L'axiome du choix

1 Introduction

Le *théorème de Krull*, dont l'énoncé est rappelé ci-dessous, figure au programme du cours. Sa démonstration est basée sur le *lemme de Zorn* qui est lui-même une conséquence de l'*axiome du choix*, ce qui n'est pas anodin et nécessite des explications, tant mathématiques qu'historiques.

L'axiome du choix sera ensuite mentionné plusieurs autres fois dans le cours en fin de semestre. Ce sera d'abord dans la partie *anneaux factoriels* lorsque nous parlerons des *systèmes représentatifs d'éléments irréductibles*, une notion est au programme mais indépendante du reste du cours. Ce sera ensuite lorsque nous démontrerons que *tout anneau principal est factoriel* : comme le théorème de Krull, le résultat est à connaître mais indépendant du reste du cours. Enfin, ce sera lorsque nous étudierons les *anneaux noethériens* en toute fin de cours. Précisons que ces deux derniers cas ne nécessiteront pas toute la force de l'axiome du choix, il s'agira d'applications directes d'une forme faible de l'axiome du choix : l'*axiome du choix dépendant* qui sera vu vers la fin de cette note.

Nous commençons en rappelant les énoncés et définitions utiles. Le premier énoncé nécessite de savoir ce qu'est un *idéal maximal* : *un idéal propre d'un anneau A est dit* maximal *s'il n'est contenu dans aucun autre idéal propre de A que lui-même.*

Théorème de Krull – *Dans tout anneau commutatif, chaque idéal propre est contenu dans un idéal maximal.*

Le deuxième énoncé nécessite de définir un *ensemble inductif* : *un* ensemble inductif *est un ensemble ordonné dans lequel chaque sous-ensemble totalement ordonné admet un majorant.*

Lemme de Zorn – *Tout ensemble inductif non vide admet au moins un élément maximal.*

Le dernier énoncé est celui justifiant cette note.

Axiome du choix – *Toute famille d'ensembles admet une fonction de choix.*

Ici on appelle *fonction de choix* sur une famille d'ensembles $\mathscr{A}$ une application $f : \mathscr{A} \setminus \{\emptyset\} \to \bigcup_{E \in \mathscr{A}} E$ telle que $f(E) \in E$ pour tout $E \in \mathscr{A} \setminus \{\emptyset\}$.

Dans cette note, nous allons évoquer deux variantes de l'axiome du choix :

— l'*axiome du choix dépendant* – seulement vers la fin de cette note – qui peut paraître quelque peu technique mais sera utile en fin de semestre ;

— l'*axiome du choix dénombrable* – régulièrement mentionné ci-dessous – qui est à peu près aussi ancien que l'axiome du choix et a une importance historique.

Axiome du choix *dénombrable* – *Toute famille* dénombrable *d'ensembles admet une fonction de choix.*

Nous en profitons pour rappeler qu'une *famille* est la donnée d'un ensemble I et d'un élément x_i pour chaque élément i de I (appelé *indice*). Ainsi, lorsque nous parlons de *familles*, nous restons dans le cadre de la théorie des ensembles. Les termes *ensemble* et *famille* ne doivent pas être confondus avec le terme *classe* qui, lui, sort du cadre de de la théorie des ensembles : par exemple, on peut parler de la *classe* des anneaux, mais pas de l'*ensemble* des anneaux, ni de la *famille* des anneaux.

Nous terminons cette introduction en donnant deux exemples d'applications de l'axiome du choix. L'un est une construction très naturelle qui utilise pourtant de façon cruciale l'axiome du choix, l'autre en est une conséquence particulièrement déroutante.

