Injecteurs dans les groupes résolubles de rang de Morley fini

Olivier Frécon

15 août 2000

Dans les groupes finis résolubles, les *ensembles de Fitting* ont été introduits pour dualiser la théorie des formations. En effet, la théorie des formations consiste en l'étude de phénomènes de recouvrements des sections d'un groupe, alors que l'étude des ensembles de Fitting consiste plutôt en l'étude de phénomènes d'intersections avec les sous-groupes normaux. De ce point de vue, les *injecteurs* sont aux ensembles de Fitting ce que les projecteurs sont aux formations saturées. La théorie qui en résulte généralise considérablement la notion de sous-groupe de Hall. Dans le contexte des groupes de rang de Morley fini résolubles, et plus généralement des sections localement closes résolubles (définition 1.5), il existe une théorie des formations [7]. Nous cherchons alors un analogue à la théorie des ensembles de Fitting des groupes finis et, dans cet article, nous étudions les ensembles de Fitting (définition 4.3) et les injecteurs (définition 4.6) dans les sections localement closes résolubles.

Notre démarche est parfois très proche de celle suivie pour l'étude des injecteurs dans les groupes finis. Notamment nous essayons de trouver des analogues aux résultats de la section 8.2 de [3] (pages 537-548). Nous présentons notre étude : dans la section 1 nous donnons la liste des principaux résultats utilisés. Ensuite, dans les sections 2 et 3, nous prouvons des résultats préliminaires concernant principalement les sous-groupes ascendants et le sous-groupe de Fitting des sections localement closes. Dans la section 4 nous définissons les ensembles de Fitting et les injecteurs. Puis nous prouvons l'existence et la conjugaison des injecteurs dans les sections localement closes résolubles (théorème 4.20). Ce résultat est le résultat principal de cet article. Il est analogue au théorème (2.9) p.539 de [3]. Les injecteurs nilpotents et localement nilpotents sont analysés dans la section 5. Nous prouvons que, dans une section localement close résoluble, les sous-groupes nilpotents maximaux, ainsi que les sous-groupes localement nilpotents maximaux, qui contiennent le sous-groupe de Fitting sont conjugués. Il s'agit de résulats analogues à un théorème de Fischer [4] pour les groupes finis. Dans la section 6 nous introduisons les *ensembles de Fitting forts* (définition 6.2). Ceux-ci constituent des ensembles de Fitting particuliers. Le théorème 6.11 donne un résultat sur les injecteurs correspondant aux ensembles de Fitting forts. Dans une dernière partie, nous étudions les ensembles de Fitting dans les quotients des groupes considérés. On obtient des analogues aux propositions (2.15) p.542 et (2.17) p.543 de [3].

1 Prérequis

Dans cette section sont regroupés la plupart des résultats utilisées dans l'article.

La notation est celle habituellement utilisée. Pour des généralités sur le sujet on pourra se référer soit au livre de A. Borovik et A. Nesin [2], soit au livre de B. Poizat [11].

Pour toute classe $\mathfrak{X}$ de groupes, si $G \in \mathfrak{X}$, on dit que G est un $\mathfrak{X}$-*groupe*.

1.1 Groupes de rang de Morley fini

Pour tout groupe G de rang de Morley fini, on note G° sa *composante connexe*, c'est-à-dire l'intersection de ses sous-groupes définissables d'indice fini. G° est un sous-groupe définissable et d'indice fini de G. On étend cette notation aux sous-groupes des groupes de rang de Morley fini, en notant $H^\circ = H \cap d(H)^\circ$ pour tout sous-groupe H d'un groupe de rang de Morley fini.

Fait 1.1. – **([13], Zil'ber)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H un sous-groupe de G définissable et connexe et $X \subseteq G$. Alors $[H, X]$ est définissable et connexe.*

Fait 1.2. – **([2], cor. 5.32 p.87)** *Si G est un groupe de rang de Morley fini, alors G^i et $G^{(i)}$ sont définissables pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Fait 1.3. – **([15], Zil'ber)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G. Si H est résoluble (resp. nilpotent) de classe n, alors $d(H)$ est aussi résoluble (resp. nilpotent) de classe exactement n.*

Fait 1.4. – **([10], Nesin ; [14], Zil'ber)** *Si G est un groupe de rang de Morley fini, connexe et résoluble, G' est nilpotent.*

1.2 Sous-groupes localement clos

Nous rappelons les définitions de *sous-groupe localement clos* et de *section localement close* :

Définition 1.5. – *Un sous-groupe H d'un groupe de rang de Morley fini G est dit* localement clos *si, pour toute partie finie X de H, $d(X) \leq H$.*

On appelle section localement close *un groupe qui est un quotient de deux sous-groupes localement clos.*

Nous définissons deux opérateurs sur les sous-groupes d'un groupe de rang de Morley fini :

Définition 1.6. – *Soit H un sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini G. On note $H^+ = \langle d(h)^\circ : h \in H \rangle$ et $H^- = \langle U \leq H : U$ est définissable et connexe $\rangle$.*

D'après le théorème des indécomposables de Zil'ber [13], H^+ et H^- sont des groupes définissables et connexes.

Fait 1.7. – **([8], lemme 3.4 ; [9], lemme 3.2 (ν) et (νi))** *Soit H un sous-groupe localement clos d'un groupe de rang de Morley fini G. Alors H^- contient H^+ et H/H^- est localement fini. De plus, si H est résoluble, H/H^+ est localement fini.*

Le fait 1.8 permet de définir la *clôture locale* (définition 1.9).

Fait 1.8. – **([9], lemme 3.7)** *Dans un groupe de rang de Morley fini, toute intersection de sous-groupes localement clos est localement close.*

Définition 1.9. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et X une partie de G. La* clôture locale *$d_{loc}(X)$ de X dans G est le plus petit sous-groupe localement clos de G qui contient X.*

Les faits suivants donnent des informations supplémentaires sur les sections localement closes.

Fait 1.10. – **([8], lemme 3.8, B. Poizat)** *Si G est un groupe de rang de Morley fini et si A est une partie de G alors, pour toute partie finie U de $d_{loc}(A)$, il existe une partie finie X_U de A telle que $U \subseteq d(X_U)$. En particulier,*

$$d_{loc}(A) = \bigcup_{X \text{ partie finie de } A} d(X)$$

Fait 1.11. – **([9], lemme 3.6)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H et K deux sous-groupes localement clos de G tels que H normalise K. Alors HK est localement clos.*

Fait 1.12. – **([8], lemme 3.13)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H et K deux sous-groupes de G localement clos. Si H normalise K, alors $[H, K]$ est localement clos.*

Fait 1.13. – **([8], cor. 3.14)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G localement clos. Alors, pour tout ordinal α, H^α et $H^{(\alpha)}$ sont localement clos.*

Fait 1.14. – **([8], lemme 3.22)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H/K une section localement close de G. Alors, pour tout sous-ensemble X de H, $C_{H/K}(XK/K)$ est une section de H localement close.*

Définition 1.15. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H/K une section localement close de G. Une H-section A/B non triviale et localement close de G est dite* H/K-d_{loc}-minimale *si B contient K et si, pour toute H-section localement close C/B de A, $A = C$ ou $B = C$.*

Fait 1.16. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble, H/K une section localement close de G et U/V une H-section non triviale et localement close de H avec $K \leq V$. Alors U/V contient une section H/K-d_{loc}-minimale.*

Lorsque nous étudions une section localement close résoluble d'un groupe G de rang de Morley fini, nous pouvons supposer le groupe G résoluble grâce au fait suivant :

Fait 1.17. – **([8], cor. 4.11)** *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H/K une section localement close de G et L/K un sous-groupe localement résoluble de H/K. Alors il existe un sous-groupe définissable et résoluble V/K^- de $d(H)/K^-$ tel que V couvre L/K, en particulier $d_{loc}(L)/K$ est résoluble.*

1.3 Sous-groupes de Hall

Dans toute la suite, $\mathcal{D}loc$ désignera la classe des sections localement closes résolubles.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers premiers, $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{\infty\}$ et, pour tout sous-ensemble π de $\mathcal{P}^+$, on note $\pi' = \mathcal{P} \setminus \pi$.

Dans [9], on avait introduit la notion de π-*élément* pour $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$. Cette notion généralise la notion habituelle de π-élément pour $\pi \subseteq \mathcal{P}$:

Définition 1.18. – *Soient R/K un sous-groupe d'un $\mathcal{D}loc$-groupe H/K, x un élément de H et $\overline{x}$ sa classe modulo K, alors :*

a) $\overline{x}$ *est un* π-élément *si, pour tout $p \in \mathcal{P}^+ \setminus \pi$, $d(x)K/K$ est sans élément d'ordre p ;*

b) R/K *est un* π-sous-groupe *de H/K si tous les éléments de R/K sont des π-éléments ;*

c) R/K *est un* π-sous-groupe de Hall *de H/K si R/K est un π-sous-groupe maximal de H/K.*

d) R/K *est un* p-sous-groupe de Sylow *de H/K (pour $p \in \mathcal{P}^+$) si R/K est un p-sous-groupe maximal de H/K.*

Voici les principaux résultats que nous obtenons :

Fait 1.19. – **([9], lemme 4.5)** *Soient H/K un $\mathcal{D}loc$-groupe, $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, H_2/K un π-sous-groupe de H/K et H_1/K un π-sous-groupe normal de H/K. Si H_1/K est une section localement close, alors H_1H_2/K est un π-sous-groupe de H/K.*

Fait 1.20. – **([9], th. 4.18)** *Dans un $\mathcal{D}loc$-groupe, les π-sous-groupes de Hall sont conjugués pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$.*

Fait 1.21. – **([9], cor. 4.19)** *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, H/K un $\mathcal{D}loc$-groupe, R/K est un π-sous-groupe de Hall de H/K et N/K un sous-groupe normal de H/K. Alors $R/K \cap N/K$ est un π-sous-groupe de Hall de N/K et tous les π-sous-groupes de Hall de N/K sont de cette forme.*

Fait 1.22. – **([9], cor. 4.22)** *Pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, les π-sous-groupes de Hall d'un $\mathcal{D}loc$-groupe sont des sections localement closes.*

De plus, si $\infty \notin \pi$, on a le résultat suivant :

Fait 1.23. – **([6] ; [1], Altınel, Cherlin, Corredor, Nesin)** *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}$, H/K un $\mathcal{D}loc$-groupe, N/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K et R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K. Alors RN/N est un π-sous-groupe de Hall de H/N et tous les π-sous-groupes de Hall de H/N sont de cette forme.*

2 Sous-groupes sous-normaux et ascendants

Dans toute cette section, H/K désigne une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini.

