ et que $N_{H^+}(F)$ est nilpotent. Soit $E = E_{H^+}(N_{H^+}(F))$. Il s'agit d'un sous-groupe de H^+ définissable, connexe et autonormalisant (corollaires 2.4.5 et 2.6.2), et $N_H(F)$ normalise E. Comme E est définissable, $N_H(E)$ est localement clos. Donc, si $N_H(E)^+ < H^+$, l'hypothèse d'induction donne le résultat. Sinon, comme on a $N_H(E)^+ \leq N_{H^+}(E) = E$, $E = H^+$ et le corollaire 2.4.5 donne $N_{H^+}(F) \leq F(H^+)$. Or $F(H^+)$ centralise A, donc on obtient $F(H^+) \leq C = AK$ et $N_{H^+}(F) \leq AK \cap N_H(F) = K$. Comme $H/K = AK/K \rtimes N_H(F)/K$, on a $H^+K/K = AK/K \rtimes N_{H^+}(F)K/K = AK/K$. Alors $N_H(F)/K$ est localement fini, et $N_H(F)$ est donc un sous-groupe localement clos de H.

Il reste à montrer que $N_H(F)/F$ ne contient pas de $(\sigma \cap \pi)$-élément non trivial. On suppose le contraire. Alors $N_H(F)/F$ possède un $(\sigma \cap \pi)$-sous-groupe localement clos abélien $U/F \neq 1$. En particulier, U/F est un $\mathfrak{F}^*(f)$-groupe, et U/K est un σ-groupe. Comme F/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de H/K contenu dans U/K, F couvre U/F, ce qui contredit $U/F \neq 1$. □

Le corollaire 5.3.15 permet de retrouver le théorème 5 de [4] (pour les groupes de rang de Morley fini), en prenant $\sigma = \mathcal{P}$, $K = 1$, $\mathfrak{R} = \mathcal{D}loc$ et $\pi \subseteq \mathcal{P}$, puis en appliquant la conjugaison des $(\mathfrak{F}(f), \sigma)$-projecteurs de H/K.

On peut aussi remarquer que le théorème 5.3.14 contient, dans son énoncé, plusieurs résultats déjà connus :

- la conjugaison des μ-sous-groupes de Hall pour tout $\mu \subseteq \mathcal{P}$ (théorème 3.2.5), en prenant $\sigma = \mu$, $\pi = \mathcal{P}^+$, $\mathfrak{R} = \mathcal{D}loc$ et $f(p) = \mathcal{D}loc$ pour tout $p \in \mathcal{P}^+$;

- l'existence et la conjugaison des sous-groupes μ-couvrants de Hall pour tout $\mu \subseteq \mathcal{P}^+$ (théorème 4.4.9), en prenant $\sigma = \mathcal{P}^+$, $\pi = \mu$, $\mathfrak{R} = \mathcal{D}loc$ et $f(p) = \mathcal{D}loc$ pour tout $p \in \mu$.

On obtient une nouvelle démonstration et une généralisation du théorème 3.6.6, il s'agit aussi d'une généralisation du théorème 6 de [4] :

Proposition 5.3.18. – *Soient $H/K \in \mathcal{D}loc$, f la fonction de $\mathcal{D}loc$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ qui, à tout $p \in \pi$, associe le singleton $\{\{1\}\}$. Alors les $(\mathfrak{F}^*(f), \pi)$-projecteurs de H/K sont exactement les π-sous-groupes localement nilpotents de H/K qui contiennent tous les π-éléments de leur normalisateur.*

Preuve. – Soient C/K un $(\mathfrak{F}^*(f), \pi)$-projecteur de H/K et R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K qui contient C/K. Alors C/K est autonormalisant dans R/K d'après la proposition 5.3.17. Aussi, d'après le corollaire 5.2.13, C/K est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe, donc C/K centralise chacune de ses sections C/K-d_{loc}-minimales. Ainsi, C/K est hypercentral, donc localement nilpotent d'après la proposition 3.4.18. On en déduit que C/K est un π-sous-groupe localement nilpotent de H/K qui contient tous les π-éléments de son normalisateur.

Réciproquement, soit C/K un π-sous-groupe localement nilpotent de H/K qui contient tous les π-éléments de son normalisateur. Soit R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K qui contient C/K. Alors C/K est un sous-groupe localement nilpotent maximal de R/K (proposition 3.4.18) et $C/K \in \mathcal{D}loc$ (proposition 3.3.1). De plus, C/K est hypercentral (proposition 3.4.18), donc le corollaire 3.1.34 montre que C centralise ses sections C/K-d_{loc}-minimales, et C/K est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe.

On montre que, si L est un sous-groupe localement clos de R et normalisé par C tel qu'on ait $l \in d_{loc}(C^l, C)$ pour tout $l \in L$, alors C/K est un $(\mathfrak{F}(f), \pi)$-projecteur de LC/K. Soit $U/V \in \mathfrak{F}(f)$ une section de LC avec $K \leq V$ et $C \leq U$. Alors on a $U = (U \cap L)C$ et, pour tout $u \in N_U(CV)$, il existe $l \in U \cap L$ avec $u \in lC$. Donc on a $l \in d_{loc}(C^l, C) \leq CV$, et $u \in CV$. On en déduit que CV/V est un sous-groupe autonormalisant de U/V. Mais U/V est hypercentrale puisque $U/V \in \mathfrak{F}(f)$. Donc U/V vérifie la condition de normalisateur (proposition 3.4.18). Ainsi on a $U = CV$, ce qui prouve que C/K est un $(\mathfrak{F}(f), \pi)$-projecteur de LC/K.

Montrons que C/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \pi)$-projecteur de H/K. D'après le théorème 5.3.14, il suffit de montrer que C/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \pi)$-projecteur de R/K. Donc, d'après le paragraphe précédent, il suffit de montrer que, pour tout $x \in R$, $x \in d_{loc}(C^x, C)$. Supposons le contraire. Soit $(R_i)_{i \leq \alpha}$ (α ordinal) une suite croissante de sous-groupe localement clos de R qui vérifie :

(i) $R_0 = K$ et $R_\alpha = R$;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ordinal $\beta(n)$ tel que $R_{\beta(n)} = R^{(n)}K$ ($R^{(n)}K$ est localement clos d'après le corollaire 3.1.26) ;

(iii) R_{i+1}/R_i est C/K-d_{loc}-minimal pour tout $i < \alpha$;

($i\nu$) $R_\mu = \cup_{j<\mu} U_j$ pour tout ordinal limite μ.

Alors il existe un plus petit ordinal $\nu < \alpha$ tel qu'il existe $x \in R_{\nu+1} \setminus R_\nu$ avec $x \notin d_{loc}(C^x, C)$. Le paragraphe précédent montre que C/K est un $(\mathfrak{F}(f), \pi)$-projecteur de $R_\nu C/K$.

Supposons $x \in R_\nu d_{loc}(C^x, C)$. Alors il existe $u \in R_\nu$ et $y \in d_{loc}(C^x, C)$ tels que $x = uy$. Donc on a $u \in d_{loc}(C^u, C) = d_{loc}(C^{xy^{-1}}, C)$ et, comme $y \in d_{loc}(C^x, C)$, $u \in d_{loc}(C^x, C)$. Ainsi on obtient $x \in d_{loc}(C^x, C)$, ce qui est contradictoire. On en déduit $x \notin R_\nu d_{loc}(C^x, C)$.

On a montré $R_\nu \leq R_{\nu+1} \cap R_\nu d_{loc}(C^x, C) < R_{\nu+1}$ et, par C/K-d_{loc}-minimalité de $R_{\nu+1}/R_\nu$, on obtient $R_\nu = R_{\nu+1} \cap R_\nu d_{loc}(C^x, C)$ et $R_\nu C = R_\nu d_{loc}(C^x, C)$. Donc on a

$C^x \leq R_\nu C$. Alors, si x ne normalise pas $R_\nu C$, on a $C^{x^{-1}} \nleq R_\nu C$. Le raisonnement précédent appliqué à x^{-1} au lieu de x donne $x^{-1} \in d_{loc}(C^{x^{-1}}, C)$, d'où $x \in d_{loc}(C^{x^{-1}}, C) = d_{loc}(C, C^x)$ ce qui est contradictoire. On a montré que x normalise $R_\nu C$ et, donc, C^x/K est un $(\mathfrak{F}(f), \pi)$-projecteur de $R_\nu C/K$. Le corollaire 5.3.15 dit qu'il existe $r \in R_\nu$ tel que $C^x = C^r$. Alors on a $x \in N_R(C)r = Cr \subseteq CR_\nu = R_\nu d_{loc}(C^x, C)$, ce qui est contradictoire. On en déduit que C/K est un $(\mathfrak{F}^*(f), \pi)$-projecteur de H/K. □

5.4 Groupes superrésolubles

Dans cette section, nous étudions les sous-groupes *superrésolubles* (définition 5.4.1) et *localement superrésolubles* des sections localement closes des groupes de rang de Morley fini.

Définition 5.4.1. – *Un groupe G est dit être* superrésoluble *s'il possède une série normale finie avec des facteurs cycliques.*

Remarque 5.4.2. – Tout sous-groupe et tout quotient d'un groupe superrésoluble est superrésoluble.

On note $\mathfrak{F}_s$ la classe des groupes localement superrésolubles. Le résultat principal de cette section donne, pour tout $H/K \in \mathcal{D}loc$, l'existence et la conjugaison des $(\mathfrak{F}_s, \pi)$-projecteurs de H/K pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ (théorème 5.4.21). Il s'agit d'une conséquence du théorème 5.3.14.

La proposition 5.4.7 et le corollaire 5.4.11 sont analogues à des résultats de Wehrfritz sur les groupes linéaires localement superrésolubles [83].

Fait 5.4.3. – **([69], 5.4.8 p.145, Zappa)** *Si G est un groupe superrésoluble, alors G possède une série normale*

$$1 = G_0 < G_1 < ... < G_n = G$$

dans laquelle chaque facteur est cyclique d'ordre premier ou cyclique d'ordre infini et l'ordre des facteurs à partir de la gauche est ceci : facteurs impairs d'ordres décroissants, facteurs infinis, facteurs d'ordre 2.

Fait 5.4.4. – **([69], 5.4.10 p.146)** *Si G est un groupe superrésoluble, alors $F(G)$ est nilpotent et $G/F(G)$ est un groupe fini et abélien. En particulier, G' est nilpotent.*

Lemme 5.4.5. – *Soit H/K une section superrésoluble d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G avec K localement fini. Soient $p_1, p_2, ..., p_n$ ($n \in \mathbb{N}$) les entiers premiers distincts de 2 tels que $Q(G)$ possède un élément non trivial d'ordre p_i ($i = 1, ..., n$). Alors il existe un entier l divisant $h = 2(p_1 - 1)...(p_n - 1)$ tel que $(H/K)/F(H/K)$ soit d'exposant l.*

Preuve. – D'après le fait 5.4.3, il existe une suite croissante $(H_i)_{i=0,...,m}$ ($m \in \mathbb{N}$) formée de sous-groupes normaux de H avec $H_0 = K$ et H_{i+1}/H_i d'ordre premier ou bien isomorphe à $\mathbb{Z}$ pour tout $i = 0, ..., m-1$. De plus, on peut supposer qu'il existe $j \in \{0, ..., m\}$ tel que tous les éléments non triviaux de H_j/K soient d'ordre impair et tel que, si $j < m$, alors, H_{k+1}/H_k est soit d'ordre 2 soit d'ordre infini pour tout $k \in \{j, ..., m-1\}$. En particulier, comme K est localement fini, H_j est localement fini.

Soit $i \in \{0, ..., m-1\}$. Montrons que $A_H(H_{i+1}/H_i)$ est d'exposant divisant h. Si H_{i+1}/H_i est d'ordre impair $p \notin \{p_1, ..., p_n\}$, H_{i+1}/H_i n'est pas couvert par $Q(G) \cap H$. Donc la proposition 2.7.9 donne $[H, H_{i+1}] \leq Q(G) \cap H_{i+1} \leq H_i$ et H centralise H_{i+1}/H_i. Si on a $|H_{i+1}/H_i| \in \{p_1, ..., p_n\}$, alors $|A_H(H_{i+1}/H_i)|$ divise $p_s - 1$ pour un $s \in \{1, ..., n\}$. Si $|H_{i+1}/H_i| = 2$, alors H centralise H_{i+1}/H_i. Enfin, si H_{i+1}/H_i est isomorphe à $\mathbb{Z}$, on a $|A_H(H_{i+1}/H_i)| \leq 2$ puisque $|Aut(\mathbb{Z})| = 2$. Notons $C = \bigcap_{i=0}^{m-1} C_H(H_{i+1}/H_i)$. Alors on a $(C/K)^{m-1} = 1$, et C/K est un sous-groupe nilpotent et normal de H/K. En particulier C/K est contenu dans $F(H/K)$. Mais ce qui précède montre que H/C est d'exposant l_0 pour un entier l_0 qui divise h. Donc on obtient le résultat. □

Lemme 5.4.6. – *Soient H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble et U/K un sous-groupe de $H^\circ K/K$ normalisé par un sous-ensemble X/K de $H^\circ K/K$. Si, pour tout $\overline{x} \in X/K$, $E_{U/K}(\overline{x}) = U/K$, alors l'action de $\langle X/K\rangle$ sur U/K est nilpotente.*

Preuve. – Comme $H^\circ K/K$ et $H^\circ/(H^\circ \cap K)$ sont isomorphes, on peut supposer $K \leq H^\circ$. On fait la preuve par induction sur le rang de $d(H^\circ)$. Soit A un sous-groupe H°-minimal de $d(H^\circ)$. Par hypothèse d'induction, l'action de $\langle XA/AK\rangle$ sur UA/AK est nilpotente. Si $U/K \cap AK/K = 1$, on conclut que l'action de $\langle X/K\rangle$ sur U/K est nilpotente. On peut donc supposer $U/K \cap AK/K \neq 1$.