Exemple 1 : les ensembles de Vitali

Considérons le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ du groupe $(\mathbb{R}, +)$. Ses classes à gauche sont les ensembles de la forme $x + \mathbb{Q}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Aussi, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, si on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, alors $x - \lfloor x \rfloor \in x + \mathbb{Q}$ est un représentant de la classe $x + \mathbb{Q}$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. Choisissons alors, pour chaque classe à gauche de $\mathbb{R}$ modulo $\mathbb{Q}$, un représentant appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. On forme ainsi un ensemble V. Les ensembles construits de la sorte sont appelés *ensembles de Vitali*. Notre construction utilise l'axiome du choix : notre fonction de choix est l'application $f : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to \cup_{E \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}} E = \mathbb{R}$ qui, à toute classe à gauche $x + \mathbb{Q} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ associe son représentant choisi précédemment (celui appartenant à V).

On peut montrer que, pour que les ensembles de Vitali existent, ce qui parait très naturel, on ne peut pas se passer de l'axiome du choix, et même qu'aucune des deux variantes considérées dans cette note n'est suffisante [1].

Exemple 2 : le paradoxe de Banach-Tarski

Il s'agit d'un exemple célèbre de phénomène allant à l'encontre du sens commun. Il affirme que, grâce à l'axiome du choix, il est possible de découper une boule en 8 morceaux puis de réassembler ces morceaux de façon à obtenir deux boules identiques à la première.

Paradoxe de Banach-Tarski [2] (1924) – Soit B une boule de l'espace centrée en O. Il existe une partition $B \setminus \{O\} = B_1 \cup \cdots \cup B_8$ de $B \setminus \{O\}$ de telle sorte que $r_1(B_1) \cup \cdots \cup r_4(B_4)$ et $r_5(B_5) \cup \cdots \cup r_8(B_8)$ soient deux autres partitions de $B \setminus \{O\}$ où $r_1, \ldots, r_8$ désignent des rotations de centre O.

Notons que ce paradoxe ne comporte aucune contradiction logique. Il s'agit plutôt d'un théorème illustrant le fait que l'axiome du choix a des conséquences particulièrement surprenantes. Il a été démontré en 1924 par les mathématiciens polonais Stefan Banach (1892-1945) et Alfred Tarski (1901-1983).

2 Historique

2.1 Origines

Les premiers questionnements liés aux fonctions de choix ont lieu dans les années 1890, quand des mathématiciens de Turin décèlent des raisonnements suspects dans des écrits antérieurs [3]. L'un d'eux, Rodolfo Bettazzi (1861-1941), introduit une "loi de choix" dans une démonstration dès 1892, avant de dire explicitement en 1896, en faisant référence à des travaux datant de 1887 de Richard Dedekind [4], qu'il n'est pas rigoureux de choisir arbitrairement un élément dans chacun des ensembles d'une famille infinie d'ensembles, *à moins de l'admettre comme postulat.*

Le mathématicien allemand Ernst Zermelo (1871-1953) démontre en 1904 que *tout ensemble peut être bien ordonné* (c'est-à-dire muni d'un ordre tel que toute partie non vide admet un plus petit élément, *l'ensemble* $\mathbb{N}$ *est l'exemple typique d'un tel ensemble*) [5] ; ainsi il répond positivement à une question posée en 1883 par le mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918). Dans son article, il formule et utilise l'axiome du choix, il préconise de l'appliquer partout. Mais son résultat déconcerte car l'idée que $\mathbb{R}$ puisse être bien ordonné semble contre-intuitive.

1. En fait, les ensemble de Vitali ont la *propriété de Baire*, or le mathématicien israélien Saharon Shelah a démontré que, même avec l'axiome du choix dépendant, qui est plus fort que l'axiome du choix dénombrable, il n'est pas possible de construire un ensemble n'ayant pas cette propriété (voir Conclusion 7.17 de l'article https :// shelah.logic.at/files/95333/176.pdf qui fait suite à un travail du théoricien des ensembles américain Robert Martin Solovay).

2. https ://www.math.ucla.edu/~tao/preprints/Expository/banach-tarski.pdf.