On rappelle la définition d'un *sous-groupe ascendant*, et, par analogie, on définit un *sous-groupe d_{loc}-ascendant* qui est une notion plus adaptée à notre contexte.

Définition 2.1. – *Pour tout ordinal α, on appelle* série ascendante de type α *d'un groupe G une suite croissante $(U_i)_{i\leq\alpha}$ de sous-groupes de G telle que $U_0 = 1$, $U_\alpha = G$, U_i soit un sous-groupe normal de U_{i+1} pour tout $i < \alpha$ et $U_\mu = \bigcup_{i<\mu} U_i$ pour tout ordinal limite $\mu \leq \alpha$.*

Pour tout ordinal α, un sous-groupe U de G est dit être α-ascendant *dans G si U est un terme d'une série ascendante de type α de G. U est dit être* ascendant *dans G si U est un terme d'une série ascendante de G.*

Si $(U_i/K)_{i\leq\alpha}$ (α étant un ordinal) est une série ascendante de H/K dont tous les termes appartiennent à $\mathcal{D}loc$, $(U_i/K)_{i\leq\alpha}$ est dite série d_{loc}-ascendante de type α *de H/K. Pour tout ordinal α, un sous-groupe L/K de H/K est dit être* α-d_{loc}-ascendant *(resp.* d_{loc}-ascendant*) dans H/K si L/K est un terme d'une série d_{loc}-ascendante de type α de H/K (resp. d'une série d_{loc}-ascendante de H/K).*

Remarque 2.2. – Soient α un ordinal et A et B deux sous-groupes d'un groupe G avec A α-ascendant dans G. Alors $A \cap B$ est α-ascendant dans B et, si B est normal dans G, AB est α-ascendant dans G.

Nous montrons que, pour un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe d'un $\mathcal{D}loc$-groupe, les notions d'ascendance et de d_{loc}-ascendance sont équivalentes :

Lemme 2.3. – *Soient α un ordinal et A/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe α-ascendant de H/K. Alors A/K est un sous-groupe $(\alpha + 1)$-d_{loc}-ascendant de H/K.*

Preuve. – Il existe une série ascendante de type α $(U_i/K)_{i\leq\alpha}$ de H/K telle que $A = U_\delta$ pour $\delta \leq \alpha$. On note $A_0 = K$; pour tout ordinal $i \leq \alpha$, A_{i+1} désigne le plus grand sous-groupe normal et localement clos de U_i (A_{i+1} existe d'après le fait 1.11) et, si i est un ordinal limite, $A_i = \cup_{j<i} A_j$. Alors on a $A_{\delta+1} = A$. Montrons que $(A_i/K)_{i\leq\alpha+1}$ est une série d_{loc}-ascendante de type $\alpha + 1$ de H/K. Il suffit de montrer que, pour tout ordinal $i \leq \alpha$, A_i est un sous-groupe localement clos et normal de A_{i+1}. On fait la preuve par induction sur i. D'après le choix de A_{i+1}, il suffit de montrer que A_i est un sous-groupe localement clos et normal de U_i. On peut supposer $i \neq 0$.

Si $i = \nu + 1$ pour un ordinal ν, alors U_ν est normal dans U_i. Comme A_i est le plus grand sous-groupe normal et localement clos de U_ν, A_i est un sous-groupe localement clos et normal de U_i.

On peut donc supposer i ordinal limite. Comme $(A_\gamma)_{\gamma<i}$ est une suite croissante de sous-groupes localement clos, A_i est un sous-groupe localement clos de U_i. Soient $a \in A_i$ et $u \in U_i$. Alors il existe $j < i$ tel qu'on ait $a \in A_j$ et $u \in U_j$. On obtient $[a, u] \in A_j \leq A_i$ et A_i est normal dans U_i. □

Corollaire 2.4. – *Soit A/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe sous-normal de H/K. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des $\mathcal{D}loc$-sous-groupes $A_0, ..., A_n$ de H avec $A_0 = A$, $A_n = H$ et A_i sous-groupe normal de A_{i+1} pour tout $i < n$.*

Preuve. – Il suffit d'appliquer le lemme 2.3 avec α fini. □

Le corollaire 2.8 dit que toute réunion croissante de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes sous-normaux de H/K est un sous-groupe sous-normal de H/K.

Définition 2.5. – *Si x et y sont deux éléments du groupe G, on note $[x,_0 y] = x$ et $[x,_{n+1} y] = [[x,_n y], y]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Soient G un groupe et A un sous-groupe de G. Nous définissons le centralisateur généralisé *$E_A(g)$ d'un élément g de $N_G(A)$ comme étant l'ensemble des éléments x de A tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[x,_n g] = 1$. Si X est un sous-ensemble de $N_G(A)$, on note $E_A(X)$ l'intersection des $E_A(x)$ pour $x \in X$.*

Fait 2.6. – **([7], lemme 7.7)** *Soit U/K un sous-groupe de $H^\circ K/K$ normalisé par un sous-ensemble X/K de $H^\circ K/K$. Si, pour tout $\overline{x} \in X/K$, $E_{U/K}(\overline{x}) = U/K$, alors l'action de $\langle X/K \rangle$ sur U/K est nilpotente.*

Lemme 2.7. – *Soient U/K un sous-groupe de H/K normalisé par un sous-groupe X/K de H/K. Si, pour tout sous-ensemble fini X_0/K de X/K, l'action de X_0/K sur U/K est nilpotente, alors l'action de X/K sur U/K est nilpotente.*

Preuve. – Le fait 2.6 dit que l'action de $(X \cap H^\circ K)/K$ sur $(U \cap H^\circ K)/K$ est nilpotente. Donc l'action de $(X \cap H^\circ K)/K$ sur U/K est nilpotente. Soit X_0/K une partie finie de X/K telle que $X = (X \cap H^\circ K)X_0$. On note $U_0/K = U/K$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $U_{i+1}/K = [U_i/K, (X \cap H^\circ K)/K]$. Il existe $j \in \mathbb{N}$ telle que $U_j/K = 1$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, X_0/K normalise U_i/U_{i+1} et l'action de X_0/K sur U_i/U_{i+1} est nilpotente puisque celle de X_0/K sur U/K l'est. Comme $(X \cap H^\circ K)/K$ centralise U_i/U_{i+1} pour tout $i \in \mathbb{N}$, on en déduit le résultat. $\square$

Corollaire 2.8. – *Soient α un ordinal, $(A_i/K)_{i<\alpha}$ une suite croissante de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de H/K, $A/K = \bigcup_{i<\alpha} A_i/K$ et N/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K. On suppose que A_i/K soit sous-normal dans A_iN/K pour tout $i < \alpha$. Alors A/K est sous-normal dans AN/K.*

Preuve. – Par induction sur la classe de résolubilité r de N/K. On peut supposer $r \geq 1$. Soit $U/K = (N/K)^{(r-1)}$. Le fait 1.13 donne $U/K \in \mathcal{D}loc$. Comme A_iU/U est sous-normal dans A_iN/U pour tout $i < \alpha$, AU/U est sous-normal dans AN/U par hypothèse d'induction. Il suffit de montrer que A/K est sous-normal dans AU/K. Soit $V/K = A/K \cap U/K$. Il faut montrer que l'action de A/V sur U/V est nilpotente. Soit X_0/V une partie finie de A/V. Alors il existe $j < \alpha$ tel que X_0/V soit contenu dans A_jV/V. Mais A_jV/V est sous-normal dans $A_jU/V (= U/V \rtimes A_jV/V)$. Donc l'action de A_jV/V sur U/V est nilpotente. Le lemme 2.7 permet de conclure. $\square$

Le lemme suivant est l'analogue du corollaire 2.8 pour les sous-groupes ascendants :

Lemme 2.9. – *Soient α un ordinal, $(A_i/K)_{i<\alpha}$ une suite croissante de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de H/K et N/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K. On suppose que A_i/K soit ascendant dans A_iN/K pour tout $i < \alpha$. Si on note $A/K = \bigcup_{i<\alpha} A_i/K$, alors A/K est ascendant dans AN/K.*

Preuve. – Par induction sur la classe de résolubilité r de N/K. On peut supposer $r \geq 1$. Soit $U/K = (N/K)^{(r-1)}$. Le fait 1.13 donne $U/K \in \mathcal{D}loc$. Comme A_iU/U est ascendant dans A_iN/U pour tout $i < \alpha$, AU/U est ascendant dans AN/U par hypothèse d'induction. Il suffit de montrer que A/K est ascendant dans AU/K. Soit $V/K = A/K \cap U/K$. Il faut montrer que U/V est hypercentral dans $U/V \rtimes A/V$. Comme A_iV/V est ascendant dans $U/V \rtimes A_iV/V$ pour tout $i < \alpha$, U/V est hypercentral dans $U/V \rtimes A_iV/V$ pour tout $i < \alpha$. On en déduit que, pour tout $\overline{x} \in AU/V$, $E_{AU/V}(\overline{x}) = AU/V$. Le fait 2.6 dit que l'action de $(AU)^\circ V/V$ sur $U/V \cap (AU)^\circ V/V$ est nilpotente, donc l'action de $(AU)^\circ V/V$ sur U/V est nilpotente. On note $U_0 = U$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $U_{i+1}/V = [U_i/V, (AU)^\circ V/V]$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, U_i est un sous-groupe normal de AU/V et $(AU)^\circ V/V$ centralise U_i/U_{i+1}. De plus, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $U_j/K = 1$. Comme $A/(A \cap (AU)^\circ)$ est fini, il existe un ordinal $\nu < \alpha$ tel que $A = (A \cap (AU)^\circ)A_\nu$. Par ce qui précède, il suffit de montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'action de $A_\nu U_{i+1}/U_{i+1}$ sur U_i/U_{i+1} est hypercentrale. Mais $A_\nu U_{i+1}/U_{i+1}$ est ascendant dans $U_i/U_{i+1} \rtimes A_\nu U_{i+1}/U_{i+1}$, et on peut conclure. $\square$

Nous finissons cette section par deux résultats sur les sous-groupes sous-normaux (resp. ascendants) qui se normalisent.