On va montrer que $\langle X/K\rangle$ centralise AK/K. Ainsi, on aura démontré que l'action de $\langle X/K\rangle$ sur UA/K est nilpotente, ce qui prouve le lemme. Soient $\overline{x} \in X/K$ et $C_x/K = C_{AK/K}(\overline{x})$. Comme $E_{U/K}(\overline{x}) = U/K$ et $U/K \cap AK/K \neq 1$, on a $E_{AK/K}(\overline{x}) \neq 1$ et $C_x/K \neq 1$. D'après le fait 1.3.18, $(H^\circ)'$ centralise A et $(H^\circ/K)'$ centralise AK/K. On en déduit que H°/K normalise C_x/K et que H° normalise $(C_x \cap A)/(A \cap K)$. La proposition 3.1.33 montre que $(C_x \cap A)/(A \cap K)$ est un $\mathcal{D}loc$-groupe et ce groupe n'est pas trivial puisque $C_x/K \neq 1$. Comme $\overline{x}$ centralise $(C_x \cap A)/(A \cap K)$, le lemme 3.5.1 dit que $\overline{x}$ centralise AK/K et X/K centralise AK/K. Ceci prouve le lemme. □

Proposition 5.4.7. – *Soit R/K un sous-groupe localement superrésoluble d'une section localement close H/K d'un groupe de rang de Morley fini G. Alors R/K est (localement nilpotent)-par-(fini, abélien).*

Preuve. – On peut supposer $K^- = 1$. En particulier K est localement fini. Comme R/K est localement résoluble, le corollaire 3.4.12 permet de supposer G résoluble. Nous montrons d'abord que R/K est nilpotent-par-fini. Pour cela, il suffit de montrer que $R^\circ/(K \cap R^\circ)$ est nilpotent-par-fini. Donc on peut supposer R et G connexes. Soient $p_1, p_2, ..., p_n$ $(n \in \mathbb{N})$ les entiers premiers distincts de 2 tels que $Q(G)$ possède un élément non trivial d'ordre p_i $(i = 1, ..., n)$, $h = 2(p_1 - 1)...(p_n - 1)$ et $F/K = \langle \overline{x}^h : \overline{x} \in R/K\rangle$.

Montrons que F/K est nilpotent. Soit $\overline{x} \in R/K$. Si $\overline{y}$ est un élément de R/K, $\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle$ est superrésoluble. Le lemme 5.4.5 dit que $\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle/F(\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle)$ est d'exposant l pour un diviseur l de h. Ainsi, $\overline{x}^h$ appartient à $F(\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle)$. Comme $F(\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle)$ est nilpotent (fait 5.4.4), on en déduit $\langle \overline{x}, \overline{y}\rangle \subseteq E_{R/K}(\overline{x}^h)$. Ceci étant vrai pour tout $\overline{y} \in R/K$, on obtient $E_{R/K}(\overline{x}^h) = R/K$. Comme ceci est vrai pour tout $\overline{x} \in R/K$, le lemme 5.4.6 dit que l'action de F/K sur R/K est nilpotente. Ceci prouve la nilpotence de F/K.

D'après le choix de F, $RQ(G)/Q(G)F$ est d'exposant borné. $G/Q(G)$ étant divisible (proposition 2.7.9), $RQ(G)/Q(G)F$ est un sous-groupe d'exposant borné de la section localement close divisible $G/Q(G)F$. Le lemme 5.1.18 dit que $RQ(G)/Q(G)F$ et $R/(R \cap Q(G)F)$ sont finis. Comme $(R \cap Q(G)K)/K$ et F/K sont deux sous-groupes nilpotents qui se normalisent, $(R \cap Q(G)F)/K$ est nilpotent et R/K est nilpotent-par-fini.

Montrons que R/K est (localement nilpotent)-par-(fini, abélien). Par ce qui précède et le fait 1.3.3, il suffit de montrer que $R'K/K$ est localement nilpotent. Soit X une partie finie de R'. Alors il existe une partie finie Y de R telle que X soit contenu dans $\langle Y\rangle'$. Le fait 5.4.4 dit que $\langle Y\rangle'K/K$ est nilpotent puisque $\langle Y\rangle$ est superrésoluble. Donc $\langle XK/K\rangle$ est nilpotent. □

Comme le montrent les faits 5.4.9 et 5.4.10, la notion de groupe localement superrésoluble est très liée à celle de groupe *hypercyclique* (définition 5.4.8). Nous montrons que les deux notions sont même équivalentes pour ce qui concerne les sous-groupes des sections localement closes (corollaire 5.4.11).

Définition 5.4.8. – *On appelle* série ascendante *d'un groupe G une suite croissante $(U_i)_{i\leq\alpha}$ (α étant un ordinal) de sous-groupes de G telle que $U_0 = 1$, $U_\alpha = G$, U_i soit un sous-groupe normal de U_{i+1} pour tout $i < \alpha$ et, pour tout ordinal limite $\mu \leq \alpha$, $U_\mu = \cup_{i<\mu} U_i$.*

Un groupe G est dit être hypercyclique *si il possède une série ascendante normale avec des facteurs cycliques.*

Fait 5.4.9. – **([81], lemme 11.19 p.168)** *Si un groupe G est localement superrésoluble et est une extension d'un groupe hypercentral par un groupe finiment engendré, alors G est hypercyclique.*

Fait 5.4.10. – **([6], Baer)** *Tout groupe hypercyclique est localement superrésoluble.*

Corollaire 5.4.11. – *Soit U/K un sous-groupe d'un $\mathcal{D}$loc-groupe. Alors U/K est localement superrésoluble si et seulement si U/K est hypercyclique.*

Preuve. – Supposons U/K localement superrésoluble. Les propositions 5.4.7 et 3.4.18 montrent que U/K est nilpotent-par-fini. Le fait 5.4.9 donne l'hypercyclicité de U/K.

Le fait 5.4.10 donne la réciproque. $\square$

Lemme 5.4.12. – *Soient H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble G et A/K une section H/K-d_{loc}-minimale de H telle que $H'K/K$ centralise A/K. Alors, si R désigne le sous-anneau de $End(A/K)$ engendré par $A_H(A/K)$, R est un anneau intègre.*

Preuve. – Supposons d'abord A/K localement fini. Alors, pour tout $r \in R$, $Ker(r)$ et $r(A/K)$ sont normalisés par H/K puisque R est abélien. De plus, pour tout $r \in R$, $Ker(r)$ et $r(A/K)$ sont des sections localement closes puisque A/K est localement fini. Comme A/K est H/K-d_{loc}-minimale, on en déduit que, pour tout $r \in R \setminus \{0\}$, $Ker(r)$ est trivial et $r(A/K) = A/K$. Autrement dit, r est un automorphisme de A/K. Ceci prouve que R est un anneau intègre.

Donc on peut supposer A/K sans torsion, en particulier $A = A^+K$. On peut aussi supposer $K^- = 1$. Soit $r \neq 0$ un élément de R. Montrons que $r(A/K) = A/K$. Il existe un couple d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(0, 0)\}$ et des éléments $h_1, ..., h_m$ et $k_1, ..., k_n$ de H tels que, pour tout $\overline{a} \in A/K$, on ait $r(\overline{a}) = \overline{a}^{h_1}...\overline{a}^{h_m}\overline{a}^{-k_1}...\overline{a}^{-k_n}$. Soit

$$\begin{array}{llll} r_0 : & A^+ & \longrightarrow & A^+ \\ & a & \longmapsto & a^{h_1}...a^{h_m}a^{-k_1}...a^{-k_n} \end{array}$$

C'est un homomorphisme définissable de groupe et $Ker(r_0)$ et $Im(r_0)$ sont définissables. Aussi, on a $r(A/K) = Im(r_0)K/K$. Donc $r(A/K)$ est une section localement close de H. De plus, $r(A/K)$ est normalisé par H puisque R est abélien. Comme A/K est H/K-d_{loc}-minimale et comme $r \neq 0$, on obtient $r(A/K) = A/K$.

Soit $U/K = Ker(r)$. Supposons $U/K \neq 1$. Montrons que $U/K = A/K$. Comme K est localement fini puisque $K^- = 1$, $r_0^{-1}(K \cap A^+)/Ker(r_0)$ est localement fini. $Ker(r_0)$ étant définissable, $r_0^{-1}(K \cap A^+)$ est localement clos. Mais on a $r_0^{-1}(K \cap A^+)K/K = U/K$ puisque $A = A^+K$. Donc U est un sous-groupe localement clos. R étant abélien, $Ker(r)$ est normal dans H/K et $U/K = A/K$ par minimalité de A/K. Ceci est contradictoire. Ainsi, $Ker(r) = 1$ et R est intègre. $\square$

Corollaire 5.4.13. – *Soient H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble G et L/M une section H/K-d_{loc}-minimal de H. Si $A_H(L/M)$ est d'exposant au plus 2, alors $A_H(L/M)$ est d'ordre au plus 2 et L/M possède une série ascendante avec des facteurs cycliques dont les termes sont normalisés par H.*

Preuve. – Si $A_H(L/M) = 1$, le corollaire est trivial. On peut donc supposer que $A_H(L/M)$ possède une involution i. Montrons que $A_H(L/M)$ est d'ordre 2. Supposons le contraire. Alors $A_H(L/M)$ possède un sous-groupe A d'ordre 4 et A est abélien. Le lemme 5.4.12 dit que A engendre un anneau intègre. Donc A possède au plus une involution, ce qui est contradictoire. Ainsi, $A_H(L/M)$ est d'ordre 2 et $A_H(L/M)$ est engendré par i.

Comme le lemme 5.4.12 dit que $A_H(L/M)$ engendre un anneau intègre, i inverse L/M. On en déduit que H normalise chaque sous-groupe de L/M. Ceci prouve le corollaire. $\square$

Proposition 5.4.14. – *Soit U/K un sous-groupe localement superrésoluble d'une section localement close H/K. Alors $d_{loc}(U)/K$ est localement superrésoluble. De plus, si L/M est une section $d_{loc}(U)/K$-d_{loc}-minimale de U^+K, alors $A_{d_{loc}(U)}(L/M)$ est d'ordre au plus 2.*

Preuve. – Le corollaire 3.4.12 permet de supposer H résoluble. On peut aussi supposer $K^- = 1$. En particulier, K est localement fini. Soit $U_0/K = HP(U/K)$. C'est un sous-groupe localement nilpotent (fait 1.3.3). D'après la proposition 5.4.7, U_0 est d'indice fini dans U et U/U_0 est abélien. On note V/U_0 le sous-groupe de U/U_0 engendré par les carrées des éléments de U/U_0. Alors U/V est d'exposant au plus 2. La proposition 3.3.1 dit que $d_{loc}(U_0)/K$ est localement nilpotent et la proposition 3.3.6 donne $d_{loc}(U_0) = d_{loc}(U_0)^+ * T$ où T/K est le sous-groupe de torsion maximal de $d_{loc}(U_0)/K$ et $d_{loc}(U_0)^+$ est nilpotent.