3. Pierre Ageron, *L'autre axiome de choix.* Rev. Histoire Math. 8 (2002), no. 1, 113–140.

4. Jean Cassinet, *Rodolfo Bettazzi (1861–1941), précurseur oublié de l'axiome du choix.* Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 116 (1982), no. 1-2, 169–179 (1984).

5. Ernst Zermelo, *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.* Math. Ann. 59 (1904), no. 4, 514–516.

Il s'ensuit une vigoureuse opposition de la part de plusieurs grands mathématiciens qui contestent cet axiome, parmi eux les français Henri-Léon Lebesgue (1875-1941), René Baire (1874-1932) et Émile Borel (1871-1956)[6]. En réalité, entre 1872 et 1904, de nombreux travaux ont implicitement utilisé l'axiome du choix sans que cela ait choqué[7], et Lebesgue et Baire l'ont aussi utilisé sous sa forme *dénombrable*. En effet, l'axiome du choix dénombrable ne rencontre pas la même opposition et, par exemple, c'est le cas *non dénombrable* que récuse explicitement Émile Borel[8]. En revanche, le mathématicien français Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) "ne voi[t] pas de différence [...] entre le cas d'une infinité non dénombrable et celui d'une infinité dénombrable"[??]. Ces discussions auront des conséquences importantes pour la suite : l'axiome du choix dénombrables sera accepté de la grande majorité des mathématicien·nes, alors que l'axiome du choix n'est toujours pas admis de la même façon dans toutes les branches des mathématiques.

Signalons que l'axiome du choix a été illustré de façon humoristique en 1919 par le logicien et philosophe britannique Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) avec une anecdote pouvant aider à se le représenter : *si on a une infinité de paires de chaussures et qu'on veut choisir une chaussure de chaque paire, on peut le faire en prenant, par exemple, la chaussure gauche de chaque paire : l'obtention d'une fonction de choix se fait ici sans faire appel à l'axiome du choix. En revanche, si on a une infinité de paires de chaussettes, la seule façon de choisir une chaussette de chaque paire est de le faire arbitrairement : on a besoin de l'axiome du choix.*

2.2 Naissance des axiomes de la théorie des ensembles

Durant la même période où ont lieu les controverses sur l'axiome du choix, et même un peu avant, différents paradoxes sont mis en lumière, le plus célèbre étant dû à Bertrand Russell.

Paradoxe de Russell (1903) – *L'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même ?*

Ainsi, les mathématicien·nes se rendent compte qu'une théorie "naïve" des ensembles, basée sur une définition trop proche du sens commun, mène à des contradictions. Toutes ces discussions ayant trait à l'axiome du choix, ainsi que ces paradoxes, font émerger la nécessité de faire reposer la théorie des ensembles, et donc les mathématiques, sur des bases plus solides que celles existantes : ce qu'est un *ensemble au sens mathématique* doit être précisé.

Zermelo propose alors en 1908 un système de sept axiomes pour la théorie des ensembles. Ce système sera modifié et réécrit de façon plus formelle dans les années 1920 par le mathématicien allemand (puis israélien) Abraham Adolf Halevi Fraenkel (1891-1965), ainsi que le norvégien Thoralf Skolem (1887-1963), un pionnier de la *théorie des modèles*[9]. Leur axiomatisation est aujourd'hui celle qui est généralement admise : il s'agit du *système ZF*. Notons qu'en raison des controverses durant la période 1904-1908, le système ZF ne comporte pas l'axiome du choix (on écrit ZFC lorsqu'on lui ajoute l'axiome du choix), ni l'axiome du choix dénombrable. Il peut être utile de préciser que, d'après le 1^{er} axiome de ZF, dit *d'extensionnalité*, si deux ensembles ont les mêmes éléments, ils sont égaux. On peut donc toujours choisir un élément dans un ensemble non vide, ou même dans chaque ensemble d'une famille *finie* d'ensembles non vides : l'axiome du choix n'est utile qu'en présence d'une famille infinie d'ensembles.