Fait 2.10. – **([12], 13.1.5)** *Si U et V sont deux sous-groupes sous-normaux d'un groupe G et si V normalise U, alors UV est sous-normal dans G.*

Lemme 2.11. – *Si U et V sont deux sous-groupes ascendants d'un groupe résoluble G et si V normalise U, alors UV est ascendant dans G.*

Preuve. – Par induction sur la classe de résolubilité r de G. On peut supposer $r \geq 1$. Alors $UVG^{(r-1)}$ est ascendant dans G par hypothèse d'induction. Soient $\overline{A}$, $\overline{U}$ et $\overline{V}$ les quotients par $UV \cap G^{(r-1)}$ de $G^{(r-1)}$, U et V respectivement. Il suffit de montrer que $\overline{UV}$ est ascendant dans $\overline{A} \rtimes (\overline{UV})$. Mais $\overline{U}$ et $\overline{V}$ sont ascendants dans $\overline{A} \rtimes \overline{U}$ et $\overline{A} \rtimes \overline{V}$ respectivement, donc $\overline{A}$ est hypercentral dans $\overline{AU}$ et $\overline{AV}$. Comme $\overline{V}$ normalise $\overline{U}$, on en déduit que $\overline{A}$ est hypercentral dans $\overline{A} \rtimes (\overline{UV})$, d'où le résultat. □

3 Sous-groupes nilpotents et localement nilpotents

Dans toute cette section H/K désigne une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini.

Nous donnons des informations sur les sections localement closes localement nilpotentes :

Fait 3.1. – **([8], cor. 4.14)** *Si L/K est un sous-groupe localement nilpotent de H/K, alors $d_{loc}(L)/K$ localement nilpotent.*

Fait 3.2. – **([8], cor. 4.16)** *On suppose H/K localement nilpotent. Soit R/K le sous-groupe de torsion maximal de H/K. Alors $H/K = H^+K/K * R/K$, et H^+K/K est nilpotent.*

Fait 3.3. – **([8], prop. 4.17)** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) H/K est localement nilpotent ;
(ii) H/K est hypercentrale ;
(iii) H/K vérifie la condition de normalisateur.
De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, H/K est nilpotent-par-fini.

Nous rappelons la définition du *radical de Hirsch-Plotkin* pour un groupe quelconque :

Définition 3.4. – *Le* radical de Hirsch-Plotkin *d'un groupe G est le sous-groupe de G engendré par ses sous-groupes localement nilpotents normaux. On le note $HP(G)$.*

Le radical de Hirsch-Plotkin d'un groupe quelconque G est un sous-groupe localement nilpotent de G (cf. [12], 12.1.2 p. 343).

Lemme 3.5. – *$HP(H/K)$ est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe localement nilpotent de H/K.*

Preuve. – Comme $HP(H/K)$ est un sous-groupe localement nilpotent et normal de H/K, le fait 3.1 donne le résultat. □

Nous allons montrer un analogue du fait 3.1 pour les groupes nilpotents :

Définition 3.6. – *Pour tout groupe G et tout éléments $g_0, ..., g_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) de G, on note $[g_0] = g_0$ et $[g_0, ..., g_{n+1}] = [[g_0, ..., g_n], g_{n+1}]$.*

Remarque 3.7. – Soient G un groupe et $c \in \mathbb{N}$. Si $X \subseteq G$ engendre G, alors G^c est engendré par les conjugués de ses éléments de la forme $[x_0, ..., x_c]$ avec $x_0, ..., x_c$ des éléments de X.

Proposition 3.8. – *Si L/K est un sous-groupe nilpotent de classe c de H/K, alors $d_{loc}(L)/K$ est aussi nilpotent de classe c.*

Preuve. – Quitte à quotienter H par K^-, on peut supposer $K^- = 1$. Soit U une partie finie de $d_{loc}(L)$. Le fait 1.10 dit qu'il existe une partie finie X de L avec $U \subseteq d(X)$. Alors $\langle X \rangle K/K$ est nilpotent de classe au plus c. Les faits 1.2 et 1.3 donnent $d(\langle X \rangle^c) = d(X)^c$. Soit Y l'ensemble des éléments de $\langle X \rangle$ de la forme $[x_0, ..., x_c]$ avec $x_0, ..., x_c$ des éléments de X. La remarque 3.7 dit que $\langle X \rangle^c$ est engendré par les conjugués des éléments de Y par des éléments de $\langle X \rangle$. Le fait 1.1 dit que $[d(X)^\circ, K]$ est un sous-groupe définissable et connexe de K. Comme $K^- = 1$, $d(X)^\circ$ centralise K et, comme Y est contenu dans K, on en déduit que $\langle X \rangle^c$ est finiment engendré. K étant localement fini (fait 1.7), $\langle X \rangle^c$ est fini et on obtient $d(X)^c = d(\langle X \rangle^c) = \langle X \rangle^c \leq K$. On a montré que $\langle U \rangle K/K$ est nilpotent de classe au plus c. Donc $d_{loc}(L)/K$ est nilpotent de classe c. □

Nous donnons la définition du *sous-groupe de Fitting* d'un groupe quelconque :

Définition 3.9. – *Dans un groupe G, le* sous-groupe de Fitting $F(G)$ *est le sous-groupe engendré par les sous-groupes normaux et nilpotents.*

Pour un groupe résoluble quelconque, on a le résultat suivant :

Fait 3.10. – **([12], 5.4.4, p.144, Fitting)** *Pour tout groupe résoluble G, $C_G(F(G))$ est contenu dans $F(G)$.*

Dans notre contexte, le sous-groupe de Fitting sera toujours nilpotent :

Proposition 3.11. – *Si L/K est un sous-groupe de H/K, alors $F(L/K)$ est un sous-groupe nilpotent et d'indice fini de $HP(L/K)$. De plus, si L/K est un $\mathcal{D}loc$-groupe, alors $F(L/K)$ est aussi un $\mathcal{D}loc$-groupe.*

Preuve. – Les faits 3.1 et 3.3 montrent que $HP(L/K)$ est nilpotent-par-fini. Alors, comme le produit de deux sous-groupes nilpotents qui se normalisent est nilpotent, $F(HP(L/K))$ est un sous-groupe nilpotent et d'indice fini de $HP(L/K)$. On en déduit $F(HP(L/K)) = F(L/K)$. Donc $F(L/K)$ est un sous-groupe nilpotent et d'indice fini de $HP(L/K)$.

Si L est localement clos, on note $F/K = F(L/K)$. La proposition 3.8 dit que $d_{loc}(F)/K$ est nilpotent. Ce qui prouve que F est localement clos. □

Pour prouver le lemme 4.16, nous utiliserons la notion de *sous-groupe de Carter* :

Définition 3.12. – *Un* sous-groupe de Carter *d'un groupe G est un sous-groupe localement nilpotent et autonormalisant.*

Remarque 3.13. – Les faits 3.1 et 3.3 montrent qu'un sous-groupe de Carter d'une section localement close est un $\mathcal{D}loc$-groupe.

Le principal résultat concernant les sous-groupes de Carter des sections localement closes est le suivant :

Fait 3.14. – **([8], th. 7.6)** *Si H/K est un $\mathcal{D}loc$-groupe, alors H/K possède une unique classe de conjugaison de sous-groupes de Carter.*

4 Ensembles de Fitting

A partir de maintenant, H/K désigne une section localement close *résoluble.* D'après le fait 1.17, cela est équivalent à dire que H/K est une section localement close d'un groupe de rang de Morley fini résoluble. Donc, pour les démonstrations, nous supposerons toujours que H est résoluble.

Notation 4.1 – *Soient $\mathfrak{X}$ une classe de sous-groupes de H/K et A/K un sous-groupe de H/K. On note*

$(A/K)_{\mathfrak{X}n} = \langle U/K : U/K$ *est un $\mathfrak{X}$-sous-groupe normal de $A/K\rangle$.*

Remarque 4.2. – Si $\mathfrak{X}$ est une classe de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de H/K et si A/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K, alors $(A/K)_{\mathfrak{X}n}$ est aussi un $\mathcal{D}loc$-groupe.

Définition 4.3. – *Soit $\mathcal{F}$ un ensemble non vide de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de H/K. $\mathcal{F}$ est un* ensemble de Fitting *de H/K si :*

(*F1*) *tout $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal d'un $\mathcal{F}$-groupe est un $\mathcal{F}$-groupe ;*
(*F2*) *si A/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K, alors $(A/K)_{\mathfrak{F}n} \in \mathfrak{F}$;*
(*F3*) *tout H/K-conjugué d'un $\mathfrak{F}$-groupe est un $\mathfrak{F}$-groupe.*

Comme le montre la remarque 4.5, l'ensemble $\mathcal{N}$ des $\mathcal{D}loc$-sous-groupes nilpotents de H/K est un ensemble de Fitting de H/K. L'ensemble $L\mathcal{N}$ des $\mathcal{D}loc$-sous-groupes localement nilpotents de H/K est aussi un ensemble de Fitting de H/K (remarque 4.5).

La remarque suivante nous permet d'appliquer les résultats démontrés pour H/K à n'importe quel $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K.

Remarque 4.4. – Si $\mathcal{F}$ est un ensemble de Fitting de H/K et si A/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K, alors $\{U/K : U/K$ est un $\mathcal{F}$-sous-groupe de $A/K\}$ est un ensemble de Fitting de A/K.

Remarque 4.5. – Le lemme 3.5 montre que $HP(H/K) = (H/K)_{L\mathcal{N}n}$. Donc $L\mathcal{N}$ est un ensemble de Fitting de H/K.

De même, la proposition 3.11 donne $F(H/K) = (H/K)_{\mathcal{N}n}$. Donc $\mathcal{N}$ est un ensemble de Fitting de H/K.

4.1 Les $\mathfrak{F}$-injecteurs

Dans toute la suite, $\mathfrak{F}$ désigne un ensemble de Fitting de H/K.

Nous introduisons la notion de $\mathfrak{F}$-*injecteur* dans un $\mathcal{D}loc$-groupe et nous les caractérisons dans les $\mathcal{D}loc$-groupes localement nilpotents.

Définition 4.6. – *Soit $\mathfrak{X}$ un ensemble de sous-groupes de H/K. Un sous-groupe V/K de H/K est un* $\mathfrak{X}$-injecteur *de H/K si, pour tout $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal A/K de H/K, $V/K \cap A/K$ est un $\mathfrak{X}$-sous-groupe maximal de A/K.*

Par exemple, si $\mathfrak{X}$ désigne la classe des π-sous-groupes de H/K pour $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, alors les π-sous-groupes de Hall de H/K sont les $\mathfrak{X}$-injecteurs de H/K (fait 1.21).