Montrons que $d_{loc}(V)/T$ est hypercentral. Supposons le contraire. Soit Z/T l'hypercentre de $d_{loc}(V)/T$. Le corollaire 3.1.34 montre qu'il s'agit d'une section localement close. De plus, la proposition 3.1.33 donne $1 = Z(d_{loc}(V)/Z) = C_{d_{loc}(V)/Z}(VZ/Z)$, d'où $Z(VZ/Z) = 1$. Comme V/U_0 est abélien, on obtient $U_0Z/Z \neq 1$. D'après la proposition 3.4.18, $d_{loc}(U_0)/K$ et U_0/K sont hypercentraux. Ainsi, U_0Z/Z a un centre non trivial. Le corollaire 5.4.11 dit que UZ/Z est hypercyclique. On en déduit que UZ/Z possède un sous-groupe cyclique normal et non trivial L/Z dans $Z(U_0Z/Z)$. Mais Z est un sous-groupe localement clos de U_0 et Z contient T. Donc L/Z est sans torsion et L/Z est infini cyclique. Ceci prouve que $UZ/C_{UZ}(L/Z)$ est d'ordre au plus 2. On a montré que $U/C_U(L/Z)$ est d'ordre au plus 2 et V centralise L/Z. Ceci contredit $Z(VZ/Z) = 1$. Donc $d_{loc}(V)/T$ est hypercentral.

Montrons que U^+K/K est hypercentral dans $d_{loc}(V)/K$. $d_{loc}(V)/K$ possède un sous-groupe de Carter C/K (théorème 3.6.6 (*i*)). Comme $d_{loc}(V)/T$ est hypercentral, $d_{loc}(V)/T$ est localement nilpotent (proposition 3.4.18) et le théorème 3.6.6 (*ii*) donne $d_{loc}(V) = TC$. Comme $U^+ = d_{loc}(V)^+$ (lemme 3.1.24), C^+ est contenu dans U^+. On en déduit que C^+T est un sous-groupe normal de U^+T. Comme C/C^+ est localement fini (corollaire 3.1.7 (*i*)), U^+T/C^+T est localement fini. Ceci montre que $U^+/(U^+ \cap T)C^+$ est localement fini et, comme $(U^+)^+ = U^+$ (lemme 3.1.5 (*ii*)), on a montré que $U^+ = (U^+ \cap T)C^+$. Comme $U^+ = d_{loc}(U_0)^+$ (lemme 3.1.24), U^+ centralise T et C^+ est normal dans U^+. K étant localement fini, T est localement fini. Alors, U^+/C^+ est localement fini et $U^+ = C^+$. C/K est hypercentral d'après la proposition 3.4.18. Comme U^+ centralise T et comme $d_{loc}(V) = TC$, on en déduit que U^+K/K est hypercentral dans $d_{loc}(V)/K$.

Soit L/M une section $d_{loc}(U)/K$-d_{loc}-minimale de U^+K. Montrons :

(1) *$A_{d_{loc}(U)}(L/M)$ est d'ordre au plus 2. De plus, L/M possède une série ascendante avec des facteurs cycliques et dont les termes sont normalisés par $d_{loc}(U)$.*

Comme U^+K/K est hypercentral dans $d_{loc}(V)/K$, on a $C_{L/M}(d_{loc}(V)/M) \neq 1$. Mais $d_{loc}(U)$ normalise $C_{L/M}(d_{loc}(V)/M)$ et la proposition 3.1.33 dit que $C_{L/M}(d_{loc}(V)/M)$ est une section localement close. Donc $d_{loc}(V)$ centralise L/M par minimalité de L/M. Le corollaire 3.1.17 et le lemme 3.1.24 donnent

$$d_{loc}(U)/d_{loc}(V) = UU^+/d_{loc}(V) \cong U/(U \cap d_{loc}(V))$$

Comme $V \leq U \cap d_{loc}(V)$, ceci prouve que $d_{loc}(U)/d_{loc}(V)$ est d'exposant au plus 2. On a montré que $A_{d_{loc}(U)}(L/M)$ est d'exposant au plus 2, et le corollaire 5.4.13 donne (1).

Il reste à montrer que $d_{loc}(U)/K$ est localement superrésoluble. D'après le fait 5.4.10, il suffit de montrer que $d_{loc}(U)/K$ est hypercyclique. Comme on a $d_{loc}(U) = UU^+$ (corollaire 3.1.17), $d_{loc}(U)/U^+K$ est hypercyclique. Mais, par la proposition 3.5.7 et (1), il existe une série ascendante de U^+K/K avec des facteurs cycliques et dont les termes sont normalisés par $d_{loc}(U)$. Donc $d_{loc}(U)/K$ est hypercyclique. □

Définition 5.4.15. – *On note f_s la fonction de $\mathcal{D}loc$-préformation qui, à tout $p \in \mathcal{P}$, associe la classe des $\mathcal{D}loc$-groupes abéliens d'exposant divisant $p-1$, et telle que $f_s(\infty) = f_s(3)$.*

Fait 5.4.16. – **([51], McLain)** *Les facteurs chefs d'un groupe localement résoluble G sont abéliens.*

Fait 5.4.17. – **([24], ex. f, p.358)** *Si un groupe fini G a un p-facteur chef U/V ($p \in \mathcal{P}$) avec $A_G(U/V)$ groupe abélien d'exposant divisant $p-1$, alors U/V est d'ordre p.*

Corollaire 5.4.18. – *Si un groupe G a un p-facteur chef U/V ($p \in \mathcal{P}$) avec $A_G(U/V)$ groupe abélien d'exposant divisant $p-1$, alors U/V est d'ordre p.*

Preuve. – Soient $A = A_G(U/V)$ et $H = (U/V) \rtimes A$. H est un groupe localement fini et localement résoluble. Le fait 5.4.16 dit que U/V est abélien. Montrons d'abord que A est fini. Supposons le contraire. A possède un sous-groupe A_0 d'ordre $n \in \mathbb{N}$ avec $n > p-1$. Soient $\overline{u} \in U/V \setminus \{1\}$, $\overline{U}_0$ la clôture normale de $\langle \overline{u} \rangle$ dans $(U/V) \rtimes A_0$ et $H_0 = \overline{U}_0 \rtimes A_0$. H_0 est fini puisque H est localement fini. Soient $\overline{U_1}$ un sous-groupe minimal normal de H_0 dans $\overline{U_0}$ et $C = C_{H_0}(\overline{U_1})$. H_0/C est un groupe abélien d'exposant divisant $p-1$ et le fait 5.4.17 dit que $\overline{U}_1$ est d'ordre p. On en déduit que A_0C/C est d'ordre au plus $p-1$. A_0 étant d'ordre $n > p-1$, on obtient $C \cap A_0 \neq 1$. A étant abélien, A normalise $C_{U/V}(C \cap A_0)$, donc H aussi. La minimalité de U/V donne $C_{U/V}(C \cap A_0) = 1$, ce qui est contradictoire puisque $\overline{U}_1 \leq C_{U/V}(C \cap A_0)$. On en déduit la finitude de A.

Alors A normalise un sous-groupe fini $\overline{U}_2 \neq 1$ de U/V et, U/V étant abélien, $\overline{U}_2$ est normal dans H. Par minimalité de U/V, on obtient $U/V = \overline{U}_2$ et H est fini. Le fait 5.4.17 donne le résultat. □

Proposition 5.4.19. – $\mathfrak{F}(f_s) = \mathfrak{F}_s \cap \mathcal{D}loc$.

Preuve. – Montrons que tout $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe est localement superrésoluble. Par le fait 5.4.10, il suffit de montrer que tout $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe est hypercyclique. Supposons le contraire. Alors il existe un $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe F/K qui n'est pas hypercyclique. D'après la proposition 3.5.7, F/K possède une série croissante normale $(F_i/K)_{i \leq \alpha}$ (α ordinal) formée de sous-groupes localement clos avec des facteurs F/K-d_{loc}-minimaux et telle que $F_0 = K$, $F_\alpha = F$ et $F_\mu = \cup_{i<\mu} F_i$ pour tout ordinal limite $\mu \leq \alpha$. Il existe un plus petit ordinal $\nu < \alpha$ tel que $F_{\nu+1}/F_\nu$ ne possède pas de série ascendante avec des facteurs cycliques et dont les termes sont normalisés par F. D'après le corollaire 5.4.18, les p-sections F/K-d_{loc}-minimales de F pour $p \in \mathcal{P}$ sont cycliques. Donc $F_{\nu+1}/F_\nu$ est une ∞-section et $A_F(F_{\nu+1}/F_\nu)$ est d'exposant 2. Le corollaire 5.4.13 donne une contradiction, d'où $\mathfrak{F}(f_s) \subseteq \mathfrak{F}_s \cap \mathcal{D}loc$.

Réciproquement, soit $S/K \in \mathfrak{F}_s \cap \mathcal{D}loc$. Montrons que S/K est un $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe. Il faut montrer que, si L/M est une section S/K-d_{loc}-minimale de S, alors L/M est une f_s-section. Comme S/K est hypercyclique (corollaire 5.4.11), on peut supposer L/M ∞-section. Alors $(L \cap S^+K)/(M \cap S^+K)(\cong L/M)$ est une section S/K-d_{loc}-minimale de S^+K. La proposition 5.4.14 dit que $(L \cap S^+K)/(M \cap S^+K)$ est une f_s-section, donc L/M est aussi une f_s-section. Ceci prouve que S/K est un $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe, ce qui permet de conclure. □

Fait 5.4.20. – **([69], 12.1.6 p.346, Mal'cev, McLain)** *Un facteur chef d'un groupe localement nilpotent G est central.*

Théorème 5.4.21. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et H/K une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble G. Alors les $(\mathfrak{F}(f_s), \pi)$-projecteurs de H/K sont exactement les $(\mathfrak{F}_s, \pi)$-projecteurs de H/K. De plus, on a $\mathfrak{F}(f_s) = \mathfrak{F}^*(f_s)$, en particulier H/K possède une unique classe de conjugaison de $(\mathfrak{F}_s, \pi)$-projecteurs.*

Preuve. – Soient F/K un $(\mathfrak{F}(f_s), \pi)$-projecteur de H/K, $R/K \in \mathcal{D}loc$ un π-sous-groupe de H/K contenant F/K et $A/K \in \mathcal{D}loc$ un sous-groupe normal de R/K avec $R/A \in \mathfrak{F}_s$. La proposition 5.4.19 donne $R/A \in \mathfrak{F}(f_s)$ et on en déduit $R = FA$. On a montré que F/K est un $(\mathfrak{F}_s, \pi)$-projecteur de H/K.

Réciproquement, soient V/K un $(\mathfrak{F}_s, \pi)$-projecteur de H/K, $R/K \in \mathcal{D}loc$ un π-sous-groupe de H/K contenant F/K et $A/K \in \mathcal{D}loc$ un sous-groupe normal de R/K avec $R/A \in \mathfrak{F}(f_s)$. Comme R/A est localement superrésoluble d'après la proposition 5.4.19, V couvre R/A. Pour montrer que V/K est un $(\mathfrak{F}(f_s), \pi)$-projecteur de H/K, il reste à montrer que V/K est un $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe. Le corollaire 4.1.24 dit que $d_{loc}(V)/K$ est un π-groupe et la proposition 5.4.14 dit que $d_{loc}(V)/K$ est localement superrésoluble. Donc V est localement clos. La proposition 5.4.19 dit que V/K est un $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe.

Montrons que $\mathfrak{F}(f_s) = \mathfrak{F}^*(f_s)$. D'après la remarque 5.2.3, il suffit de montrer $\mathfrak{F}^*(f_s) \subseteq \mathfrak{F}(f_s)$. On va montrer que tout $\mathfrak{F}^*(f_s)$-groupe vérifie les hypothèses du théorème 5.2.12. Soient $H/K \in \mathfrak{F}^*(f_s)$, $p \in \mathcal{P}$ et U/V une p-section H/K-d_{loc}-minimale de H couverte par un sous-groupe ∞-couvrant de Hall de H/K avec $A_H(U/V) \in f_s(\infty)$. Si $p \neq 2$, on a $f_s(\infty) \subseteq f_s(p)$ et on obtient $A_H(U/V) \in f_s(p)$. Sinon, $\overline{A} = U/V \rtimes A_H(U/V)$ est un 2-groupe. Donc $\overline{A}$ est localement nilpotent. Comme U/V est à la fois localement fini et H/K-d_{loc}-minimal, U/V est un sous-groupe minimal normal de H/V. Alors U/V est minimal normal dans $\overline{A}$ et le fait 5.4.20 dit que $\overline{A}$ centralise U/V, d'où $A_H(U/V) = 1 \in f_s(2)$. Le théorème 5.2.12 dit que H/K est un $\mathfrak{F}(f_s)$-groupe. On en déduit $\mathfrak{F}^*(f_s) \subseteq \mathfrak{F}(f_s)$.

Le théorème 5.3.14 permet de conclure. $\square$

W. Gaschütz a montré que, pour tout groupe fini et résoluble G, les projecteurs superrésolubles de G sont exactement les $\mathfrak{F}_s$-sous-groupes E de G tels que, pour toute pair (U, V) de sous-groupes de G avec $E \leq U < V$, $|V : U|$ n'est pas premier [34].

Comme le montre l'exemple 5.4.22, les $(\mathfrak{F}_s, \mathcal{P}^+)$-projecteurs des groupes de rang de Morley fini résolubles ne peuvent être caractérisés de la même façon.