2.3 Des fondations inébranlables ?

Il est naturel de se demander pourquoi avoir choisi de fonder les mathématiques sur ces axiomes et pas d'une autre façon, et aussi si on est sûr que le système ZF n'est pas sujet lui aussi à des contradictions. Si ces questions, et bien d'autres, sont entièrement naturelles, elles

6. Jacques Hadamard, *Cinq lettres sur la théorie des ensembles.* Bull. Soc. Math. France 33 (1905), 261–273.

7. Jean Cassinet, *L'axiome du choix avant l'article de E. Zermelo de 1904.* Séminaire de Philosophie et Mathématiques, 1981, fascicule 2, p. 1-19.

8. Émile Borel, *Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles.* Math. Ann. 60 (1905), no. 2, 194–195.

9. Branche de la logique mathématique consacrée à l'étude et la classification des structures.

relèvent en partie de la philosophie des mathématiques, or ce n'est pas l'objet de cette note. Nous pouvons cependant signaler que c'est peu à peu que le système ZF s'est imposé comme une sorte de norme acceptée de la grande majorité des mathématicien·nes. Plutôt que de définir les ensembles (mais est-ce possible ?), le système ZF fournit une liste d'axiomes naturels, qui formalisent les propriétés à partir desquelles se sont développées les mathématiques ; s'agissant de propriétés (quasiment) universellement admises, cette façon de procéder apparait comme susceptible d'être acceptée de tous et toutes, tout en empêchant les paradoxes tels que celui de Russell. L'idée est que, s'il était possible des définir les ensembles, il serait difficilement imaginable qu'ils ne vérifient pas ces axiomes. Cette méthode permet donc d'assoir les mathématiques sur des bases solides, tout en ne perdant rien de leur généralité.

Néanmoins, la méthode axiomatique a deux limites, comme l'a démontré le logicien autrichien (puis américain) Kurt Gödel (1906-1978) en 1931 avec ses célèbres *théorèmes d'incomplétude*. Le premier de ces théorèmes affirme, grosso modo, que, dès qu'une théorie mathématique est assez puissante, il y a des énoncés "indécidables" (des propositions qu'il est impossible de démontrer mais aussi de réfuter, qui ne sont ni justes ni fausses), ce qui met fin à l'espoir d'avoir une liste d'axiomes permettant de tout démontrer. Le second théorème dit qu'aucune théorie mathématiques ne peut démontrer qu'elle n'engendre aucune contradiction, *i. e.* qu'elle est "cohérente". Il est donc permis d'espérer que le système ZF fonde les mathématiques sur des bases inébranlables, mais il faut avoir conscience que, si tel est le cas, on ne pourra jamais le démontrer !

Serait-il alors possible de fonder autrement les mathématiques ? Cette question relève plus de la philosophie des mathématiques. Disons toutefois que quelques rares mathématicien·nes n'acceptent pas le système ZF, on peut notamment citer les *constructivistes* : ils reconnaissent seulement les objets mathématiques que l'on peut effectivement construire et rejettent même le *principe du tiers exclu* (le principe du tiers exclu énonce qu'une proposition est soit vraie soit fausse) : les démonstrations par l'absurde ne sont alors pas possibles [10]. Le prix à payer d'une telle approche est le rejet d'une grande partie des mathématiques classiques.

Pour en revenir à l'axiome du choix, dans ce contexte les seules questions importantes deviennet : *peut-on démontrer l'axiome du choix à partir du système ZF, ou au contraire, peut-on démontrer qu'il est faux ?* Qu'en est-il de l'axiome du choix *dénombrable*

3 Le lemme de Zorn

C'est en 1935 que le mathématicien allemand (puis américain) Max Zorn (1906-1993) énonce le célèbre *Lemme de Zorn* [11]. Sa démonstration repose sur l'axiome du choix, il a été démontré qu'il est en réalité équivalent à l'axiome du choix. Cependant, la formulation du lemme de Zorn le rend bien plus facile à manier que l'axiome du choix, d'où son intérêt, il est donc beaucoup plus utilisé dans les démonstrations que l'axiome du choix.