Comme le montre la proposition suivante, nous ne pouvons montrer des résultats intéressants sur les $\mathfrak{X}$-injecteurs que lorsque $\mathfrak{X}$ est un ensemble de Fitting :

Proposition 4.7. – *Soit $\mathfrak{X}$ un ensemble de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de H/K tel que tout H/K-conjugué d'un $\mathfrak{X}$-groupe soit un $\mathfrak{X}$-groupe. Si tout $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K possède un $\mathfrak{X}$-injecteur, alors $\mathfrak{X}$ est un ensemble de Fitting de H/K.*

Preuve. – Soient A/K un $\mathfrak{X}$-groupe et U/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de A/K. Comme A/K possède un $\mathfrak{X}$-injecteur, A/K est un $\mathfrak{X}$-injecteur de A/K puisqu'on a $A/K \in \mathfrak{X}$. Alors $U/K = U/K \cap A/K$ est un $\mathfrak{X}$-groupe et $\mathfrak{X}$ vérifie (*F1*).

Soient A/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K et V/K un $\mathfrak{X}$-injecteur de A/K. Alors V/K contient tous les $\mathfrak{X}$-sous-groupes normaux de A/K. Donc V/K contient $(A/K)_{\mathfrak{X}n}$ et, comme $(A/K)_{\mathfrak{X}n}$ est normal V/K, $(A/K)_{\mathfrak{X}n}$ est un $\mathfrak{X}$-groupe d'après (*F1*). Ainsi, $\mathfrak{X}$ vérifie (*F2*) et, comme $\mathfrak{X}$ vérifie aussi (*F3*), $\mathfrak{X}$ est bien un ensemble de Fitting de H/K. $\square$

Nous allons montrer que, si H/K est localement nilpotent, alors $(H/K)_{\mathfrak{F}n}$ est l'unique $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K.

Lemme 4.8. – *$(H/K)_{\mathfrak{F}n}$ contient tous les $\mathfrak{F}$-sous-groupes sous-normaux de H/K.*

Preuve. – Soit U/K un $\mathfrak{F}$-sous-groupe sous-normal de H/K. D'après le corollaire 2.4, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des sous-groupes localement clos $U_0, ..., U_n$ de H avec $U_0 = U$, $U_n = H$ et U_i $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de U_{i+1} pour tout $i < n$. Pour tout $i < n$, $(U_i/K)_{\mathfrak{F}n}$ est normal dans U_{i+1}/K, et on a $(U_i/K)_{\mathfrak{F}n} \leq (U_{i+1}/K)_{\mathfrak{F}n}$. On en déduit le résultat. $\square$

Corollaire 4.9. – *Si H/K est nilpotent, $(H/K)_{\mathfrak{F}n}$ contient tous les $\mathfrak{F}$-sous-groupes de H/K. En particulier, c'est l'unique $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de H/K et c'est aussi l'unique $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K.*

Lemme 4.10. – *Si H/K possède un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal M/K, alors $N_{H/K}(M/K)$ est autonormalisant dans H/K.*

Preuve. – Soit $\overline{x} \in N_{H/K}(N_{H/K}(M/K))$. Alors M/K et $(M/K)^{\overline{x}}$ sont deux $\mathfrak{F}$-sous-groupes de H/K qui se normalisent. La condition (*F2*) montre que $(M/K)(M/K)^{\overline{x}}$ est un $\mathfrak{F}$-groupe. Par maximalité de M/K, on obtient $M/K = (M/K)^{\overline{x}}$ et $\overline{x} \in N_{H/K}(M/K)$. $\square$

Proposition 4.11. – *Si H/K est localement nilpotent, $(H/K)_{\mathfrak{F}n}$ est l'unique $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de H/K. C'est aussi l'unique $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K.*

Preuve. – Montrons que $(H/K)_{\mathfrak{F}n}$ est contenu dans un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de H/K. Soit $F/K = F(H/K)$. D'après la proposition 3.11, F/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe nilpotent et d'indice fini de H/K. Le corollaire 4.9 dit que $(F/K)_{\mathfrak{F}n}$ est l'unique $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de F/K. Comme $(F/K)_{\mathfrak{F}n}$ est normal dans H/K, on obtient $(H/K)_{\mathfrak{F}n} \cap F/K = (F/K)_{\mathfrak{F}n}$. On en déduit que, si L/K est un $\mathfrak{F}$-sous-groupe de H/K contenant $(H/K)_{\mathfrak{F}n}$, alors $(L/K)/(H/K)_{\mathfrak{F}n}$ est d'ordre au plus $|H/F|$. En particulier, $(H/K)_{\mathfrak{F}n}$ est contenu dans un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de H/K.

Pour montrer que $(H/K)_{\mathfrak{F}n}$ est l'unique $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de H/K, il reste à montrer que $(H/K)_{\mathfrak{F}n}$ contient tous les $\mathfrak{F}$-sous-groupes maximaux de H/K. Soit M/K un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de H/K. Le lemme 4.10 dit que $N_{H/K}(M/K)$ est autonormalisant dans H/K. Alors le fait 3.3 montre que M/K est normal dans H/K et M/K est contenu dans $(H/K)_{\mathfrak{F}n}$.

Montrons que $(H/K)_{\mathfrak{F}n}$ est l'unique $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K. Par ce qui précède, il suffit de montrer que $(H/K)_{\mathfrak{F}n}$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K. Soit A/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K. Alors $(A/K)_{\mathfrak{F}n}$ est l'unique $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de A/K. Mais $(A/K)_{\mathfrak{F}n}$ est normal dans H/K, donc $(A/K)_{\mathfrak{F}n}$ est contenu dans $(H/K)_{\mathfrak{F}n}$. Ceci finit la preuve. $\square$

4.2 Le théorème d'existence et de conjugaison

Nous démontrons le théorème principal de cette section (théorème 4.20). Les deux principaux ingrédients de la preuve sont le lemme 4.16 qui est un analogue du lemme de Hartley ([5] ; [3], p.539, lemme (2.8)), et le lemme 4.17.

Comme le montre l'exemple suivant, un $\mathfrak{F}$-sous-groupe de H/K peut ne pas être contenu dans un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de H/K.

Exemple 4.12. – *Soient T le 2-sous-groupe de Sylow de $\mathbb{C}^*$, i une involution agissant par inversion sur $\mathbb{C}^*$, $H = \mathbb{C}^* \rtimes \langle i \rangle$, $K = T$ et $\mathfrak{F}$ l'ensemble de sous-groupes de H/K constitué des $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de $\mathbb{C}^*/K$ et des sous-groupes finis de H/K. Alors $\mathfrak{F}$ est un ensemble de Fitting de H/K et $\langle i \rangle K/K$ est un $\mathfrak{F}$-groupe. Pourtant, $\langle i \rangle K/K$ n'est contenu dans aucun $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de H/K.*

Lemme 4.13. – *Soit A/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K contenant $(H/K)'$. Si A/K possède un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal W/K, alors tout $\mathfrak{F}$-sous-groupe de H/K contenant W/K est contenu dans un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de H/K.*

Preuve. – Soient $(V_i/K)_{i<\alpha}$ (α étant un ordinal) une suite croissante de $\mathfrak{F}$-sous-groupes de H/K contenant W/K et $V/K = \bigcup_{i<\alpha} V_i/K$. On va montrer que V/K est un $\mathfrak{F}$-groupe, ce qui prouvera le lemme. Par maximalité de W/K, on a $V_i/K \cap (H/K)' = W/K \cap (H/K)'$ pour tout $i < \alpha$, d'où $V/K \cap (H/K)' = W/K \cap (H/K)'$. Comme $(V/K)/(W/K \cap (H/K)')$ est abélien, V_i/K est normal dans V/K pour tout $i < \alpha$, et (*F2*) permet de conclure. $\square$

Pour prouver le lemme 4.16 nous avons besoin de montrer que le normalisateur d'un $\mathfrak{F}$-injecteur est un $\mathcal{D}loc$-groupe (corollaire 4.15).

Fait 4.14. – **([7], prop. 4.3)** *Soit V/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K telle que $V/K \cap (H^+K/K)'$ soit normal dans H/K. Alors $N_{H/K}(V/K)$ est une section localement close de H.*

Corollaire 4.15. – *Si un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal A/K de H/K possède un $\mathfrak{F}$-injecteur V/K, alors $N_{H/K}(V/K) \in \mathcal{D}loc$.*

Preuve. – $(H^+K/K)'$ étant nilpotent (fait 1.4), le corollaire 4.9 dit que $V/K \cap (H^+K/K)' = (A/K \cap (H^+K/K)')_{\mathfrak{F}n}$ est normal dans H/K. Le fait 4.14 donne le résultat. $\square$

La preuve du lemme suivant est très voisine de celle d'un lemme de Hartley ([5] ; [3], p.539, lemme (2.8)).

Lemme 4.16. – *Soit A/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K contenant $(H/K)'$. Si A/K possède un $\mathfrak{F}$-injecteur (de A/K) W/K, alors il existe une unique classe de conjugaison de $\mathfrak{F}$-sous-groupes maximaux de H/K contenant W/K.*

Preuve. – Le lemme 4.13 donne l'existence d'un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal V/K de H/K contenant W/K. Soit $U = N_H(W)$. D'après le corollaire 4.15, U est localement clos. Par maximalité de W/K dans A/K, on a $V/K \cap A/K = W/K$ et V/K normalise W/K.

Montrons qu'il existe un sous-groupe de Carter C/W de U/W tel que $V/K = (C/K)_{\mathfrak{F}n}$. Soit $N/W = N_{U/W}(V/W)$. Comme $[V,N]$ est contenu dans $V \cap H' \leq V \cap A = W$, N/W centralise V/W. Donc $N/W = C_{U/W}(V/W)$ est un $\mathcal{D}loc$-groupe (fait 1.14). D'après le fait 3.14, N/W possède un sous-groupe de Carter C/W. V/W étant central dans N/W, V/W est contenu dans C/W. On en déduit que V/K est un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal et normal de C/K. En particulier, on obtient $V/K = (C/K)_{\mathfrak{F}n}$ et V/W est normal dans $N_{U/W}(C/W)$. Ainsi, on a $N_{U/W}(C/W) = N_{N/W}(C/W) = C/W$ et C/W est un sous-groupe de Carter de U/W.