Exemple 5.4.22. – Considérons $\mathbb{C}_+ \rtimes \mathbb{C}^*$ où $\mathbb{C}^*$ agit linéairement sur $\mathbb{C}_+$. Si u désigne un élément d'ordre 4 de $\mathbb{C}^*$ et si on note $G = \mathbb{C}_+ \rtimes \langle u \rangle$, alors les $(\mathfrak{F}_s, \mathcal{P}^+)$-projecteurs de G sont exactement les conjugués de $\langle u \rangle$. Pourtant, il existe une pair (U, V) de sous-groupes de G avec $\langle u \rangle < U < V$ et $|V : U| = 2$. En effet, si on choisit $x \in \mathbb{C}_+ \setminus \{1\}$ et si on note X la clôture normale de x dans G et Y le sous-groupe engendré par les carrées de X, alors $X/Y \rtimes \langle u \rangle$ est un 2-groupe. On peut choisir $\overline{y} \in C_{X/Y}(u) \setminus \{1\}$. En prenant $U = Y\langle u \rangle$ et $V = U\langle y \rangle$, on obtient bien $|V : U| = 2$.

5.5 Théorie des formations connexes

En théorie des groupes finis, il y a deux façons distinctes d'approcher la théorie des formations. D'une part il y a les formations *localement définies*, ce qui correspond à la théorie des formations que l'on a établie pour les sections localement closes. D'autre part, il y a la théorie des formations établie par W. Gaschütz [34], laquelle est basée sur la notion de sous-groupe de Frattini. Ces deux approches sont équivalentes en théorie des groupes finis [70]. En général, la seconde se généralise mal au groupes infinis. Toutefois, nous pouvons avoir une telle approche dans le cas des groupes de rang de Morley fini résolubles et *connexes*. En effet, en certaines circonstances, les groupes connexes se comportent comme des groupes finis.

5.5.1 La théorie

La *théorie des formations connexes* se traite de la même façon qu'est traité le cas fini dans [69] p. 269 à 274. L'approche n'utilise pas la théorie des sous-groupes de Hall, mais seulement le sous-groupe de Frattini° (définition 2.3.1).

Définition 5.5.1. – *Une* formation connexe *est une classe $\mathcal{F}$ de groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles qui vérifie les conditions suivantes :*

(*i*) *l'image d'un $\mathcal{F}$-groupe par un homomorphisme définissable de groupe est un $\mathcal{F}$-groupe ;*

(ii) *si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble avec deux sous-groupes normaux et définissables N_1 et N_2 tels que G/N_1 et G/N_2 soient des $\mathcal{F}$-groupes, $G/(N_1 \cap N_2)^\circ$ est un $\mathcal{F}$-groupe.*

On dira que $\mathcal{F}$ est saturée *si, pour tout groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G, $G/Fratc(G) \in \mathcal{F}$ implique $G \in \mathcal{F}$.*

Le principal exemple de formation connexe est celle des groupes de rang de Morley fini connexes et nilpotents. Le lemme 2.3.4 montre que cette formation est saturée.

Lemme 5.5.2. – *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe saturée, G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et N un sous-groupe G-minimal de G. On suppose $G/N \in \mathcal{F}$ et $G \notin \mathcal{F}$. Alors il existe un sous-groupe $M \in \mathcal{F}$ tel que $G = NM$ et tel que $N \cap M$ soit fini. De plus, deux tels sous-groupes sont conjugués.*

Preuve. – Comme $G/N \in \mathcal{F}$ et $G \notin \mathcal{F}$, N n'est pas contenu dans $Fratc(G)$ puisque $\mathcal{F}$ est saturée. Donc il existe un sous-groupe définissable, connexe et propre maximal M de G qui ne contient pas N. Par maximalité de M, $G = NM$. Alors $M \cap N$ est normal dans G et, N étant G-minimal, $M \cap N$ est fini. Aussi, comme $M/(M \cap N) \cong G/N$ appartient à $\mathcal{F}$, M aussi.

On va montrer, par induction sur le rang de G, que deux $\mathcal{F}$-sous-groupes K_1 et K_2 tels que $G = NK_1 = NK_2$ et tels que $N \cap K_1$ et $N \cap K_2$ soient finis sont conjugués. K_1 et K_2 sont deux sous-groupes définissables, connexes et propres maximaux de G puisque N est G-minimal. Si G a un sous-groupe G-minimal B distinct de N, alors G/B n'appartient pas à $\mathcal{F}$ puisque $G = G/(N \cap B)^\circ$ n'appartient pas à $\mathcal{F}$. Par maximalité de K_1 et de K_2, B est contenu dans K_1 et K_2. L'hypothèse d'induction donne alors le résultat et on peut supposer que N est l'unique sous-groupe G-minimal de G. Si G avait un centre infini, N serait alors central dans G. K_1 et K_2 serait donc normaux et, par conséquent, triviaux. On peut donc supposer le centre de G fini. Comme les intersections $K_1 \cap N$ et $K_2 \cap N$ sont finis et normales dans G, donc centrales, elles sont triviales d'après le fait 1.3.17. Aussi N centralise G' d'après le fait 1.3.18, donc K_1' et K_2' sont triviaux. On en déduit que G' est contenu dans N. Mais G' n'est pas trivial puisque G a un centre fini, donc $G' = N$ par G-minimalité de N. Le fait 1.3.21 donne alors le résultat. $\square$

Définition 5.5.3. – *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe et G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. On note $G^{\mathcal{F}}$ le plus petit sous-groupe normal et définissable de G tel que $G/G^{\mathcal{F}}$ appartienne à $\mathcal{F}$.*

Un sous-groupe H de G est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant *de G si H appartient à $\mathcal{F}$ et si $S = S^{\mathcal{F}}H$ pour tout sous-groupe définissable et connexe S de G qui contient H.*

D'après la définition 5.5.1, le sous-groupe $G^{\mathcal{F}}$ existe toujours et est définissable et connexe.

Lemme 5.5.4. – *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe, G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et N un sous-groupe définissable et normal de G.*

(i) *Si H est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G, alors HN/N est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G/N.*

(ii) *Si K/N est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G/N et si H est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de K°, alors H est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G.*

Preuve. – (i) Soient S/N un sous-groupe définissable et connexe de G/N qui contient HN/N et R le sous-groupe de S qui vérifie $R/N = (S/N)^{\mathcal{F}}$. Comme $S^\circ/(S^\circ \cap R) \cong S^\circ R/R = S/R \in \mathcal{F}$, $S^\circ/R^\circ = S^\circ/(S^\circ \cap R)^\circ \in \mathcal{F}$. Donc, comme S° contient H, $S^\circ = R^\circ H$. Ainsi $S/N = (R^\circ H)N/N = (R/N)(HN/N)$ et c'est fini.

(ii) Soit S un sous-groupe définissable et connexe de G qui contient H. Comme $K^\circ/(K^\circ \cap N) \cong K^\circ N/N = K/N \in \mathcal{F}$, $K^\circ = H(K^\circ \cap N)$ et $K = HN$. Alors SN/N contient K/N. Aussi

$SN/(S^{\mathcal{F}}N)$ est isomorphe à $S/(S\cap S^{\mathcal{F}}N)$ qui appartient à $\mathcal{F}$, donc $SN = K(S^{\mathcal{F}}N) = KS^{\mathcal{F}}$ et on obtient $S = S^{\mathcal{F}}(S\cap K) = S^{\mathcal{F}}(S\cap K)^{\circ}$. Or $H \leq (S\cap K)^{\circ} \leq K^{\circ}$ et $(S\cap K)^{\circ}/(S^{\mathcal{F}}\cap K)^{\circ}$ est un $\mathcal{F}$-groupe, donc $(S\cap K)^{\circ} = (S^{\mathcal{F}}\cap K)^{\circ}H$ et on conclut $S = S^{\mathcal{F}}(S\cap K)^{\circ} = S^{\mathcal{F}}H$. □

Théorème 5.5.5. – *Soit $\mathcal{F}$ une formation connexe.*

(i) *Si tout groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble a un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant, $\mathcal{F}$ est saturée.*

(ii) *Si $\mathcal{F}$ est saturée, tout groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G a un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant et deux tels sous-groupes sont conjugués dans G.*

Preuve. – Montrons (i). Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble tel que $G/Fratc(G)$ appartienne à $\mathcal{F}$ et H un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G. Alors $G = Fratc(G)H$ et $G = H \in \mathcal{F}$, d'où le résultat.

Montrons (ii) par induction sur le rang de G. On peut supposer que G n'appartienne pas à $\mathcal{F}$. Soit N un sous-groupe G-minimal de G. Par hypothèse d'induction G/N a un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant K/N.

Si G/N n'appartient pas à $\mathcal{F}$, alors K est distinct de G et K a un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant H d'après l'hypothèse d'induction. Le lemme 5.5.4 (ii) dit qu'alors H est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G. Soient K et L deux sous-groupes $\mathcal{F}$-couvrants de G. Par le lemme 5.5.4 (i) KN/N et LN/N sont des sous-groupes $\mathcal{F}$-couvrants de G/N et sont donc conjugués d'après l'hypothèse d'induction. Aussi KN/N est distinct de G/N puisque G/N n'appartient pas à $\mathcal{F}$. Donc, K et L^g étant des sous-groupes $\mathcal{F}$-couvrants de KN pour un $g \in G$, K et L sont conjugués par hypothèse d'induction.

On peut donc supposer que G/N appartient à $\mathcal{F}$. Le lemme 5.5.2 dit qu'alors il existe un sous-groupe K de G tel que K soit un $\mathcal{F}$-groupe, $G = NK$ et $K \cap N$ soit fini. Comme G n'est pas un $\mathcal{F}$-groupe et comme N est G-minimal, $N = G^{\mathcal{F}}$. Aussi, K est un sous-groupe définissable, connexe et propre maximal de G, donc K est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G. Si H est un autre sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G alors $G = NH$ et $N \cap H$ est fini puisque N est G-minimal et G n'est pas un $\mathcal{F}$-groupe. Le lemme 5.5.2 dit que H et K sont donc conjugués. □

Corollaire 5.5.6. – *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe saturée, G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et N un sous-groupe définissable et normal de G. Alors tout sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G/N est de la forme HN/N où H est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G.*

Preuve. – Soient K/N (resp. L) un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G/N (resp. G). Alors LN/N est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G/N d'après le lemme 5.5.4 (i). Donc LN/N est conjugués à K/N par le théorème 5.5.5. □

Corollaire 5.5.7. – *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe saturée et G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors le normalisateur de tout sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant H de G est anormal.*

Preuve. – Soient $g \in G$ et $K = \langle N_G(H), N_G(H)^g\rangle$. Alors $\langle H, H^g\rangle$ est définissable et connexe d'après le fait 1.2.5, et H et H^g sont deux sous-groupes $\mathcal{F}$-couvrants de $\langle H, H^g\rangle$. D'après le théorème 5.5.5 il existe $u \in \langle H, H^g\rangle \leq K$ tel que $H^u = H^g$. Ainsi $gu^{-1} \in N_G(H) \leq K$ et g appartient à K. □

Corollaire 5.5.8. – *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe saturée. Alors tout groupe de rang de Morley fini connexe et nilpotent a un unique sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant.*

Preuve. – Suit directement du corollaire précédent. □

Proposition 5.5.9. – *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe saturée et G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Si H est un $\mathcal{F}$-groupe tel que $G = F(G)H$, alors H est contenu dans un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G.*

Preuve. – Par induction sur le rang de G. On peut supposer que G n'est pas un $\mathcal{F}$-groupe. Soit N un sous-groupe G-minimal de G. Alors HN/N est un $\mathcal{F}$-groupe et $G/N = (HN/N)F(G/N)$, donc HN/N est contenu dans un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G/N d'après l'hypothèse d'induction. Ce sous-groupe est de la forme KN/N avec K sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G d'après le corollaire 5.5.6.

Si KN est distinct de G alors, comme $KN = F(KN)H$, l'hypothèse d'induction dit que H est contenu dans un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant M de KN. Or M est conjugué à K dans KN donc M est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G. Ainsi on peut supposer $G = KN$ et $G^{\mathcal{F}}$ contenu dans N.