Notons que Zorn avait formulé le résultat comme un "principe", pas un lemme, et surtout, il n'a pas été pas le premier à l'énoncer, loin de là ; il est ainsi parfois appelé "Lemme de Kuratowski-Zorn" puisque le polonais Kazimierz Kuratowski (1896-1980) l'avait déjà obtenu en 1922 [12].

Il est remarquable que, dans son article, la première application que donne Zorn du lemme est le *théorème de Krull*, précisément le théorème qui nous intéresse dans notre étude des anneaux. Il s'agit d'un résultat qui était déjà connu auparavant puisque c'est l'algébriste allemand Wolfgang Krull (1899-1971) qui l'avait d'abord démontré en 1929.

Notons aussi que, de même que le lemme de Zorn, le théorème de Krull est équivalent à l'axiome du choix. Ceci n'a été démontré qu'en 1979 par Wilfrid Augustine Hodges, un théoricien des modèles britannique, aujourd'hui professeur émérite à l'université de Londres.

10. Un raisonnement direct ou par contraposée est toujours plus élégant qu'une démonstration par l'absurde, mais dans certains cas il est très difficile de faire autrement.

11. Max Zorn, *A remark on method in transfinite algebra.* Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935), no. 10, 667–670.

12. On peut consulter l'article de Paul J. Campbell, *The origin of "Zorn's lemma"* (Historia Math. 5 (1978), no. 1, 77–89) pour un historique du Lemme de Zorn.

Théorème (Hodges, 1979) – *Le théorème de Krull est équivalent à l'axiome du choix.*

Il y a beaucoup d'autres résultats équivalents à l'axiome du choix ; en algèbre on peut notamment mentionner l'existence d'une base dans tout espace vectoriel [13] sachant que, sans l'axiome du choix, il peut aussi exister des espaces vectoriels ayant deux bases de cardinalités différentes [14].

4 L'indépendance de l'axiome du choix

Nous en revenons aux questions sur lesquelles nous avons clôturé la section 2 : *peut-on démontrer l'axiome du choix à partir du système ZF, ou au contraire, peut-on démontrer qu'il est faux ?* Qu'en est-il de l'axiome du choix *dénombrable*

4.1 Les théorèmes de Gödel et Cohen

Kurt Gödel a démontré en 1938 que,

si le système ZF est cohérent, celui obtenu en ajoutant l'axiome du choix (ZFC) l'est aussi.

Autrement dit, en partant du système ZF, il n'est pas possible de démontrer que l'axiome du choix est faux. Cependant, le résultat de Gödel ne dit pas que l'axiome du choix est vrai. Bien plus tard en 1963, le mathématicien américain Paul Joseph Cohen (1934-2007) démontre que

si le système ZF est cohérent, celui obtenu en ajoutant la négation de l'axiome du choix l'est aussi.

Ainsi, le système ZF ne permet pas non plus de démontrer l'axiome du choix ! Ce que ces résultats permettent d'affirmer c'est
- d'une part, qu'une fois qu'on travaille dans ZF, il est scientifiquement autant cohérent d'admettre l'axiome du choix que d'admettre sa négation ;
- d'autre part, qu'en travaillant avec aucune de ces deux hypothèses, on est incapable de démontrer le théorème de Krull, et tout aussi incapable de démontrer qu'il est faux !

Autrement dit, en n'admettant ni l'axiome du choix ni sa négation, on n'a pas suffisamment précisé ce qu'est un ensemble pour pouvoir dire si le théorème de Krull est vrai ou faux.