Il reste à montrer la conjugaison des $\mathfrak{F}$-sous-groupes maximaux de H/K contenant W/K. Soient V_1/K et V_2/K deux tels sous-groupes. Ce qui précède dit qu'il existe deux sous-groupes de Carter C_1/W et C_2/W de U/W tels que $V_1/K = (C_1/K)_{\mathfrak{F}n}$ et $V_2/K = (C_2/K)_{\mathfrak{F}n}$. La conjugaison des sous-groupes de Carter de U/W (fait 3.14) donne le résultat. □

Le lemme 4.17 et la proposition (2.12) p.541 de [3] sont analogues. Cependant, leur intérêt dans l'étude des injecteurs est très différent. En effet, le lemme 4.17 sert à prouver l'existence et la conjugaison des injecteurs alors que, dans [3], la proposition (2.12) est une conséquence de l'existence et de la conjugaison des injecteurs.

Lemme 4.17. – *Soit $(A_i/K)_{i=0,\dots,n}$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite finie croissante de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de H/K telle que $A_0 = K$, $A_n = H$ et, pour tout $i = 0, ..., n-1$, A_i/K soit normal dans A_{i+1}/K et A_{i+1}/A_i soit abélien. On suppose qu'il existe un sous-groupe V/K de H/K tel que $V/K \cap A_i/K$ soit un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de A_i/K pour tout $i = 0, ..., n$. Alors V/K est un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K.*

Preuve. – Par induction sur n. On peut supposer $n \geq 1$. Par hypothèse d'induction, $V/K \cap A_i/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_i/K pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$. Si B/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de A_{n-1}/K, alors $V/K \cap (B/K \cap A_i/K)$ est un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de $B/K \cap A_i/K$ pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$. Par hypothèse d'induction, $V/K \cap B/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de B/K.

Supposons que V/K ne soit pas un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K. Alors il existe un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal L/K de H/K tel que $V/K \cap L/K$ ne soit pas un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de L/K. On choisit H/L de classe de résolubilité minimale $k (\geq 1)$. Soit $M = H^{(k-1)}L$. Par minimalité de k, $V/K \cap M/K$ est un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de M/K. Comme $(M/K)'$ est un sous-groupe normal de A_{n-1}/K, $V/K \cap (M/K)'$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de $(M/K)'$. Mais on a $(L/K)' \leq (M/K)' \leq L/K$, donc le lemme 4.13 dit que $V/K \cap L/K$ est contenu dans un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal V_1/K de L/K. Aussi V_1/K est contenu dans un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal V_2/K de M/K (lemme 4.13). Alors $V/K \cap M/K$ et V_2/K sont deux $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximaux de M/K qui contiennent $V/K \cap (M/K)'$. Le lemme 4.16 dit qu'il existe $g \in M$ tel que $(V \cap M)^g = V_2$. L/K étant normal dans H/K, on obtient $(V \cap L)^g = V_2 \cap L = V_1$. Mais, d'après le choix de L/K, on a $V/K \cap L/K < V_1/K$, et V_1^g/K est un $\mathfrak{F}$-sous-groupe de L/K contenant strictement V_1/K. Ceci contredit la maximalité de V_1/K dans L/K. On en déduit que V/K est un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K. □

Corollaire 4.18. – *Soit A/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe sous-normal de H/K. Si H/K possède un $\mathfrak{F}$-injecteur V/K, alors $A/K \cap V/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A/K.*

Preuve. – Il suffit de montrer le résultat lorsque A/K est normal dans H/K. Comme $V/K \cap (A/K)^{(k)}$ est un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de $(A/K)^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, le lemme 4.17 donne le résultat. □

Corollaire 4.19. – *Soit L/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K. Si L/K contient un $\mathfrak{F}$-injecteur V/K de H/K, alors V/K est un $\mathfrak{F}$-injecteur de L/K.*

Preuve. – Par induction sur la classe de résolubilité de H/K. $V/K \cap (H/K)'$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de $(H/K)'$ d'après le corollaire 4.18. Par hypothèse d'induction, $V/K \cap (H/K)'$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de $L/K \cap (H/K)'$. On en déduit que $V/K \cap (L/K)^{(k)}$ est un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de $(L/K)^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le lemme 4.17 finit la preuve. □

Théorème 4.20. – *H/K possède une unique classe de conjugaison de $\mathfrak{F}$-injecteurs.*

Preuve. – Par induction sur la classe de résolubilité de H/K. Montrons que H/K possède un $\mathfrak{F}$-injecteur. Par hypothèse d'induction, $(H/K)'$ possède un $\mathfrak{F}$-injecteur W/K. Le lemme 4.13 dit que W/K est contenu dans un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal V/K de H/K. Comme $V/K \cap (H/K)^{(k)} = W/K \cap (H/K)^{(k)}$ est un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de $(H/K)^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le lemme 4.17 montre que V/K est un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K.

Soient V_1/K et V_2/K deux $\mathfrak{F}$-injecteurs de H/K. Montrons que V_1/K et V_2/K sont conjugués. $V_1/K \cap (H/K)'$ et $V_2/K \cap (H/K)'$ sont des $\mathfrak{F}$-injecteurs de $(H/K)'$ (corollaire 4.18). Par hypothèse d'induction, on peut supposer $V_1/K \cap (H/K)' = V_2/K \cap (H/K)'$. Le lemme 4.16 permet de conclure. $\square$

Corollaire 4.21. – *Si M/L est une section H/K-d_{loc}-minimale de H, alors tout $\mathfrak{F}$-injecteur V/K de H/K couvre ou évite M/L.*

Preuve. – $V/K \cap M/K$ étant un $\mathfrak{F}$-injecteur de M/K (corollaire 4.18), le théorème 4.20 et l'argument de Frattini donnent $H = MN_H(V \cap M)$. Ainsi, $(V \cap M)L/L$ est une section localement close et normale de H, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 4.22. – *Soient V/K un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K, U/K un $\mathfrak{F}$-sous-groupe de H/K et $\mathcal{A} = (A_i/K)_{i\leq\alpha}$ (α ordinal) une série ascendante de H/K telle que A_{i+1}/A_i soit H/K-d_{loc}-minimal pour tout $i < \alpha$. Si U/K couvre chaque facteur de la série $\mathcal{A}$ couvert par V/K, alors U/K est un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K.*

Preuve. – Supposons le contraire. Alors il existe un plus petit ordinal μ tel que $U/K \cap A_\mu/K$ ne soit pas un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_μ/K. Le corollaire 4.18 dit que $V/K \cap A_\mu/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_μ/K. Supposons μ ordinal limite. Alors il existe un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal L/K de A_μ/K tel que $U/K \cap L/K$ ne soit pas un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de L/K. Soit U_1/K un $\mathfrak{F}$-sous-groupe de L/K contenant strictement $U/K \cap L/K$. Alors il existe un ordinal $i < \mu$ avec $U/K \cap A_i/K < U_1/K \cap A_i/K$, ce qui contredit la minimalité de μ. Ainsi, il existe un ordinal ν tel que $\mu = \nu + 1$, et $U/K \cap A_\nu/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_ν/K par minimalité de μ. Aussi, $V/K \cap A_\nu/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_ν/K (corollaire 4.18). Donc le théorème 4.20 permet de supposer $V/K \cap A_\nu/K = U/K \cap A_\nu/K$. Comme $U/K \cap A_\mu/K$ n'est pas un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_μ/K, contrairement à $V/K \cap A_\mu/K$, V n'évite pas A_μ/A_ν. Le corollaire 4.21 dit que V couvre A_μ/A_ν, et U aussi par hypothèse. On en déduit que $U/K \cap A_\mu/K$ est un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de A_μ/K. Le lemme 4.16 donne la conjugaison de U/K et de V/K, ce qui est contradictoire. $\square$

5 Les $L\mathcal{N}$-injecteurs et les $\mathcal{N}$-injecteurs

On a montré précédemment que $L\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}$ sont des ensembles de Fitting de H/K (remarque 4.5). Nous allons caractériser les $L\mathcal{N}$-injecteurs et les $\mathcal{N}$-injecteurs de H/K (théorème 5.2 et corollaire 5.3). Ces résultats sont analogues à un théorème de Fischer [4] pour les groupes finis résolubles (une preuve est donnée dans [3], p.623-624). On peut noter que la preuve du théorème 5.2 est très proche de celle des groupes finis.

Lemme 5.1. – *Tout sous-groupe localement nilpotent de $H^\circ K/K$ est nilpotent.*

Preuve. – Soit U/K un sous-groupe localement nilpotent de $H^\circ K/K$. Alors, pour tout $\overline{u} \in U/K$, $E_{U/K}(\overline{u}) = U/K$. Le fait 2.6 dit que U/K est nilpotent. $\square$

Théorème 5.2. – *Les $L\mathcal{N}$-injecteurs de H/K sont exactement les sous-groupes localement nilpotents maximaux de H/K qui contiennent $F(H/K)$.*

Preuve. – Soit $F/K = F(H/K)$. Comme la proposition 3.11 dit que F/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe nilpotent et normal de H/K, tout $L\mathcal{N}$-injecteur de H/K contient F/K. Comme H/K possède un $L\mathcal{N}$-injecteur d'après le théorème 4.20, il suffit de montrer que les sous-groupes localement nilpotents maximaux de H/K contenant F/K sont conjugués.

Soit V/K un tel sous-groupe. Comme $(H^\circ K/K)'$ est nilpotent (fait 1.4), $(H^\circ K/K)'$ est contenu dans F/K. Alors $V/K \cap H^\circ K/K$ est un $L\mathcal{N}$-sous-groupe de $H^\circ K/K$ contenant $(H^\circ K/K)'$, et $V/K \cap H^\circ K/K$ est normal dans $H^\circ K/K$. Mais $V/K \cap H^\circ K/K$ est nilpotent d'après le lemme 5.1, donc $V/K \cap H^\circ K/K$ est contenu dans $F(H^\circ K/K) \leq F/K$, ce qui prouve $V/K \cap H^\circ K/K = F(H^\circ K/K)$. On en déduit que V/F est fini et que l'ordre de V/F divise celui de H/H°. En particulier, V/K est un $\mathcal{D}loc$-groupe et $F^+ = V^+$. Aussi, on peut supposer que l'ensemble $\mathcal{P}_0$ des entiers premiers qui divisent l'ordre de H/H° est non vide.

Pour tout $p \in \mathcal{P}$, on note $T_{p'}/K$ le p'-sous-groupe de Hall de F/K, R_p/K le p-sous-groupe de Sylow de F/K et $C_{p'}/K = C_{H/K}(F^+T_{p'}/K)$. Le fait 1.14 montre que, pour tout $p \in \mathcal{P}$, $C_{p'}$ est localement clos.