Comme N centralise $F(G)$, $K \cap F(G)$ est normal dans G. Si $K \cap F(G)$ est infini, alors par hypothèse d'induction, H est contenu dans T où T désigne un sous-groupe de G tel que $T/(K \cap F(G))^\circ$ soit un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de $G/(K \cap F(G))^\circ$. Comme $G^{\mathcal{F}}$ est contenu dans N, $T^{\mathcal{F}}$ est aussi contenu dans N. Ainsi $T^{\mathcal{F}}$ est contenu dans $(K \cap N)^\circ$ qui est trivial puisque N est G-minimal et puisque G n'appartient pas à $\mathcal{F}$. On en déduit que T est un $\mathcal{F}$-groupe d'où le résultat. On peut alors supposer $K \cap F(G)$ fini. Ceci donne $F(G)^\circ = N(K \cap F(G))^\circ = N$ et on obtient $G = NH$. N étant G-minimal, H est un sous-groupe définissable, connexe et propre maximal de G et $G = G^{\mathcal{F}}H$, donc H est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G. $\square$

Définition 5.5.10. – *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe, G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un $\mathcal{F}$-groupe. H est un $\mathcal{F}$-*projecteur *de G si HN/N est un $\mathcal{F}$-sous-groupe maximal de G/N pour tout sous-groupe normal et définissable N de G.*

Théorème 5.5.11. – *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe et G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble.*

(i) *Tout sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G est un $\mathcal{F}$-projecteur de G.*

(ii) *Si $\mathcal{F}$ est saturée, tout $\mathcal{F}$-projecteur de G est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G.*

Preuve. – (i) Soient N un sous-groupe normal et définissable de G et H un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G. Si HN/N est contenu dans un $\mathcal{F}$-sous-groupe K/N de G/N, alors $K^\circ/(N \cap K^\circ) \cong K^\circ N/N = K/N$ est un $\mathcal{F}$-groupe. On en déduit que $K = K^\circ N = HN$, ce qui donne le résultat.

(ii) Par induction sur le rang de G. On peut supposer G non trivial. Soient N un sous-groupe G-minimal de G et H un $\mathcal{F}$-projecteur de G. Alors HN/N est un $\mathcal{F}$-projecteur de G/N. Par hypothèse d'induction, HN/N est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G/N. D'après le corollaire 5.5.6, il existe un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant H^* de G tel que $HN = H^*N$. Aussi $HN = F(HN)H$ et la proposition 5.5.9 dit que H est contenu dans un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant K de HN. Mais H est un $\mathcal{F}$-sous-groupe maximal de G, donc $H = K$. Alors H et H^* sont conjugués dans HN d'après le théorème 5.5.5. $\square$

5.5.2 Applications

Dans la suite on désignera par $\mathcal{N}^\circ$ la formation connexe des groupes de rang de Morley fini connexes et nilpotents. Comme première application des résultats ci-dessus nous donnons une autre démonstration de l'existence et de la conjugaison des sous-groupes nilpotents, connexes et autonormalisants dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble (corollaire 5.5.13). Cette preuve utilise seulement la section 2.1 et les lemmes 2.3.2 et 2.3.4. En fait on montre qu'on a affaire aux sous-groupes $\mathcal{N}^\circ$-couvrants (proposition 5.5.12).

Proposition 5.5.12. – *$\mathcal{N}^\circ$ est une formation connexe saturée. De plus, si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, alors les sous-groupes $\mathcal{N}^\circ$-couvrants de G sont exactement les sous-groupes nilpotents, autonormalisants et connexes de G.*

Preuve. – $\mathcal{N}^\circ$ est une formation connexe saturée d'après le lemme 2.3.4. Le théorème 5.5.5 dit alors que G a un sous-groupe $\mathcal{N}^\circ$-couvrant C. $G = F(G)C$ d'après le fait 1.3.19. On en déduit que $N_G(C)^\circ = N_{F(G)}(C)^\circ C$ est nilpotent et est égal à C puisque C est $\mathcal{N}^\circ$-couvrant. Le corollaire 5.5.7 et la proposition 2.1.7 disent que $N_G(C)$ est connexe, donc C est un sous-groupe nilpotent, connexe et autonormalisant de G. Il suffit alors de montrer qu'un sous-groupe nilpotent, connexe et autonormalisant K de G est $\mathcal{N}^\circ$-couvrant. On peut supposer G contrexemple de rang minimal. D'après le fait 1.3.19, la minimalité du rang de G, le théorème 5.5.5 et l'argument de Frattini, on a $G = F(G)^\circ N_G(K) = F(G)^\circ K$. La proposition 5.5.9 dit alors que K est contenu dans un sous-groupe $\mathcal{N}^\circ$-couvrant de G. Comme $N_G(K) = K$, K est alors $\mathcal{N}^\circ$-couvrant dans G. □

Corollaire 5.5.13. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors les sous-groupes nilpotents, connexes et autonormalisants de G existent et sont conjugués.*

Preuve. – Suit de la proposition 5.5.12 et du théorème 5.5.5. □

En utilisant le théorème 2.4.7, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 5.5.14. – *Les sous-groupes $\mathcal{N}^\circ$-couvrants d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G sont exactement les sous-groupes de Carter de G.*

La seconde application concerne la classe des π^*-groupes. Le lemme 5.5.15 montre que la classe des π^*-groupes est une formation connexe saturée.

Dans ce qui suit nous nous permettons l'usage de l'ensemble des résultats du chapitre 2.

Lemme 5.5.15. – *La classe des π^*-groupes est une formation connexe saturée pour tout ensemble π d'entiers premiers.*

Preuve. – Soient π un ensemble d'entiers premiers et $\mathcal{F}$ la classe des π^*-groupes. Il est clair que $\mathcal{F}$ est une formation connexe et on va montrer qu'elle est saturée. Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble avec $B_\pi(H)$ non trivial. Il suffit de trouver un sous-groupe propre, définissable et connexe maximal de H qui ne contient pas $B_\pi(H)$. D'après le fait 1.3.13, $F(H)^\circ$ a un π^*-sous-groupe caractéristique C tel que $F(H)^\circ = C * B_\pi(H)$. Soit K un sous-groupe de Carter de H. Le théorème 2.4.7 dit que K est nilpotent, définissable et connexe. Donc le fait 1.3.13 dit que K a un π^*-sous-groupe caractéristique D tel que $K = D * B_\pi(K)$. Comme $H = F(H)^\circ K$ d'après le fait 1.3.19 et la remarque 2.1.2, $H = B_\pi(H)(DC)$. Comme $B_\pi(H)$ est non trivial et comme $DC \cap B_\pi(H)$ est fini puisque DC est un π^*-sous-groupe, DC est contenu dans un sous-groupe propre, définissable et connexe maximal M de H. Alors M ne contient pas $B_\pi(H)$ et la démonstration est achevée. □

L'objet du théorème suivant est de caractériser les sous-groupes $\mathcal{F}$-couvrants des groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles où $\mathcal{F}$ désigne la formation des π^*-groupes. Notons que ce théorème permet une nouvelle démonstration du théorème de Borovik et Nesin sur les π^*-groupes (fait 4.4.2, corollaire 5.5.17).

Théorème 5.5.16. – *Soient $\mathcal{F}$ la classe des π^*-groupes et G un groupe de rang de Morley fini résoluble et connexe. Alors les sous-groupes $\mathcal{F}$-couvrants de G sont exactement les π^*-sous-groupes maximaux de G.*

Preuve. – On déduit du théorème 5.5.5 et du lemme 5.5.15 que G a un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant L et que deux sous-groupes $\mathcal{F}$-couvrants de G sont conjugués. Alors, comme $G/B_\pi(G)$ est un $\mathcal{F}$-groupe, $G = B_\pi(G)L$ et, comme un π^*-sous-groupe de G intersecte finiment $B_\pi(G)$, L est un π^*-sous-groupe maximal de G. Pour finir la preuve du théorème, il suffit donc de montrer qu'un π^*-sous-groupe maximal U de G est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G. Comme $U \cap B_\pi(G)$ est fini, il est suffisant de prouver $G = B_\pi(G)U$. Supposons que G soit un contrexemple de rang minimal au théorème. D'après le fait 1.3.13, $F(G)^\circ$ a un π^*-sous-groupe caractéristique C tel que $F(G)^\circ = C * B_\pi(G)$. Alors CU est un π^*-sous-groupe de G, donc U contient C et $B_\pi(G)U$ contient $F(G)^\circ$. Le fait 1.3.19 dit alors que $B_\pi(G)U$ est normal dans G. Soit $N = N_G(U)$. Montrons que N est anormal dans G. Soient $g \in G$ et $F = d(N, N^g)$. Si $F = G$, $g \in F$ sinon, par minimalité de G, il existe $a \in F^\circ$ tel que $U^a = U^g$. Ainsi $g \in N_G(U)a \subseteq F$. Le théorème 2.5.1 dit que N contient un sous-groupe de Carter D de G. Le fait 1.3.13 donne l'existence d'un π^*-sous-groupe V de D tel que $D = B_\pi(D) * V$. Or $B_\pi(D)$ est contenu dans $B_\pi(G)$ et UV est un π^*-sous-groupe de G puisque V normalise U, donc V est contenu dans U et D est contenu dans $B_\pi(G)U$. Comme D est anormal dans G d'après le théorème 2.4.7, $B_\pi(G)U$ est anormal dans G. Le fait que $B_\pi(G)U$ soit un sous-groupe normal propre de G est contredit. □

Le théorème de Borovik et Nesin sur les π^*-groupes (fait 4.4.2) devient alors un corollaire du théorème ci-dessus et du théorème 5.5.5.

Corollaire 5.5.17. – **([12], Borovik, Nesin)** *Soit G un groupe de rang de Morley fini résoluble et connexe et π un ensemble de nombres premiers. Alors les π^*-sous-groupes maximaux de G sont conjugués. Si K est l'un d'eux, alors $G = B_\pi(G)K$ et $B_\pi(G) \cap K$ est un sous-groupe fini.*

5.6 Conclusion

Dans cette dernière section, nous cherchons les liens entre les deux théories des formations que nous avons établies (proposition 5.6.5 et exemple 5.6.6).

Définition 5.6.1. – *Un sous-groupe L/K d'une section localement close H/K est dit d_{loc}-*anormal *dans H/K si $h \in d_{loc}(L, L^h)$ pour tout $h \in H$.*

On remarque que, dans les groupes de rang de Morley fini, tout sous-groupe anormal est d_{loc}-anormal, et tout sous-groupe d_{loc}-anormal est déf-anormal. Dans le contexte des groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles, les notions d'anormalité, de déf-anormalité et de d_{loc}-anormalité sont fortement liées :

Lemme 5.6.2. – *Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, alors les conditions suivantes sont équivalentes pour tout sous-groupe H de G :*
(i) *H est anormal ;*
(ii) *H est définissable et déf-anormal ;*
(iii) *H est localement clos et d_{loc}-anormal.*

Preuve. – Supposons H anormal. Alors H est déf-anormal et d_{loc}-anormal. De plus, H est définissable d'après la proposition 2.1.7. En particulier, H est localement clos. On a montré que (i) implique (ii) et (iii).

Supposons H définissable et déf-anormal. Alors le corollaire 2.1.8 dit que H est anormal. Donc (i) et (ii) sont équivalent.

Il reste à montrer que (iii) implique (ii). Soit H un sous-groupe localement clos et d_{loc}-anormal. Montrons que H est définissable et déf-anormal par induction sur le rang de G. Comme H est d_{loc}-anormal, H et $d(H)$ sont déf-anormaux, et il suffit de montrer H est définissable. Comme $d(H)$ est déf-anormal, la proposition 2.1.7 dit que $d(H)$ est connexe. Par hypothèse d'induction, on peut supposer $G = d(H)$. En particulier, G normalise H^-. Quitte à quotienter G par H^-, on peut supposer $H^- = 1$. Supposons $G \neq 1$. Alors G possède un sous-groupe G-minimal A. Par hypothèse d'induction, HA/A est définissable et $G = HA$. En particulier, $A \cap H$ est normal dans G. Comme $H^- = 1$, on a $G \neq H$ et $A \nleq H$. Donc A ne peut pas être central dans G. Le fait 1.3.17 donne $A \cap Z(G) = 1$. Alors, si on avait $A \cap H \neq 1$, on aurait $A \leq H$ d'après le fait 1.2.13, ce qui est contradictoire. Donc H est un complément de A dans G. Le lemme 2.1.3 dit que H est un sous-groupe anormal de G. Donc H est définissable (proposition 2.1.7) et $G = H$. Ceci contredit $H^- = 1$, et on a montré que (iii) implique (ii). □

Dans la suite, $\mathfrak{R}$ désignera une sous-classe de $\mathcal{D}loc$ S-d_{loc}-close et Q-d_{loc}-close qui contient tous les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles, et f désignera une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur un sous-ensemble π de $\mathcal{P}^+$.