La situation peut surprendre. Si on a du mal à se la représenter, on peut regarder un problème similaire qui à l'avantage de se rapporter à un objet plus concret. En effet, parallèlement à l'axiome du choix, et même un peu plus tôt, les mathématicien·nes ont été confronté·es au problème de l'*hypothèse du continu* détaillé plus loin qui concerne l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

4.2 L'hypothèse du continu

En 1874 Georg Cantor a démontré que le cardinal de l'ensemble $\mathbb{R}$ est strictement plus grand que celui de l'ensemble $\mathbb{N}$. Il a ensuite formulé vers 1890 un très célèbre problème :

Hypothèse du continu – *Il n'existe aucun ensemble dont le cardinal est strictement compris entre celui de l'ensemble des entiers naturels et celui de l'ensemble des nombres réels.*

À Paris en 1900, au 2e congrès international des mathématiciens, le mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) a énoncé une liste restée célèbre de 23 problèmes ouverts, appelés *problèmes de Hilbert*. Le premier d'entre eux était justement l'hypothèse du continu.

La situation avec l'axiome du choix, c'est-à-dire avec ZFC, est la suivante : l'ensemble $\mathbb{R}$ a un cardinal, et ce cardinal est strictement plus grand que celui de $\mathbb{N}$. En notant $\aleph_1$ le plus petit

13. Theorem 4.44 du livre *Axiome of choice* de Horst Herrlich paru à Lecture Notes in Mathematics (n° 1876).
14. Voir l'article *Auswahlaxiom in der Algebra* écrit par von H. Läuchli et paru à Comment. Math. Helv. en 1963.

cardinal strictement plus grand que celui de $\mathbb{N}$, la question revient à se demander si le cardinal de $\mathbb{R}$ est $\aleph_1$ (hypothèse du continu), ou s'il est strictement plus grand que $\aleph_1$.

En 1938, Gödel a démontré que, *si le système ZFC est cohérent, celui obtenu lorsqu'on ajoute l'hypothèse du continu l'est aussi.* Ensuite en 1964, par la *méthode du forcing*, Cohen a démontré que, *si le système ZFC est cohérent, celui obtenu en ajoutant la négation de l'hypothèse du continu l'est aussi.* Ainsi Paul Cohen a apporté une réponse complète au 1^{er} problème de Hilbert.

Ces résultats montrent que, même avec l'axiome du choix et pas seulement avec le système ZF, on n'est pas suffisamment précis sur ce qu'est un ensemble pour pouvoir dire quel est cardinal de l'ensemble $\mathbb{R}$, pourtant celui-ci existe et est unique ! Cependant, contrairement à l'axiome du choix qui est couramment admis dans une grande partie des mathématiques, au moins sous des formes affaiblies comme l'axiome du choix dénombrable ou l'axiome du choix dépendant, en général on n'admet ni l'hypothèse du continu, ni sa négation.

Nous terminons cette discussion en signalant que, pour ses travaux sur l'axiome du choix et l'hypothèse du continu, Paul Cohen a reçu la médaille Fields en 1966.

5 Deux variantes courantes de l'axiome du choix

Comme nous l'avons vu plus haut en retraçant l'historique de l'axiome du choix, c'est sa forme générale qui a donné lieu à controverse tandis que sa version dénombrable avait même déjà été couramment utilisée dans de nombreux travaux précédents. Nous terminons cette note en disant quelques mots sur l'axiome du choix dénombrable et sur une autre forme faible de l'axiome du choix qui est également couramment utilisée : l'*axiome du choix dépendant.*

5.1 L'axiome du choix dénombrable

L'axiome du choix dénombrable est généralement admis par les mathématicien·nes et, comme on l'a vu plus haut, ce dès le départ des controverses liées à l'axiome du choix. Il a plus tard été démontré qu'à la fois,

— cet axiome n'est, comme l'axiome du choix, pas conséquence de ZF ;

— il est strictement plus faible que l'axiome du choix (il a été démontré que, si ZF est cohérent, alors le système obtenu en ajoutant l'axiome du choix dénombrable et la négation de l'axiome du choix est aussi cohérent).

