Université de Poitiers, Année 2024-2025

3^{e} année de Licence de Mathématiques, Anneaux

Contrôle continu , le mercredi 5 mars 2025, 8h15-10h15

Exercice 1 – Questions de cours (5 points)

1. Donner la définition d'un idéal maximal d'un anneau commutatif.
2. Soit M un idéal d'un anneau commutatif A. Démontrer que, si A/M est un corps, alors M est un idéal maximal de A.
3. Énoncer le *Théorème d'isomorphisme.*

Exercice 2 – Issu du TD (4 points)

On considère les deux anneaux $A = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

1. L'application $A \to A \times B$ définie par $a \mapsto (a, 0)$ est-elle un morphisme d'anneaux ?
2. L'application $A \times B \to A$ définie par $(a, b) \mapsto a$ est-elle un morphisme d'anneaux ?
3. Déterminer l'unique morphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \to A \times B$. Quelle est son image ? son noyau ?

Exercice 3 – Issu du TD (2 points)

Montrer qu'un élément x d'un anneau commutatif A est inversible si et seulement s'il n'est contenu dans aucun idéal maximal de A.

Exercice 4 – Le nombre d'or (9 points)

On note $\mathbb{Z}[\varphi]$ le sous-anneau de $\mathbb{R}$ engendré par $\mathbb{Z}$ et le *nombre d'or* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. **L'anneau** $\mathbb{Z}[\varphi]$
   (a) Démontrer que l'ensemble $\{a + b\varphi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\mathbb{Z}[\varphi] = \{a + b\varphi \mid a, b \in A\}$.
   (c) Justifier que les éléments de $\mathbb{Z}[\varphi]$ s'écrivent de façon unique sous la forme $a + b\varphi$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$.
   (d) Soit $\varphi^* = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Justifier que l'application $\omega : \mathbb{Z}[\varphi] \to \mathbb{Z}[\varphi]$, définie par $\omega(a + b\varphi) = a + b\varphi^*$, est un automorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}[\varphi]$.

2. **L'application N**

   (a) Pour tout $z \in \mathbb{Z}[\varphi]$, on note $N(z) = z\omega(z)$. Vérifier que, pour tous $x, y \in \mathbb{Z}[\varphi]$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.

   (b) Montrer que $N(z) = a^2 + ab - b^2$ pour tout $z \in \mathbb{Z}[\varphi]$.

   (c) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[\varphi]$, on a $N(z) \in \mathbb{Z}$ et que l'élément z est inversible dans $\mathbb{Z}[\varphi]$ si et seulement si $N(z) \in \{+1, -1\}$.

   (d) Justifier que $\mathbb{Z}[\varphi]$ a une infinité d'éléments inversibles.
   Indication : calculer $N(\varphi)$ et considérer les puissances de φ.

3. **Éléments premiers de $\mathbb{Z}[\varphi]$**

   (a) Montrer que 11 n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[\varphi]$.
   Indication : calculer $(3 + 2\varphi)(5 - 2\varphi)$.

   (b) Soit $z \in \mathbb{Z}[\varphi]$. Montrer que 2 divise z dans $\mathbb{Z}[\varphi]$ si et seulement si $N(z)$ est pair.
   Indication : pour $z = a + b\varphi$, il s'agit de montrer que a et b sont tous les deux pairs si et seulement si $N(z)$ est pair.

   (c) En déduire que 2 est un élément premier de $\mathbb{Z}[\varphi]$.