Corollaire 5.6.3. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors $N_G(F)$ est anormal dans G pour tout $(\mathfrak{F}^*(f), \pi)$-projecteur F de G. En particulier, $N_G(F)$ est définissable et connexe.*

Preuve. – Si $N_G(F)$ est anormal, la proposition 2.1.7 dit que $N_G(F)$ est définissable et connexe. Montrons que $N_G(F)$ est anormal. La proposition 5.3.17 dit que $N_G(F)$ est localement clos. Donc, d'après le lemme 5.6.2, il suffit de montrer que $N_G(F)$ est d_{loc}-anormal. Soit $g \in G$. Alors F et F^g sont des $(\mathfrak{F}^*(f), \pi)$-projecteurs de $d_{loc}(N_G(F), N_G(F)^g)$. D'après le théorème 5.3.14, il existe $h \in d_{loc}(N_G(F), N_G(F)^g)$ tel que $F^h = F^g$. On obtient $g \in N_G(F)h \subseteq d_{loc}(N_G(F), N_G(F)^g)$. Ceci prouve que $N_G(F)$ est d_{loc}-anormal. □

Corollaire 5.6.4. – *On suppose $\pi = \mathcal{P}^+$. Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, alors tout $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur F de G est définissable et connexe.*

Preuve. – La proposition 5.3.17 montre que F est autonormalisant. Le corollaire 5.6.3 permet de conclure. □

Proposition 5.6.5. – *On suppose $\pi = \mathcal{P}^+$. Soient $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$ la classe des $\mathfrak{F}^*(f)$-groupes définissables et connexes et G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, alors :*

(i) $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$ est une formation connexe saturée contenue dans $\mathfrak{F}(f)$;

(ii) les sous-groupes $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-couvrants de G sont exactement les $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de G.

Preuve. – Montrons que $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$ est une formation connexe. Le lemme 5.2.6 montre que l'image d'un $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-groupe par un homomorphisme définissable de groupe est un $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-groupe. Donc $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$ vérifie la condition (i) de la définition 5.5.1. Montrons que $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$ vérifie aussi la condition (ii) de la définition 5.5.1. Soient N_1 et N_2 deux sous-groupes normaux et définissables de G tels que G/N_1 et G/N_2 soient des $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-groupes. Il faut montrer que $G/(N_1 \cap N_2)^\circ$ est un $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-groupe. Soit U/V une section $G/(N_1 \cap N_2)^\circ$-d_{loc}-minimale de G. Comme G est connexe, G centralise $(N_1 \cap N_2)/(N_1 \cap N_2)^\circ$. En particulier, si on a $(U \cap N_1 \cap N_2)/(V \cap N_1 \cap N_2) \neq 1$, alors $(U \cap N_1 \cap N_2)/(V \cap N_1 \cap N_2) \cong U/V$ est une f-section de G. Donc on peut supposer $N_1 \cap N_2 \leq V$. Supposons que U/V ne soit pas une f-section. Si $UN_1/VN_1 \neq 1$, alors UN_1/VN_1 est isomorphe à U/V et, comme G/N_1 est un $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-groupe, la proposition 5.2.9 dit qu'il existe $p \in \pi^-$ tel que UN_1/VN_1 soit une p-section et qu'il existe un sous-groupe ∞-couvrant de Hall R/N_1 de G/N_1 qui couvre UN_1/VN_1. Comme UN_1/VN_1 n'est pas centralisé par G, le lemme 5.1.19 dit que $UN_1/VN_1 \cong U/V$ est finie. Le lemme 5.2.10 montre que G centralise U/V, ce qui est contradictoire puisqu'on a supposé que U/V n'est pas une f-section. Donc on peut supposer $UN_1/VN_1 = 1$. De la même façon, on peut supposer $UN_2/VN_2 = 1$. Alors on a $(U \cap N_1)/(V \cap N_1) \neq 1$ et, quitte à considérer $(U \cap N_1)/(V \cap N_1)$ au lieu de U/V, on peut supposer $U \leq N_1$. On en déduit $U = U \cap VN_2 = V(U \cap N_2)$ et, comme on a $U \leq N_1$ et $N_1 \cap N_2 \leq V$, on obtient $U = V$, ce qui est contradictoire. On a montré que U/V est une f-section. Ceci prouve que $G/(N_1 \cap N_2)^\circ$ est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe. En particulier, $G/(N_1 \cap N_2)^\circ$ est un $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-groupe et $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$ est une formation connexe. En fait, on a aussi prouvé $\mathfrak{F}^*(f)^\circ \subseteq \mathfrak{F}(f)$. En effet, si G est un $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-groupe et si on prend $N_1 = N_2 = 1$, alors ce qui précède prouve que G est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe, d'où $\mathfrak{F}^*(f)^\circ \subseteq \mathfrak{F}(f)$.

Montrons que tout $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur U de G est un sous-groupe $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-couvrant de G. Le corollaire 5.6.4 montre que U est définissable et connexe. Donc U est un $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-groupe, et U est un sous-groupe $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-couvrant de G.

Montrons que $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$ est saturée. Le théorème 5.3.14 dit que G possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur V. Le paragraphe précédent dit que V est un sous-groupe $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-couvrant de G. Alors le théorème 5.5.5 (i) dit que $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$ est une formation connexe saturée.

Il reste à montrer que les sous-groupes $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-couvrants de G sont des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de G. Le théorème 5.3.14 dit que G possède un $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteur W, et W est un sous-groupe $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-couvrant de G d'après ce qui précède. Par conjugaison des sous-groupes $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-couvrants de G (théorème 5.5.5 (ii)), les sous-groupes $\mathfrak{F}^*(f)^\circ$-couvrants de G sont des $(\mathfrak{F}^*(f), \mathcal{P}^+)$-projecteurs de G. □

L'exemple suivant montre qu'il existe des formations connexes saturées qui ne peuvent pas être caractérisées par une fonction de préformation :

Exemple 5.6.6. – On considère, dans le pur langage des groupes, le p-groupe $(p \in \mathcal{P})$ $G = \mathbb{Z}_{p^\infty} \times B$ où B est un groupe abélien connexe d'exposant p. Le lemme 5.5.15 montre que la classe $\mathcal{V}$ des p^*-groupes est une formation connexe saturée. Aussi, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ est le seul sous-groupe $\mathcal{V}$-couvrant de G.

Alors il n'est pas possible de choisir f de façon à ce qu'il existe un sous-ensemble σ de $\mathcal{P}^+$ tel que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ soit le $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de G. En effet, si on a $p \notin \pi \cap \sigma$, alors $\{1\}$ est l'unique $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de G puisque toutes les sections de G sont des p-groupes. Sinon, on a $p \in \pi \cap \sigma$ et, comme G est abélien, toutes ses section G-d_{loc}-minimales sont des f-sections. Donc G est un $\mathfrak{F}(f)$-groupe, et G est l'unique $(\mathfrak{F}^*(f), \sigma)$-projecteur de G.

Chapitre 6

Questions

La théorie des groupes finis nous a fourni un bon modèle pour étudier certains aspects des groupes de rang de Morley fini résolubles. Nous avons vu que certains théorèmes fondamentaux de la théorie des groupes finis résolubles ont des analogues pour les groupes de rang de Morley fini résolubles, bien que ces derniers ne soient généralement pas localement finis. Cependant, nous pensons qu'il faut aller plus loin dans cette étude puisque l'étude que nous avons faite soulève de nouvelles questions. D'autres théories concernant les groupes finis résolubles pourraient avoir des analogues pour les groupes de rang de Morley fini, par exemple la théorie des *injecteurs* ou celle des *classes de Schunck*. Aussi certaines notions, telle que les $\mathcal{M}^*$-normalisateurs, n'ont été traitées que partiellement. D'autre part, certains résultats peuvent peut-être se généraliser aux groupes de rang de Morley fini non nécessairement résolubles, par exemple l'existence des sections d_{loc}-minimales (proposition 3.5.7). Une autre question importante est celle concernant le choix de la classe de groupes étudiée. En effet, modulo certaines complications modèles-théoriques qui peuvent être importantes, notre étude pourrait se généraliser à d'autres classes de groupes stables. Dans ce dernier chapitre, nous détaillons les questions que nous nous posons à la suite de cette thèse. Aussi, nous rappelons les conjectures importantes concernant les groupes de rang de Morley fini résolubles. Ce chapitre peut aussi être l'occasion de recevoir des critiques sur des sujets susceptibles de faire l'objet d'un futur travail.

Classes de Schunck

Dans la section 5.6, nous avons pu créer un lien entre la théorie des formations connexes (section 5.5) et la théorie des formations concernant les sections localement closes résolubles (sections 5.1 à 5.3). Au regard de l'exemple 5.6.6 et de l'hypothèse faite sur π dans la proposition 5.6.5 (nous imposons $\pi = \mathcal{P}^+$), ce lien reste ténu. La question qui se pose est celle de l'existence d'une théorie, nécessairement beaucoup plus générale, qui inclurait nos deux théories des formations. La théorie des groupes finis nous laissent de sérieux espoirs. En effet, pour les groupes finis et résolubles, Schunck a établi une théorie beaucoup plus générale que la théorie des formations (cf. [71]). Si nous obtenions un analogue de cette théorie pour les groupes de rang de Morley fini résolubles, il devrait être possible d'unifier nos deux théories des formations, ou au moins d'établir des liens plus sérieux que ceux que nous avons déjà.

Le théorie de Schunck [71] est celle des *classes de Schunck*. On rappelle qu'une classe $\mathfrak{H}$ de groupes finis résolubles est une *classe de Schunck* si $\mathfrak{H}$ est close par isomorphismes et si on a $G \in \mathfrak{H}$ si et seulement si $G/Core_G(M) \in \mathfrak{H}$ pour tout sous-groupe maximal M de G ($Core_G(M)$ désigne l'intersection des conjugués de M dans G). Schunck a montré que, pour toute classe de groupes $\mathfrak{H}$ close par isomorphismes, tout groupe fini et résoluble possède un $\mathfrak{H}$-projecteur [1] si et seulement si $\mathfrak{H}$ est une classe de Schunck. De plus, si tel est le cas, alors les $\mathfrak{H}$-projecteurs d'un groupe fini et résoluble G sont conjugués. Le résultat de Schunck est plus général que celui donné par la théorie des formations. Nous n'avons connaissance que de deux généralisations de cette théorie à des classes de groupes infinis : celle de M. J. Tomkinson [76] pour les groupes résolubles localement finis et abéliens-par-finis et celle de B. Höfling [41] pour les groupes résolubles localement finis et nilpotents-par-finis.

Classes de Fitting

La notion de *classe de Fitting* dualise la notion de formations. Ainsi, comme nous avons pu établir une théorie des formations pour les sections localement closes résolubles, il est naturel de s'intéresser aux classes de Fitting. Une classe $\mathfrak{F}$ non vide de groupes finis et close par isomorphismes est appelée une *classe de Fitting* si tout sous-groupe normal d'un $\mathfrak{F}$-groupe est un $\mathfrak{F}$-groupe et si un produit normal de deux $\mathfrak{F}$-groupes est un $\mathfrak{F}$-groupe. Lorsqu'on étudie les classes de Fitting, on s'intéresse aux *injecteurs*. Pour une classe $\mathfrak{K}$ de groupes finis, un sous-groupe V d'un groupe G est un $\mathfrak{K}$-*injecteur* de G si $V \cap N$ est un un $\mathfrak{K}$-sous-groupe maximal de N pour tout sous-groupe sous-normal N de G. En fait, les injecteurs sont aux classes de Fitting ce que les projecteurs sont aux formations. B. Fischer, W. Gaschütz et B. Hartley [26] ont montré que si $\mathfrak{F}$ est une classe de Fitting, tout groupe fini et résoluble G possède une unique classe de conjugaison de $\mathfrak{F}$-injecteurs. Cette théorie a pu être généralisée à certaines classes de groupes infinis, dont les $\mathfrak{U}$-groupes [39]. Aussi, dans un travail en préparation [27], on a généralisé le théorème principal de [39]. Dans un travail soumis pour publication [28], on a établi une théorie des classes de Fitting pour les sections localement closes. Le résultat d'existence et de conjugaison a un analogue pour les sections localement closes résolubles. La preuve, relativement proche de celle des groupes finis, nécessite fortement l'usage du théorème d'existence et de conjugaison des sous-groupes de Carter.

$\mathfrak{F}^*(f)$-groupes

Pour établir la théorie des formations des sections localement closes résolubles, nous avons eu besoin d'introduire les classes de groupes de la forme $\mathfrak{F}^*(f)$ où f désigne une fonction de préformation sur un ensemble $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. A l'inverse de $\mathfrak{F}(f)$, $\mathfrak{F}^*(f)$ n'est pas, en général, une formation (exemple 5.2.27 et proposition 5.2.29). C'est l'une des raisons pour lesquelles on ne s'intéresse à $\mathfrak{F}^*(f)$ qu'en tant qu'outil. Mais cet outil est vraiment fondamental pour l'étude des classes de groupes de la forme $\mathfrak{F}(f)$ et des projecteurs. C'est pourquoi, on aimerait que les classes de la forme $\mathfrak{F}^*(f)$ puissent devenir des objets intéressants pour eux-mêmes. On se pose la question suivante :

Question 6.1. – $\mathfrak{R}$ désigne une sous-classe de $\mathcal{D}loc$ qui est S-d_{loc}-close et Q-d_{loc}-close. Si f est une fonction de $\mathfrak{R}$-préformation sur $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, est-ce que $\mathfrak{F}^*(f)$ est une $(\mathfrak{R}, p)$-préformation pour tout $p \in \pi$?