Il est important d'avoir conscience que c'est l'axiome du choix dénombrable qui est utilisé pour montrer que toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable [15], avec le système ZF seul, il est même impossible de démontrer que l'ensemble des nombres réels n'est pas une union dénombrable d'ensembles dénombrables [16].

Si nous nous contentons du système ZF sans axiome supplémentaire, nous permettons également à un ensemble infini de ne contenir aucun sous-ensemble dénombrable [17], alors que cela ne se produit pas avec l'axiome du choix dénombrable. *Notons cependant que la réciproque de ce résultat est fausse : le fait que tout ensemble infini contienne un ensemble dénombrable n'implique pas l'axiome du choix dénombrable* [18]. Tout cela illustre à quel point les mathématicien·nes ont besoin d'un tel axiome pour travailler.

5.2 L'axiome du choix dépendant

Après avoir remarqué que les fondements de l'analyse ne nécessitent pas la pleine force de l'axiome du choix, le logicien suisse Paul Bernays (1888-1977) a introduit en 1942 un axiome plus faible que l'axiome du choix appelé *axiome du choix dépendant* [19].

15. https ://www.lmno.cnrs.fr/archives/dehornoy/Surveys/DehornoyChap4.pdf
16. Voir Theorem 10.6 de https ://gwern.net/doc/math/1973-jech-theaxiomofchoice.pdf
17. Voir Theorem 10.1 de https ://gwern.net/doc/math/1973-jech-theaxiomofchoice.pdf
18. Voir Theorem 8.9 de https ://gwern.net/doc/math/1973-jech-theaxiomofchoice.pdf
19. Paul Bernays, *A system of axiomatic set theory. III. Infinity and enumerability. Analysis.* J. Symbolic Logic 7 (1942), 65‚Äì89.

Axiome du choix *dépendant* – *Pour tout ensemble non vide X et toute relation R sur X, si pour tout $x \in X$ il existe $y \in X$ tel que xRy, alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle qu'on ait $x_n R x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Son énoncé peut paraître compliqué, il est pourtant si naturel que, comme nous le verrons en cours, il peut être utilisé sans même s'en rendre compte, notamment lorsqu'on construit une suite *par récurrence.*

Il est possible de démontrer que cet axiome est strictement plus fort que l'axiome du choix dénombrable et strictement plus faible que l'axiome du choix [20]. À titre d'exemple, cet axiome est insuffisant pour construire les ensembles de Vitali (voir Exemple 1 ci-dessus ainsi que la note de bas de page).

L'axiome du choix dépendant sera utilisé deux fois dans le cours, en fin de semestre : d'abord pour montrer que tout anneau *principal* est *factoriel*, puis dans l'étude des anneaux *noethériens.* En réalité, le théoricien des modèles Wilfrid Hodges a démontré que les axiomes du système ZF sont insuffisants pour démontrer que tout anneau principal est factoriel [21].

Théorème (Hodges, 1976) – *Il n'est pas possible de démontrer que tout anneau principal est factoriel en utilisant seulement les axiomes du système ZF.*

Il a également démontré en 1973 que les axiomes du système ZF sont insuffisants pour démontrer certains résultats du cours sur les anneaux noethériens [22], alors que l'axiome du choix dépendant permettra leur démonstration.

20. Voir la section 8 de les théorème 8.9 et 8.12 de https ://gwern.net/doc/math/1973-jech-theaxiomofchoice.pdf
21. Voir Corollaire 10 (a) de l'article de Wilfried Hodges intitulé *Läucli's algebraic closure of Q* paru dans Math. Proc. Camb. Phil. Soc. en 1976.
22. Voir Ring 1 de l'article de Wilfried Hodges intitulé *Six impossible rings* paru au Journal of Algebra en 1974.