(1) Pour tout couple (p, q) d'entiers premiers distincts, $C_{q'}/K$ normalise chaque p-sous-groupe de Sylow de $C_{p'}/K$.

Soit S_p/K un p-sous-groupe de Sylow de $C_{p'}/K$. Comme le fait 3.2 donne $F/K = F^+K/K * T_{p'}/K * R_p/K$, on a $C_{p'}/K \cap C_{q'}/K \leq C_{H/K}(F/K)$. Alors le fait 3.10 donne

$$[S_p/K, C_{q'}/K] \leq [C_{p'}/K, C_{q'}/K] \leq C_{p'}/K \cap C_{q'}/K \leq C_{H/K}(F/K) \leq F/K$$

On en déduit que $C_{q'}/K$ normalise S_pF/K. Mais on a $S_pF/K = S_p/K * (F^+K/K * T_{p'}/K)$, et S_p/K est l'unique p-sous-groupe de Sylow de S_pF/K. Ceci prouve que $C_{q'}/K$ normalise S_p/K.

(2) Si V/K est un sous-groupe localement nilpotent maximal de H/K contenant F/K alors, pour tout $p \in \mathcal{P}$, le p-sous-groupe de Sylow V_p/K de V/K est un p-sous-groupe de Sylow de $C_{p'}/K$.

Comme $V^+ = F^+$, le fait 3.2 dit que V_p/K est contenu dans $C_{p'}/K$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, on choisit S_p/K un p-sous-groupe de Sylow de $C_{p'}/K$ qui contient V_p/K. Soit $q \in \mathcal{P}$. Alors, d'après *(1)*, S_q/K et S_p/K se normalisent pour tout $p \in \mathcal{P}$. Donc S_q/K centralise V_p/K pour tout $p \in \mathcal{P} \setminus \{q\}$. Comme $V^+ = F^+$, S_q/K centralise V^+K/K. Mais on a $V/K = V^+K/K * \langle V_p/K : p \in \mathcal{P}\rangle$ d'après le fait 3.2. Donc S_qV/K est localement nilpotent et V/K contient S_q/K par maximalité de V/K. On obtient $S_q = V_q$, ce qui prouve *(2)*.

(3) Conclusion.

Soient V_1/K et V_2/K deux sous-groupes localement nilpotents maximaux de H/K contenant F/K. D'après *(2)*, pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $S_{p,1}/K$ et $S_{p,2}/K$ des p-sous-groupes de Sylow de $C_{p'}/K$ tels que $S_{p,1}/K$ et $S_{p,2}/K$ soient les p-sous-groupes de Sylow de V_1/K et V_2/K respectivement. Le fait 1.20 dit que, pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $\overline{x}(p) \in C_{p'}/K$ tel que $(S_{p,1}/K)^{\overline{x}(p)} = S_{p,2}/K$. Soient $p_1, p_2, ..., p_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) les éléments de $\mathcal{P}_0$. Notons $\overline{x} = \Pi_{i=1,...,n}\overline{x}(p_i)$. Alors *(1)* montre que, pour tout $p \in \mathcal{P}_0$, on a $(S_{p,1}/K)^{\overline{x}} = S_{p,2}/K$. En appliquant le fait 1.23 à V_1/K et V_2/K, on obtient $V_1/K = F/K\langle S_{p,1}/K : p \in \mathcal{P}_0\rangle$ et $V_2/K = F/K\langle S_{p,2}/K : p \in \mathcal{P}_0\rangle$, ce qui donne $(V_1/K)^{\overline{x}} = V_2/K$.
□

Corollaire 5.3. – *Les $\mathcal{N}$-injecteurs de H/K sont exactement les sous-groupes nilpotents maximaux de H/K qui contiennent $F(H/K)$. De plus, si V/K est l'un d'eux, alors V/K est le sous-groupe de Fitting d'un $L\mathcal{N}$-injecteur de H/K.*

Preuve. – Montrons que tout sous-groupe nilpotent maximal U/K de H/K contenant $F(H/K)$ est le sous-groupe de Fitting d'un $L\mathcal{N}$-injecteur de H/K. U/K est contenu dans un sous-groupe localement nilpotent maximal L/K de H/K. Le théorème 5.2 dit que L/K est un $L\mathcal{N}$-injecteur de H/K. La proposition 4.11 donne $U/K = (L/K)_{\mathcal{N}n}$ et la remarque 4.5 montre que $U/K = F(L/K)$.

Soient V/K un $\mathcal{N}$-injecteur de H/K (l'existence de V/K est donnée par le théorème 4.20) et U/K un sous-groupe nilpotent maximal de H/K qui contient $F(H/K)$. On va montrer que U/K et V/K sont conjugués, ce qui prouvera le corollaire. Comme $F(H/K) \in \mathcal{N}$ par la proposition 3.11, V/K est un sous-groupe nilpotent maximal de H/K contenant $F(H/K)$. On déduit du paragraphe précédent qu'on a $U/K = F(L_1/K)$ et $V/K = F(L_2/K)$ pour des $L\mathcal{N}$-injecteurs L_1/K et L_2/K de H/K. Le théorème 4.20 donne la conjugaison de L_1/K et de L_2/K, ce qui permet de conclure.
□

6 Ensembles de Fitting forts

Nous introduisons la notion d'*ensemble de Fitting fort* d'un $\mathcal{D}loc$-groupe. Cette notion est liée à celle de "sous-groupe ascendant". Etant donné que les groupes étudiés sont, en général, infinis, les ensemble de Fitting forts semblent être l'analogue naturel des ensembles de Fitting pour des groupes finis.

Le résultat principal de cette section dit que, si $\mathfrak{F}$ est un ensemble de Fitting fort H/K, si A/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe ascendant de H/K et si V/K est un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K, alors $V/K \cap A/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K (théorème 6.11).

Notation 6.1 – *Soient $\mathfrak{X}$ une classe de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de H/K et A/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K. On note*

$(A/K)_{\mathfrak{X}} = d_{loc}(U : U/K$ est un $\mathfrak{X}$-sous-groupe ascendant de $H/K)/K$.

Définition 6.2. – *Soit $\mathfrak{X}$ un ensemble non vide de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de H/K. $\mathfrak{X}$ est un* ensemble de Fitting fort *de H/K si :*

($FF1$) *tout $\mathcal{D}loc$-sous-groupe ascendant d'un $\mathfrak{X}$-groupe est un $\mathfrak{X}$-groupe ;*

($FF2$) *si A/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K, alors $(A/K)_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$;*

($FF3$) *tout H/K-conjugué d'un $\mathfrak{X}$-groupe est un $\mathfrak{X}$-groupe.*

Remarque 6.3. – Un ensemble de Fitting fort de H/K est, en particulier, un ensemble de Fitting de H/K.

On montrera que $L\mathcal{N}$ est un ensemble de Fitting fort de H/K (lemme 6.6). Aussi, le corollaire 6.8 montre que, pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, l'ensemble des $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de H/K qui sont des π-groupes est un ensemble de Fitting fort de H/K. D'autre part, $\mathcal{N}$ est un ensemble de Fitting de H/K qui n'est pas nécessairement un ensemble de Fitting fort :

Exemple 6.4. – *Soit i une involution agissant par inversion sur $\mathbb{C}^*$. On suppose $H = \mathbb{C}^* \rtimes \langle i \rangle$ et $K = 1$. Alors $\mathcal{N}$ n'est pas un ensemble de Fitting fort de H/K.*

Fait 6.5. – **([12], 12.1.4 p.344)** *Pour tout groupe G, $HP(G)$ contient tous les sous-groupes localement nilpotents et ascendants de G.*

Nous en déduisons que $L\mathcal{N}$ est un ensemble de Fitting fort :

Lemme 6.6. – *On a $HP(H/K) = (H/K)_{L\mathcal{N}}$, en particulier $L\mathcal{N}$ est un ensemble de Fitting fort de H/K.*

Preuve. – Comme $HP(H/K)$ est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe localement nilpotent normal de H/K (lemme 3.5), $HP(H/K)$ est contenu dans $(H/K)_{L\mathcal{N}}$. Mais, d'après le fait 6.5, $(H/K)_{L\mathcal{N}}$ est contenu dans $d_{loc}(HP(H/K)) = HP(H/K)$. Donc on a bien $HP(H/K) = (H/K)_{L\mathcal{N}}$. En particulier, $L\mathcal{N}$ vérifie ($FF2$). Comme $L\mathcal{N}$ vérifie les conditions ($FF1$) et ($FF3$), la preuve est finie. $\square$

Proposition 6.7. – *Soit $\mathfrak{X}$ une classe de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de H/K. On suppose que $\mathfrak{X}$ vérifie les conditions suivantes :*

($F21$) *le produit de deux $\mathfrak{X}$-groupes qui se normalisent est un $\mathfrak{X}$-groupe ;*

($F22$) *si un sous-groupe A/K de H/K s'écrit comme une réunion croissante de $\mathfrak{X}$-sous-groupes ascendants de A/K, alors A/K est un $\mathfrak{X}$-groupe.*

Alors, si A/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de H/K, tout $\mathfrak{X}$-sous-groupe ascendant de A/K est contenu dans $(A/K)_{\mathfrak{X}n}$. En particulier, $(A/K)_{\mathfrak{X}} = (A/K)_{\mathfrak{X}n}$ et $\mathfrak{X}$ vérifie ($FF2$).

Preuve. – Pour tout $\mathcal{D}loc$-sous-groupe U/K de H/K et tout $\mathcal{D}loc$-sous-groupe ascendant V/K de U/K, on note $\alpha_{U/K}(V/K)$ le plus petit ordinal tel que V/K soit un sous-groupe $\alpha_{U/K}(V/K)$-d_{loc}-ascendant de U/K (un tel ordinal existe d'après le lemme 2.3). Supposons la proposition fausse. Alors il existe un plus petit ordinal α tel qu'il existe un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe A/K de H/K et B/K un $\mathfrak{X}$-sous-groupe ascendant de A/K, avec $B/K \nleq (A/K)_{\mathfrak{X}n}$ et $\alpha_{A/K}(B/K) = \alpha$. On a nécessairement, $\alpha > 2$. Soit $(B_i/K)_{i\leq\alpha}$ un série d_{loc}-ascendante de A/K avec $B_\delta = B$ pour $\delta < \alpha$. Pour tout ordinal $i \leq \alpha$, on note $C_i/K = (B_i/K)_{\mathfrak{X}n}$. (*F21*) et (*F22*) montrent que C_i/K est un $\mathfrak{X}$-groupe pour tout $i \leq \alpha$.