On ne connait pas la réponse à cette question. Une réponse positive rendrait la notion $\mathfrak{F}^*(f)$ plus intéressante.

[1] Un sous-groupe H d'un groupe fini G est un $\mathfrak{H}$-*projecteur* si HN/N est un $\mathfrak{H}$-sous-groupe maximal de G/N pour tout sous-groupe normal N de G

$\mathcal{M}^*$-normalisateurs

Nous avons pu trouver des analogues pour les sections localement closes de certains résultats concernant les $\mathcal{M}$-normalisateurs des $\mathfrak{U}$-groupes. En particulier, les $\mathcal{M}$-normalisateurs des sections localement closes résolubles existent et sont conjugués (remarque 5.1.7). De plus, ils sont préservés par quotientement (théorème 5.1.9). Par contre, nos connaissances sur les $\mathcal{M}^*$-normalisateurs sont très partielles. Nous aimerions une réponse à la question suivante :

Question 6.2. – H/K désigne une section localement close résoluble. Si $\mathcal{M}$ désigne un π-système de H/K pour $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, existe-t-il, dans H/K, une unique classe de conjugaison de $\mathcal{M}^*$-normalisateurs ?

Si on donnait une réponse positive à la question ci-dessus, on pourrait se demander ce que sont les images des $\mathcal{M}^*$-normalisateurs dans les groupes quotients :

Question 6.3. – H/K désigne une section localement close résoluble et A/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K. Si $\mathcal{M}$ désigne un π-système de H/K pour $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, est-ce que les images des $\mathcal{M}^*$-normalisateurs de H/K dans H/A sont des $\mathcal{M}^*$-normalisateurs de H/A ?

Sections minimales normales

Nous avons établi l'existence des sections d_{loc}-minimales dans toute section localement close résoluble (proposition 3.5.7). Ce résultat est fondamental pour la suite de la thèse. L'hypothèse de résolubilité intervient tout au long de la preuve de la proposition 3.5.7. Cependant, se poser la question de la véracité d'un tel résultat pour les sections localement closes non nécessairement résolubles est naturel :

Question 6.4. – Si H/K désigne une section localement close (non nécessairement résoluble), est-ce que H/K contient une section H/K-d_{loc}-minimale ?

D'une façon schématique, la première partie de la preuve de la proposition 3.5.7 consiste à se restreindre à un groupe localement fini. Cela devrait aussi être possible dans le cas non résoluble. Ensuite, ce qui donne la possibilité de conclure, c'est essentiellement la présence d'un corps dans les groupes résolubles (fait 1.3.16). Si le groupe n'est pas résoluble, nous éspérons maîtriser les sections simples par un théorème de Kegel qui montre, en particulier, qu'un quotient simple d'un $\mathcal{M}_c$-groupe localement fini est linéaire ([44], théorème 2.7).

Comme il semble que les principales difficultés pour répondre à la question 6.4 se trouvent au niveau des sections localement finies, l'existence des sections d_{loc}-minimales soulève la question suivante concernant les $\mathcal{M}_c$-groupes localement finis :

Question 6.5. – On considère G un $\mathcal{M}_c$-groupe localement fini et N un sous-groupe normal de G. Est-ce que G/N possède un sous-groupe minimal normal ?

Produit de groupes localement finis

Le lemme 3.1.11 dit que si H et K sont des sous-groupes localement clos d'un groupe de rang de Morley fini G et si H normalise K, alors HK est localement clos. On peut se demander ce qui se passe lorsqu'on a seulement $HK = KH$. Le lemme 4.3.13 donne une réponse partielle à ce problème dans le cas où on suppose G résoluble. Pour ce qui concerne le cas général, on sait seulement que la preuve du lemme 3.1.11 permet de ramener le problème au cas où H et K sont localement finis. La question devient donc :

Question 6.6. – On considère H et K deux sous-groupes localement finis d'un groupe de rang de Morley fini. Si $HK = KH$, est-ce que HK est localement fini ?

On rappelle qu'il est connu que, si un groupe résoluble G s'écrit sous la forme $G = AB$ avec A et B localement finis, alors G est aussi localement fini (fait 4.3.12). Aussi, N. M. Suchkov [73] a donné un exemple de groupe non périodique G qui s'écrit sous la forme $G = AB$ avec A et B localement finis.

Groupes stables

Il existe plusieurs classes de groupes stables qui généralisent la notion de groupe de rang de Morley fini. Parmis elles, il y a les groupes *ω-stables*, *superstables*, *stables menus*, les *$\mathfrak{R}$-groupes*.... De nombreuses propriétés algébriques des groupes de rang de Morley fini sont vérifiées par les groupes appartenant à ces classes. Par exemple, la conjugaison des sous-groupes de Hall a été prouvée pour les groupes ω-stables résolubles ([4], fait 1.4.11). Aussi, l'existence des sous-groupes de Carter a été établie pour les $\mathfrak{R}$-groupes et la conjugaison de ceux-là pour les groupes stables menus (cf. [79], et les faits 1.5.4 et 1.5.6). Cependant, lorsque l'on étudie ces classes de groupes, les complications modèles-théoriques peuvent rendre très délicates la généralisation des théorèmes connus pour les groupes de rang de Morley fini. Nous nous posons la question de savoir si certains théorèmes que nous avons énoncés se généralisent à des classes plus générales de groupes stables. Du fait de l'étude de F. O. Wagner concernant les sous-groupes de Carter des $\mathfrak{R}$-groupes, la généralisation des résultats du chapitre 2 nous intéresse plus particulièrement.

On finit ce chapitre en rappelant trois conjectures qui concernent directement les groupes de rang de Morley fini résolubles, mais dont l'intérêt peut être beaucoup plus général.

Conjecture de Nesin

Il est bien connu que tout groupe algébrique résoluble et connexe sur un corps algébriquement clos peut s'écrire sous la forme d'un produit semi-direct d'un groupe abélien T agissant sur un sous-groupe nilpotent U (cf. [42], p.123). Nous aimerions un tel résultat pour les groupes de rang de Morley résolubles et connexes, avec au moins U définissable. Dans [56], A. Nesin a conjecturé ceci :

Conjecture de Nesin : Si G est un groupe de rang de Morley fini résoluble et connexe, alors $F(G)^\circ$ a un complément dans G.

Cette conjecture est établie dans [25] lorsque le groupe est 2-résoluble et sans centre. Pour ce qui concerne le cas général, c'est surtout la possibilité d'avoir un mauvais corps et, par exemple, un groupe résoluble sans torsion et non nilpotent qui rend le problème très difficile.

Conjecture de Borovik

Selon un théorème de Mal'cev [53], les groupes linéaires sont localement résiduellement finis. A. V. Borovik conjecture que l'on peut généraliser ce théorème aux groupes de rang de Morley fini :

Conjecture de Borovik : Tout groupe de rang de Morley fini est localement résiduellement fini.

Il semble que cette conjecture soit aussi difficile que la conjecture de Cherlin-Zil'ber. Mais une réponse positive à la conjecture de Cherlin-Zil'ber n'est pas suffisant pour répondre à la conjecture de Borovik. En effet, on ne sait même pas si un groupe de rang de Morley fini résoluble est localement résiduellement fini. On aimerait donc montrer qu'un groupe de rang de Morley fini résoluble est localement résiduellement fini. Si on y parvenait, cela pourrait engendrer de nombreuses questions sur les sous-groupes finiment engendrés des groupes de rang de Morley fini résolubles.

Une question de Kegel

Un célèbre théorème de O. H. Kegel [46] dit que si un groupe fini G s'écrit sous la forme $G = AB$ avec A et B des sous-groupes nilpotents, alors G est résoluble. Ce théorème a ensuite été généralisé à diverse classes de groupes infinis. En particulier, O. H. Kegel [45] a étendu son résultat aux groupes linéaires. O. H. Kegel a posé la question suivante :

Question 6.7. – **(Kegel)** Si un groupe G de rang de Morley fini s'écrit sous la forme $G = AB$ avec A et B deux sous-groupes nilpotents de G, est-ce que G est résoluble ?

Notons que si il existait un groupe simple de rang de Morley fini qui s'écrit sous la forme $G = AB$ avec A et B nilpotents, alors G serait un contrexemple à la conjecture de Cherlin-Zil'ber.

Il serait intéressant d'étudier les groupes de rang de Morley fini résolubles qui s'écrivent sous la forme $G = AB$ avec A et B nilpotents. En effet, O. H. Kegel [45] (en 1965) avait conjecturé que, si un groupe fini G s'écrit sous la forme $G = AB$ avec A et B nilpotents de classes de nilpotence a et b respectivement, alors $G^{(a+b)} = 1$. Un contrexemple a été donné par J. Cossey et S. Stonehewer dans [21] (en 1998 !).

Bibliographie

[1] T. Altinel. *Groups of finite Morley rank with strongly embedded subgroups.* J. Algebra, 180 (1996), no. 3, 778-807.

[2] T. Altinel, A. Borovik et G. Cherlin. *Groups of mixed type.* J. Algebra, 192 (1997), no. 2, 524-571.

[3] T. Altinel, A. Borovik et G. Cherlin. *On groups of finite Morley rank with weakly embedded subgroups.* J. Algebra, 211 (1999), no. 2, 409-456.

[4] T. Altinel, G. Cherlin, L.-J. Corredor et A. Nesin. *A Hall theorem for ω-stable groups.* J. London Math. Soc. (2) 57 (1998), no. 2, 385-397.

[5] C. Altseimer et A. Berkman. *On Quasi- and Pseudounipotent Groups of finite Morley rank.* Preprint.

[6] R. Baer. *Supersoluble groups.* Proc. Amer. Math. Soc. 6, (1955), 16-32.

[7] J. T. Baldwin et A. Pillay. *Semisimple stable and superstable groups.* Ann. Pure Appl. Logic 45 (1989), no. 2, 105-127.

[8] A. Baudisch. *A new uncountably categorical group.* Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no. 10, 3889-3940.

[9] O. V. Belegradek. *On groups of finite Morley rank.* in Abstracts of the Eighth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, LMPS'87, Moscow, USSR, 17-22 August 1987, 100-102.

[10] A. V. Borovik et A. Nesin. *Groups of finite Morley Rank.* Oxford Logic Guides, 26. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994. xviii+409 pp.

[11] A. V. Borovik et A. Nesin. *On the Schur-Zassenhaus theorem for groups of finite Morley rank.* J. Symbolic Logic 57 (1992), no. 4, 1469-1477.

[12] A. V. Borovik et A. Nesin. *Schur-Zassenhaus theorem revisited.* J. Symbolic Logic 59 (1994), no. 1, 283-291.

[13] A. V. Borovik et B. Poizat. *Simple groups of finite Morley rank without nonnilpotent connected subgroups.* Preprint polycopié par VINITI, 1990.

[14] A. V. Borovik et B. Poizat. *Tores et p-groupes.* J. Symbolic Logic 55 (1990), no. 2, 478-491.

[15] R. M. Bryant. *Groups with the minimal condition on centralizers.* J. Algebra 60 (1979), no. 2, 371-383.

[16] R. M. Bryant et B. Hartley. *Periodic locally soluble groups with the minimal condition on centralizers.* J. Algebra 61 (1979), no. 2, 328-334.

[17] R. W. Carter. *Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups.* Math. Z. 75 (1960/1961), 136-139.

[18] C. Casolo. *Finite groups in which subnormalizers are subgroups.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 82 (1989), 25-53 (1990).

[19] G. CHERLIN. *Groups of small Morley rank.* Ann. Math. Logic 17 (1979), no. 1, 1-28.

[20] L.-J. CORREDOR. *Bad groups of finite Morley rank.* J. Symbolic Logic 54 (1989), no. 3, 768-773.

[21] J. COSSEY ET S. STONEHEWER. *On the derived length of finite dinilpotent groups.* Bull. London Math. Soc. 30 (1998), no. 3, 247-250.

[22] M. DIXON. *Formation theory in locally finite groups satisfying min-p for all primes p.* J. Algebra 76 (1982), no. 1, 192-204.

[23] M. R. DIXON. *Sylow theory, formations and Fitting classes in locally finite groups.* Series in Algebra, 2. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1994. xiv+304 pp.

[24] K. DOERK ET T. HAWKES. *Finite soluble groups.* de Gruyter Expositions in Mathematics, 4. Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1992. xiv+891 pp.

[25] K. ENOCHS ET A. NESIN. *On 2-step solvable groups of finite Morley rank.* Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), no. 2, 479-489.

[26] B. FISCHER, W. GASCHŢZ ET B. HARTLEY. *Injektoren endlicher aufl^sbarer Gruppen.* Math. Z. 102 (1967), 337-339.

[27] O. FRÉCON. *Fitting sets in $\mathfrak{U}$-groups.* En préparation.

[28] O. FRÉCON. *Injecteurs dans les groupes résolubles de rang de Morley fini.* Soumis pour publication.

[29] O. FRÉCON. *Projecteurs dans les groupes de rang de Morley fini résolubles.* Prépublication de l'Institut Girard Desargues, soumis pour publication.

[30] O. FRÉCON. *Propriétés locales et sous-groupes de Carter dans les groupes de rang de Morley fini.* Soumis pour publication.

[31] O. FRÉCON. *Sous-groupes anormaux dans les groupes de rang de Morley fini résolubles.* J. Algebra 229 (2000), no. 1, 118-152.

[32] O. FRÉCON. *Sous-groupes de Hall généralisés dans les groupes de rang de Morley fini résolubles.* A paraître.

[33] A. D. GARDINER, B. HARTLEY ET M. J. TOMKINSON. *Saturated formations and Sylow structure in locally finite groups.* J. Algebra 17 (1971), 177-211.

[34] W. GASCHÜTZ. *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen.* Math. Z. 80 (1962/1963), 300-305.

[35] D. GORENSTEIN. *Finite groups.* Harper and Row, Publishers, New York-London 1968 xv+527 pp.

[36] K. W. GRUENBERG. *The Engel elements of a soluble group.* Illinois J. Math. 3 (1959), 151-168.

[37] P. HALL. *On the system normalizers of a soluble group.* Proc. London Math. Soc. (2) 43 (1937), 507-528.

[38] B. HARTLEY. *Sylow theory in locally finite groups.* Compositio Math. 25 (1972), 263-280.

[39] B. HARTLEY ET M. J. TOMKINSON. *Carter subgroups and injectors in a class of locally finite groups.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 79 (1988), 203-212.

[40] H. HEINEKEN *On E-groups in the sense of Peng.* Glasgow Math. J. 31 (1989), no. 2, 231-242.

[41] B. H^FLING. *Schunck classes and projectors of periodic soluble nilpotent-by-finite groups.* J. Algebra 194 (1997), no. 2, 415-428.

[42] J. E. HUMPHREYS. *Linear algebraic groups.* Graduate Texts in Mathematics, No. 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. xiv+247 pp.

[43] E. Jaligot. *Groupes de rang de Morley fini de type pair avec un sous-groupe faiblement inclus.* A paraître.

[44] O. H. Kegel. *Four lectures on Sylow theory in locally finite groups.* Group theory (Singapore, 1987), 3-27, de Gruyter, Berlin-New York, 1989.

[45] O. H. Kegel. *On the solvability of some factorized linear groups.* Illinois J. Math. 9 (1965), 535-547.

[46] O. H. Kegel. *Produkte nilpotenter Gruppen.* Arch. Math. 12 (1961), 90-93.

[47] O. H. Kegel et B. A. F. Wehrfritz. *Locally finite groups.* North-Holland Mathematical Library, Vol. 3. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London ; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973. xi+210 pp.

[48] A. A. Klimowicz. *Formation theory in locally finite groups.* Proc. London Math. Soc. (3) 30 (1975), 257-286.

[49] A. Macintyre. *On ω_1-categorical theories of abelian groups.* Fund. Math. 70 (1971), no. 3, 253-270.

[50] A. Macintyre. *On ω_1-categorical theories of fields.* Fund. Math. 71 (1971), no. 1, 1-25.

[51] D. H. McLain. *On locally nilpotent groups.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 52 (1956), 5-11.

[52] D. H. McLain. *A characteristically-simple group.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 50 (1954), 641-642.

[53] A. Mal'cev. *On isomorphic matrix representations of infinite groups.* (Russian) Rec. Mat. N. S. 8 (50), (1940), 405-422.

[54] A. Nesin. *Generalized Fitting subgroups of a group of finite Morley rank.* J. Symbolic Logic 56 (1991), no. 4, 1391-1399.

[55] A. Nesin. *Nonsolvable groups of Morley rank* 3. J. Algebra 124 (1989), no. 1, 199-218.

[56] A. Nesin. *On solvable groups of finite Morley rank.* Trans. Amer. Math. Soc. 321 (1990), no. 2, 659-690.

[57] A. Nesin. *Poly-separated and ω-stable nilpotent groups.* J. Symbolic Logic 56 (1991), no. 2, 694-699.

[58] A. Nesin. *Solvable groups of finite Morley rank.* J. Algebra 121 (1989), no. 1, 26-39.

[59] M. L. Newell. *Homomorphs and formats in polycyclic groups.* J. London Math. Soc. (2) 7 (1973), 317-327.

[60] M. L. Newell. *The nilpotent-by-finite projectors of polycyclic groups.* J. London Math. Soc. (2) 7 (1974), 540-546.

[61] T. A. Peng. *Finite soluble groups with an Engel condition.* J. Algebra 11 (1969), 319-330.

[62] T. A. Peng. *On groups with nilpotent derived groups.* Arch. Math. (Basel) 20 (1969), 251-253.

[63] B. Poizat. *Cours de thÈorie des modËles.* Une introduction ‡ la logique mathÈmatique contemporaine. Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1985. vi+584 pp.

[64] B. Poizat. *Groupes stables.* Une tentative de conciliation entre la gÈomÈtrie algÈbrique et la logique mathÈmatique. Nur Al-mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbanne, 1987. vi+218 pp.

[65] B. Poizat. *L'égalité au cube.* Soumis pour publication.

[66] B. Poizat. *Une théorie de Galois imaginaire.* J. Symbolic Logic 48 (1983), no. 4, 1151-1170.

[67] B. Poizat et F. O. Wagner. *Liftez les Sylow! Une suite à "Sous-groupes périodiques d'un groupe stable".* J. Symbolic Logic, 65 (2000), no.2, 703-704.

[68] B. Poizat et F. O. Wagner. *Sous-groupes périodiques d'un groupe stable.* J. Symbolic Logic 58 (1993), no. 2, 385-400.

[69] D. J. S. Robinson. *A course in the theory of groups.* Graduate Texts in Mathematics, 80. Springer-Verlag, New York, 1993. xviii+481 pp.

[70] P. Schmid. *Every saturated formation is a local formation.* J. Algebra 51 (1978), no. 1, 144-148.

[71] H. Schunck. *$\mathcal{H}$-Untergruppen in endlichen aufl^sbaren Gruppen.* Math. Z. 97 (1967), 326-330.

[72] S. E. Stonehewer. *Formations and a class of locally soluble groups.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 62 (1966), 613-635.

[73] N. M. Suchkov. *An example of a mixed group factorable by two periodic subgroups.* Algebra i Logika 23 (1984), no. 5, 573-577, 600.

[74] Y. P. Sysak. *Products of infinite groups.* Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Preprint 1982, no. 53, 36 pp.

[75] M. J. Tomkinson. *Formations of locally soluble FC-groups.* Proc. London Math. Soc. (3) 19 (1969), 675-708.

[76] M. J. Tomkinson. *Schunck classes and projectors in a class of locally finite groups.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 38 (1995), no. 3, 511-522.

[77] F. O. Wagner. *Commutator conditions and splitting automorphisms for stable groups.* Arch. Math. Logic 32 (1993), no. 3, 223-228.

[78] F. O. Wagner. *Fields of finite Morley Rank.* J. Symbolic Logic, à paraître (1999).

[79] F. O. Wagner. *Nilpotent complements and Carter subgroups in stable $\mathfrak{R}$-groups.* Arch. Math. Logic 33 (1994), no. 1, 23-34.

[80] F. O. Wagner. *Stable groups.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 240. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. x+309 pp.

[81] B. A. F. Wehrfritz. *Infinite linear groups.* An account of the group-theoretic properties of infinite groups of matrices. Ergebnisse der Matematik und ihrer Grenzgebiete, Band 76. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. xiv+229 pp.

[82] B. A. F Wehrfritz. *Soluble periodic linear groups.* Proc. London Math. Soc. (3) 18 (1968), 141-157.

[83] B. A. F. Wehrfritz. *Supersoluble and locally supersoluble linear groups.* J. Algebra 17 (1971), 41-58.

[84] B. A. F. Wehrfritz. *Sylow theorems for periodic linear groups.* Proc. London Math. Soc. (3) 18 (1968), 125-140.

[85] J. S. Wilson. *Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index.* Math. Z. 114 (1970), 19-21.

[86] B. I. Zil'ber. *Groups and rings whose theory is categorical.* (Russian) Fund. Math. 95 (1977), no. 3, 173-188.

[87] B. I. Zil'ber. *Groups with categorical theories (in Russian),* in Abstracts of Papers Presented at the Fourth All-Union Symposium on Group Theory, 1973. Math. Inst. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, (63-68)(In Russian).

[88] B. I. Zil'ber. *Some model theory of simple algebraic groups over algebraically closed fields.* Colloq. Math. 48 (1984), no. 2, 173-180.

ÉTUDE DES GROUPES RÉSOLUBLES DE RANG DE MORLEY FINI

RÉSUMÉ : Le chapitre 1 regroupe des définitions et résultats utiles pour la suite. On étudie les groupes de rang de Morley fini résolubles et *connexes* dans le chapitre 2. Cette étude se fait à partir des sous-groupes *anormaux*, et a pour objet l'analyse des *sous-groupes de Carter* ainsi que celle des *centralisateurs généralisés*. En particulier, il est montré que les sous-groupes de Carter d'un groupe de rang de Morley fini résoluble et connexe sont exactement les sous-groupes anormaux minimaux. Dans le chapitre 3, on introduit et on analyse les *sous-groupes localement clos* des groupes de rang de Morley fini. Cette notion permet d'étudier les groupes de rang de Morley fini résolubles non nécessairement connexes. On peut alors montrer que les sous-groupes de Carter d'un groupe de rang de Morley fini résoluble non nécessairement connexe forment une seule classe de conjugaison. Dans le chapitre 4 on définit un ∞-*élément*, et on donne deux généralisations des sous-groupes de Hall des groupes résolubles de rang de Morley fini : les π-*sous-groupes de Hall généralisés* et les *sous-groupes* π-*couvrants de Hall* avec π un sous-ensemble de $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des entiers premiers. On montre la conjugaison des π-sous-groupes de Hall généralisés et l'existence et la conjugaison des sous-groupes π-couvrants de Hall. Dans le chapitre 5 on donne une *théorie des formations* pour les sous-groupes localement clos des groupes de rang de Morley fini résolubles. Cette théorie s'établit à partir des sous-groupes π-couvrants de Hall. Le résultat final de la théorie unifie les résultats de conjugaison des sous-groupes de Hall et d'existence et de conjugaison des sous-groupes de Carter. Ensuite on donne une théorie des formations pour les groupes de rang de Morley fini résolubles et connexes. Cette théorie est similaire à la théorie des formations des groupes finis résolubles établie par W. Gaschütz. On finit le chapitre 5 en donnant un lien entre les deux théories des formations.

STUDY OF SOLVABLE GROUPS OF FINITE MORLEY RANK

SUMMARY : Chapter 1 contains definitions and results that we needed later. We study solvable *connected* groups of finite Morley rank in chapter 2. This is done using *abnormal* subgroups. The two main examples of abnormal subgroups which are closely analyzed are *Carter subgroups* and *generalized centralizers*. In particular, it is shown that the Carter subgroups of a solvable connected group of finite Morley rank are exactly its minimal abnormal subgroups. In chapter 3, we introduce and analyse the *locally closed subgroups* of groups of finite Morley rank. This notion allows to study groups of finite Morley rank which are not necessarily connected. We are thus able to show that a solvable group of finite Morley rank has in general a single conjugacy class of Carter subgroups. In chapter 4 we define an ∞-*element*, and we give two generalizations of the Hall subgroups of solvable groups of finite Morley rank : *generalized Hall* π-*subgroups* and *Hall* π-*covering subgroups* with π a subset of $\mathcal{P} \cup \{\infty\}$ where $\mathcal{P}$ is the set of prime integers. We show conjugacy of the generalized Hall π-subgroups and the existence and the conjugacy of the Hall π-covering subgroups of a solvable group of finite Morley rank. In chapter 5 we give a *formation theory* for the locally closed subgroups of solvable groups of finite Morley rank. This is done using the Hall π-covering subgroups. The final result unifies the conjugacy results of the Hall subgroups and the existence and conjugacy of Carter subgroups. Then we give a formation theory for the solvable connected groups of finite Morley rank. This theory is similar to the formation theory finite solvable groups established by W. Gaschütz. We end chapter 5 by giving a link between the two formation theories.