Montrons que $(C_i/K)_{i<\alpha}$ est une suite croissante et que $C/K = \bigcup_{i<\alpha} C_i/K$ est un $\mathfrak{X}$-groupe. D'après le choix de α, B est contenu dans C_i pour tout $i < \alpha$. Soit $\beta < \alpha$ un ordinal non nul et j un ordinal avec $\beta \leq j < \alpha$. On note $C_0^* = K$ et, pour tout ordinal i, $C_i^* = C_\beta$ si $0 < i < \beta$ et $C_i^* = B_i$ sinon. Comme C_β est normal dans B_β, $(C_i^*/K)_{i\leq j}$ est une série d_{loc}-ascendante de B_j/K et on obtient $\alpha_{B_j/K}(C_\beta/K) \leq j < \alpha$. Ainsi, par le choix de α, C_β/K est contenu dans C_j/K, et $(C_i/K)_{i<\alpha}$ est une suite croissante. En particulier C/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe de A/K. Mais, pour tout $i < \alpha$, C_i/K est un $\mathfrak{X}$-sous-groupe normal de B_i/K et B_i/K est ascendant dans A/K. Donc C_i/K est ascendant dans A/K. Alors (*F22*) dit que C/K est un $\mathfrak{X}$-groupe.

Montrons que α est un ordinal limite. Si il existe un ordinal ν tel que $\alpha = \nu + 1$, alors A/K normalise B_ν/K, et A/K normalise C_ν/K. Mais C_ν/K est un $\mathfrak{X}$-groupe. Donc on a $B/K \leq C_\nu/K \leq (A/K)_{\mathfrak{X}n}$, ce qui est contradictoire. On en déduit que α est un ordinal limite, et $A/K = \bigcup_{i<\alpha} B_i/K$.

Montrons que C/K est contenu dans $(A/K)_{\mathfrak{X}n}$. Soient $a \in A$ et $c \in C$. Alors il existe un ordinal $j < \alpha$ avec $a \in B_j$ et $c \in C_j$, donc $[a, c] \in C_j \leq C$. Ceci prouve que C/K est normal dans A/K. Comme C/K est un $\mathfrak{X}$-groupe, on obtient $C/K \leq (A/K)_{\mathfrak{X}n}$. B/K étant contenu dans C/K, on arrive à une contradiction. □

Corollaire 6.8. – *Pour tout $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$, l'ensemble des $\mathcal{D}loc$-groupes qui sont des π-sous-groupes de H/K est un ensemble de Fitting fort de H/K.*

Preuve. – Cet ensemble vérifie les conditions (*FF1*), (*F22*) et (*FF3*). De plus, le fait 1.19 montre qu'il vérifie (*F21*), et la proposition 6.7 permet de conclure. □

Remarque 6.9. – On suppose que $\mathfrak{F}$ est un ensemble de Fitting fort de H/K. Si H/K est localement nilpotent, $(H/K)_{\mathfrak{F}}$ contient tous les $\mathfrak{F}$-sous-groupes de H/K (fait 3.3), et c'est donc l'unique $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de H/K. C'est aussi l'unique $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K.

Le lemme suivant est analogue au lemme 4.17 :

Lemme 6.10. – *On suppose que $\mathfrak{F}$ est un ensemble de Fitting fort de H/K. Soient V/K un $\mathfrak{F}$-sous-groupe de H/K et $(A_i/K)_{i\leq\alpha}$ (α ordinal) une série d_{loc}-ascendante de H/K avec A_{i+1}/A_i abélien pour tout $i < \alpha$. Si $V/K \cap A_i/K$ est un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de A_i/K pour tout $i \leq \alpha$, alors V/K est un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K.*

Preuve. – Supposons le contraire. Alors il existe un plus petit ordinal $\beta \leq \alpha$ tel que $V/K \cap A_\beta/K$ ne soit pas un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_β/K. On peut supposer $\alpha = \beta$ et $H/K = A_\beta/K$. Supposons qu'il existe un ordinal ν tel que $\beta = \nu + 1$. Soit U/K un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K (U/K existe d'après le théorème 4.20). Le corollaire 4.18 dit que $U/K \cap A_\nu/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_ν/K. Le théorème 4.20 dit que $U/K \cap A_\nu/K$ et $V/K \cap A_\nu/K$ sont conjugués. On peut donc supposer $U/K \cap A_\nu/K = V/K \cap A_\nu/K$. Le lemme 4.16 donne la conjugaison de U/K et de V/K, ce qui est contradictoire. Ceci montre que β est un ordinal limite.

Il existe un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal L/K de H/K tel que $V/K \cap L/K$ soit strictement contenu dans un $\mathfrak{F}$-sous-groupe V_1/K de L/K. Alors il existe $i < \alpha$ tel que $V_1/K \cap A_i/K$ contienne strictement $V/K \cap A_i/K \cap L/K$. Par (*FF1*), $V_1/K \cap A_i/K$ est un $\mathfrak{F}$-groupe. Comme $V/K \cap A_i/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_i/K, il y a une contradiction. □

Théorème 6.11. – *On suppose que $\mathfrak{F}$ est un ensemble de Fitting fort de H/K. Si V/K est $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K et si A/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe ascendant de H/K, alors $V/K \cap A/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A/K.*

Preuve. – Soient U/K un $\mathfrak{F}$-injecteur de A/K et $(A_i/K)_{i\leq\alpha}$ une série d_{loc}-ascendante de H/K avec $A_\delta = A$ pour un ordinal $\delta \leq \alpha$ (une telle suite existe d'après le lemme 2.3). Le fait 1.13 permet de supposer que, pour tout $i < \alpha$, A_{i+1}/A_i est abélien. On construit une suite croissante

$(U_i/K)_{i\leq\alpha}$ de $\mathcal{D}loc$-sous-groupes de H/K de la façon suivante : $U_0 = U$; pour tout $i < \alpha$, U_{i+1}/K est un $\mathfrak{F}$-sous-groupe maximal de A_{i+1}/K contenant U_i/K (U_{i+1}/K existe d'après le lemme 4.13) ; pour tout $i \leq \alpha$ ordinal limite, $U_i = \bigcup_{j<i} U_j$. Le lemme 6.10 dit que U_i/K est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_i/K pour tout $i \leq \alpha$.

On va montrer que $V/K \cap A/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A/K. Supposons le contraire. Alors il existe un plus petit ordinal β tel que A_β/K possède un $\mathfrak{F}$-injecteur V_0/K tel que $V_0/K \cap A/K$ ne soit pas un $\mathfrak{F}$-injecteur de A/K. On a $\beta > \delta$. Supposons qu'il existe un ordinal β_0 avec $\beta = \beta_0 + 1$. Le corollaire 4.18 dit que $V_0/K \cap A_{\beta_0}/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_{β_0}/K. Alors $(V_0/K \cap A_{\beta_0}/K) \cap A/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A/K par minimalité de β, ce qui est contradictoire. Ainsi, β est un ordinal limite.

Ce qui précède montre que U_β/K est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_β/K, et le théorème 4.20 dit qu'il existe $a \in A_\beta$ tel que $V_0 = U_\beta^a$. β étant un ordinal limite, il existe un ordinal $\gamma < \beta$ avec $a \in A_\gamma$. On en déduit que U_γ^a/K est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A_γ/K contenu dans V_0/K. Par minimalité de β, $U_\gamma^a/K \cap A/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A/K. Comme $V_0/K \cap A/K$ est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe ascendant de V_0/K, (*FF1*) dit que $V_0/K \cap A/K$ est un $\mathfrak{F}$-sous-groupe de A/K contenant $U_\gamma^a/K \cap A/K$. On obtient $V_0/K \cap A/K = U_\gamma^a/K \cap A/K$. Cette contradiction finit la preuve. □

Corollaire 6.12. – *Soient $\pi \subseteq \mathcal{P}^+$ et R/K un π-sous-groupe de Hall de H/K. Si A/K est un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe ascendant de H/K, alors $R/K \cap A/K$ est un π-sous-groupe de Hall de A/K.*

7 Ensembles de Fitting quotients

Dans les groupes finis, l'un des avantages que l'on a à travailler dans ensembles de Fitting plutôt que dans les classes de Fitting est que l'on peut donner des informations sur les groupes quotients, comme en témoignent les propositions (2.15) et (2.17) de [3]. Les propositions 7.1 et 7.2 sont des analogues de ces résultats. La preuve du second résultat nécessite la plupart des résultats sur les sous-groupes sous-normaux et ascendants que nous avons établit dans la section 2.

Proposition 7.1. – *Soient N/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K et $\mathfrak{F}_{H/N} = \{SN/N : S/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de $SN/K\}$, alors :*
(*i*) *$\mathfrak{F}_{H/N}$ est un ensemble de Fitting de H/N ;*
(*ii*) *si $\mathfrak{F}$ est un ensemble de Fitting fort, $\mathfrak{F}_{H/N}$ aussi ;*
(*iii*) *si V/K un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K, alors VN/N est un $\mathfrak{F}_{H/N}$-injecteur de H/N.*

Preuve. – D'après le théorème 4.20, N/K possède un $\mathfrak{F}$-injecteur, donc $\mathfrak{F}_{H/N}$ n'est pas vide. Montrons que $\mathfrak{F}_{H/N}$ satisfait (*F1*) et que, si $\mathfrak{F}$ est un ensemble de Fitting fort, $\mathfrak{F}_{H/N}$ satisfait (*FF1*). Soient $SN/N \in \mathfrak{F}_{H/N}$ où S/K est un $\mathfrak{F}$-injecteur de SN/K et A/N un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal (resp. ascendant) de SN/N. Le corollaire 4.18 (resp. le théorème 6.11) dit que $(S \cap A)/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de $A/K = (S \cap A)N/K$, et A/N est un $\mathfrak{F}_{H/N}$-groupe. Ainsi $\mathfrak{F}_{H/N}$ satisfait (*F1*) (resp. (*FF1*)).

Montrons que $\mathfrak{F}_{H/N}$ satisfait (*F2*) et que, si $\mathfrak{F}$ est un ensemble de Fitting fort, $\mathfrak{F}_{H/N}$ satisfait (*FF2*). Soient $(S_iN/N)_{i\in I}$ la famille des $\mathfrak{F}_{H/N}$-sous-groupes normaux (resp. ascendants) d'un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe A/N de H/N avec S_i/K $\mathfrak{F}$-injecteur de S_iN/K pour tout $i \in I$. Soit $T/N = (A/N)_{\mathfrak{F}n}$ (resp. $T/N = (A/N)_{\mathfrak{F}}$) et W/K un $\mathfrak{F}$-injecteur de T/K. Alors, pour tout $i \in I$, $R_i/K = (W \cap S_iN)/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de S_iN/K d'après le corollaire 4.18 (resp. théorème 6.11). On en déduit que R_i et S_i sont conjugués dans S_iN (théorème 4.20), et $R_iN = S_iN$. On obtient

$$T = d_{loc}(S_iN : i \in N) = d_{loc}(R_i : i \in I)N \leq WN \leq T$$

On a prouvé que $T/N = WN/N$ est un $\mathfrak{F}_{H/N}$-groupe et que $\mathfrak{F}_{H/N}$ satisfait (*F2*) (resp. (*FF2*)).

Comme $\mathfrak{F}_{H/N}$ satisfait (*F3*), il reste à montrer (*iii*). Soit A/N un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/N. Alors $(V \cap A)/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A/K d'après le corollaire 4.18, et $(V \cap A)/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de $(V \cap A)N/K$ d'après le corollaire 4.19. En conséquence, $(V \cap A)N/N$ est un $\mathfrak{F}_{H/N}$-groupe. Soit SN/N un $\mathfrak{F}_{H/N}$-groupe de A/N contenant $(V \cap A)N/N$ et tel que S/K soit un $\mathfrak{F}$-injecteur de SN/K. Comme $(V \cap A)/K$ est un $\mathfrak{F}$-injecteur de A/K, $(V \cap A)/K$ est un

$\mathfrak{F}$-injecteur de SN/K (corollaire 4.19). On en déduit que $V \cap A$ et S sont conjugués dans SN et $(V \cap A)N/N = SN/N$. Ceci prouve que $(V \cap A)N/N$ est un $\mathfrak{F}_{H/N}$-sous-groupe maximal de A/N, et VN/N est un $\mathfrak{F}_{H/N}$-injecteur de H/N. $\square$

Proposition 7.2. – *Soient N/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K, $\mathfrak{X}$ un ensemble de Fitting de H/N,*

$$\mathfrak{X}_{sn} = \{S/K \in \mathcal{D}loc : S/K \text{ est sous-normal dans } SN/K \text{ et } SN/N \in \mathfrak{X}\} \text{ et}$$

$$\mathfrak{X}_{as} = \{S/K \in \mathcal{D}loc : S/K \text{ est ascendant dans } SN/K \text{ et } SN/N \in \mathfrak{X}\}, \text{ alors :}$$

(i) $\mathfrak{X}_{sn}$ et $\mathfrak{X}_{as}$ sont des ensembles de Fitting de H/K ;
(ii) si $\mathfrak{X}$ est un ensemble de Fitting fort, $\mathfrak{X}_{as}$ aussi ;
(iii) si V/N est un $\mathfrak{X}$-injecteur de H/N, alors V/K est à la fois un $\mathfrak{X}_{sn}$-injecteur de H/K et un $\mathfrak{X}_{as}$-injecteur de H/K.

Preuve. – On a $N/K \in \mathfrak{X}_{sn} \subseteq \mathfrak{X}_{as}$, donc $\mathfrak{X}_{sn}$ et $\mathfrak{X}_{as}$ ne sont pas vide. Montrons que $\mathfrak{X}_{sn}$ satisfait (*F1*) et que $\mathfrak{X}_{as}$ satisfait (*FF1*). Soit A/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal (resp. ascendant) d'un $\mathfrak{X}_{sn}$-sous-groupe (resp. d'un $\mathfrak{X}_{as}$-sous-groupe) S/K de H/K. Alors AN/N est normal (resp. ascendant) dans SN/N et AN/N est un $\mathfrak{X}$-groupe. Comme A/K est sous-normal (resp. ascendant) dans SN/K, A/K est sous-normal (resp. ascendant) dans AN/K et A/K est un $\mathfrak{X}_{sn}$-groupe (resp. un $\mathfrak{X}_{as}$-groupe). Donc $\mathfrak{X}_{sn}$ satisfait (*F1*) et $\mathfrak{X}_{as}$ satisfait (*FF1*).

Montrons (i). Comme $\mathfrak{X}_{sn}$ et $\mathfrak{X}_{as}$ satisfont (*F1*) et (*F3*), il faut montrer que $\mathfrak{X}_{sn}$ et $\mathfrak{X}_{as}$ satisfont (*F2*). Soient $(R_i/K)_{i\in I}$ la famille des $\mathfrak{X}_{sn}$-sous-groupes normaux (resp. des $\mathfrak{X}_{as}$-sous-groupes normaux) d'un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe U/K de H/K et $T/K = \langle R_i/K : i \in I\rangle$. Comme R_iN/N est un $\mathfrak{X}$-groupe pour tout $i \in I$, TN/N est aussi un $\mathfrak{X}$-groupe. On peut supposer I ordinal. On note $A_0 = R_0$; pour tout $i \in I$, $A_{i+1} = R_{i+1}A_i$ et, si $i \in I$ est un ordinal limite, $A_i = R_i \cup_{j<i} A_j$. Alors on a $T = \cup_{i\in I} A_i$. Le fait 2.10 et le corollaire 2.8 (resp. les lemmes 2.11 et 2.9) montrent que T/K est sous-normal (resp. ascendant) dans TN/K. On en déduit que T/K est un $\mathfrak{X}_{sn}$-groupe (resp. un $\mathfrak{X}_{as}$-groupe). Donc $\mathfrak{X}_{sn}$ et $\mathfrak{X}_{as}$ satisfont (*F2*).

Montrons (ii). Comme $\mathfrak{X}_{as}$ satisfait (*FF1*) et (*FF3*), il faut montrer que $\mathfrak{X}_{as}$ satisfait (*FF2*). Le lemme 2.9 montre qu'un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe A/K de H/K qui s'écrit comme une réunion croissante de $\mathfrak{X}_{as}$-sous-groupes ascendants de A/K est un $\mathfrak{X}_{as}$-groupe. Donc $\mathfrak{X}_{as}$ satisfait (*F22*). Comme $\mathfrak{X}_{as}$ satisfait (*F2*), $\mathfrak{X}_{as}$ satisfait aussi (*F21*), et la proposition 6.7 permet de finir la preuve de (ii).

Montrons (iii). Soit A/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K. Alors $(V \cap A)N/N$ est un $\mathfrak{X}$-sous-groupe (maximal) de AN/N et $(V \cap A)/K$ est normal dans $(V \cap A)N/K$. On en déduit $(V \cap A)/K \in \mathfrak{X}_{sn} \subseteq \mathfrak{X}_{as}$. Soit U/K un $\mathfrak{X}_{sn}$-sous-groupe (resp. un $\mathfrak{X}_{as}$-sous-groupe) de A/K contenant $(V \cap A)/K$. Alors UN/N est un $\mathfrak{X}$-sous-groupe de AN/N contenant $(V \cap A)N/N$. Par maximalité de $(V \cap A)N/N$ on obtient $UN = (V \cap A)N$ et $U = (V \cap A)(U \cap N)$. Comme V contient N et A contient U, on a $U = V \cap A$. Ainsi, $(V \cap A)/K$ est un $\mathfrak{X}_{sn}$-sous-groupe (resp. un $\mathfrak{X}_{as}$-sous-groupe) maximal de A/K, ce qui prouve (iii). $\square$

Corollaire 7.3. – *On utilise les notations des propositions 7.1 et 7.2. Si N/K un $\mathcal{D}loc$-sous-groupe normal de H/K et si V/K est un $\mathfrak{F}$-injecteur de H/K, alors VN/K est à la fois un $(\mathfrak{F}_{H/N})_{sn}$-injecteur de H/K et un $(\mathfrak{F}_{H/N})_{as}$-injecteur de H/K.*

8 Remerciements

Je remercie beaucoup Tuna Altınel pour les lectures critiques qu'il a fait de cet article.

References

[1] T. Altinel, G. Cherlin, L.-J. Corredor et A. Nesin. *A Hall theorem for ω-stable groups.* J. London Math. Soc. (2) 57 (1998), no. 2, 385-397.

[2] A. V. Borovik et A. Nesin. *Groups of finite Morley Rank.* Oxford Logic Guides, 26. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994. xviii+409 pp.

[3] K. Doerk et T. Hawkes. *Finite soluble groups.* de Gruyter Expositions in Mathematics, 4. Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1992. xiv+891 pp.

[4] B. Fischer. *Klasse konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbarer Gruppen.* Habilitationsschrift, Universität Frankfurt (M), 1966.

[5] B. Fischer, W. Gaschtz et B. Hartley. *Injektoren endlicher auflsbarer Gruppen.* Math. Z. 102 (1967), 337-339.

[6] O. Frécon. *Étude des groupes résolubles de rang de Morley fini.* Thèse de doctorat, Université Lyon 1, 2000.

[7] O. Frécon. *Projecteurs dans les groupes de rang de Morley fini résolubles.* Prépublication de l'Institut Girard Desargues.

[8] O. Frécon. *Propriétés locales et sous-groupes de Carter dans les groupes de rang de Morley fini.* Soumis pour publication.

[9] O. Frécon. *Sous-groupes de Hall généralisés dans les groupes de rang de Morley fini résolubles.* A paraître.

[10] A. Nesin. *Solvable groups of finite Morley rank.* J. Algebra 121 (1989), no. 1, 26-39.

[11] B. Poizat. *Groupes stables.* Nur Al-mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbanne, France, 1987.

[12] D. J. S. Robinson. *A course in the theory of groups.* Graduate Texts in Mathematics, 80. Springer-Verlag, New York, 1993. xviii+481 pp.

[13] B. I. Zil'ber. *Groups and rings whose theory is categorical.* (Russian) Fund. Math. 95 (1977), no. 3, 173-188.

[14] B. I. Zil'ber. *Groups with categorical theories (in Russian),* in Abstracts of Papers Presented at the Fourth All-Union Symposium on Group Theory, 1973. Math. Inst. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, (63-68)(In Russian).

[15] B. I. Zil'ber. *Some model theory of simple algebraic groups over algebraically closed fields.* Colloq. Math. 48 (1984), no. 2, 173-180.