Université de Poitiers

Année scolaire 2007–2008

Math pL07

Feuilles de révision No 1

Exercice 1. Soient $\mathcal{V}_4$ un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$ et $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (5, 1, 1, 1)$ et $\mathbf{v}_3 = (-3, -3, 1, -3)$ trois vecteurs de $\mathcal{V}_4$. On désigne par $\mathcal{S}$ le sous espace vectoriel engendré par $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ et par $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}$ la norme euclidienne de $\mathbf{x} \in \mathcal{V}_4$.

(i) Appliquer la procédure de orthogonalisation de Gram-Schmidt pour montrer que les trois vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ sont linéairement dépendants.
(ii) Trouver une base orthonormale de $\mathcal{S}$ et indiquer la dimension de $\mathcal{S}$.
(iii) Pour tout $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{V}_4$ on désigne par

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|.$$

la norme de $\mathcal{V}_4$. Montrer que $\| \cdot \|_1$ vérifie bien les axioms de la norme.
(iv) Montrer que $\|\mathbf{x}\|_1 \geq \|\mathbf{x}\|$.
(v) Vérifier cette dernière inégalité pour chaque vecteur $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$.

Exercice 2. Il s'agit de modéliser le système d'irrigation d'une plantation. Le compartiment (1) est la terre et le compartiment (2) est la plante. $x(t)$ et $y(t)$ sont les quantités ou les concentrations de l'eau dans le compartiment (1) et (2). On suppose qu'à l'instant $t = 0$ les donnée initiales sont $x(0) = 0$ et $y(0) = 1$. On irrigue le compartiment (1) d'une manière périodique en unité de temps comme la fonction $b(t) = \alpha t$. Dans le compartiment (1), 9/10 d'eau est absorbée par la terre et le reste passe dans la plante. Dans le compartiment (2), 1/100 de l'eau sera éliminée par évaporation.

Ainsi les constantes de la proportionnalité sont données dans le schéma ci-dessous

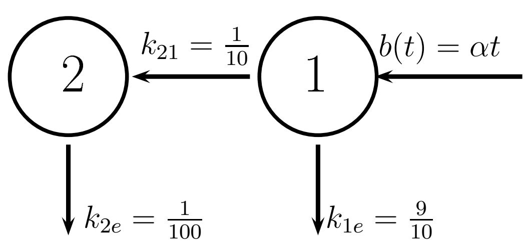

Figure 1.

(a) Ecrire le système différentiel régissant ce modèle compartimental.

(b) Ecrire ce système sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2.1}$$

(c) Calculer les valeurs propres de la matrice A.
(d) Diagonaliser A à l'aide de la matrice de passage P, que l'on calculera en imposant que P soit de la form $\begin{pmatrix} 1 & p_{12} \\ p_{21} & 1 \end{pmatrix}$.
(e) Calculer la matrice fondamentale e^{tA}.
(f) En déduire la solution du système (2.1) sous la forme d'intégrales.
(g) En calculant ces intégrales, trouver la forme explicite des solutions $x(t)$ et $y(t)$.

Corrigé d'exercice 1. (i) *La procédure de orthogonalisation de Gram-Schmidt donne*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 = (1,-1,1,-1), \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2|\mathbf{u}_1)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1 = (4,2,0,2), \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3|\mathbf{u}_1)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3|\mathbf{u}_2)}{(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_2)}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (0,0,0,0). \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{u}_3$ *est le vecteur nul alors*

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_1) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

est une combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ *et* $\mathbf{v}_2$. *Ainsi ces trois vecteurs sont linéairement dépendants.*

(ii) *Comme* $\mathcal{S}$ *est engendré par trois vecteurs linéairement dépendants alors la dimension de* $\mathcal{S}$ *est au plus 2. Par aileurs, les vecteurs* $\mathbf{u}_1$ *et* $\mathbf{u}_2$ *sont othogonaux, car*

$$(\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_1) = (\mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2|\mathbf{u}_1)}{(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1) = (\mathbf{v}_2|\mathbf{u}_1) - (\mathbf{v}_2|\mathbf{u}_1) = 0.$$

Ainsi, ils sont linéairement indépendants. Pour obtenir une base orthonormale il suffit de normaliser chaque vecteur.

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,0,1).$$

(iii) *Vérifions les axiomes de la norme pour* $\|\mathbf{x}\|_1$.

- $\|\mathbf{x}\|_1 = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} = 0$.
  En effet, si $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 0$, *commme chaque* $|x_k| \geq 0$ *et leurs somme pour* $k = 1, \cdots, 4$ *est nulle alors* $x_k = 0$ *pour chaque* $k = 1, \cdots, 4$. *La réciproque est évidente.*

- $\|\lambda\mathbf{x}\|_1 = |\lambda|\|\mathbf{x}\|_1$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
  En effet,

$$\|\lambda\mathbf{x}\|_1 = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| + |\lambda x_3| + |\lambda x_4| = |\lambda|\left(|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|\right) = |\lambda|\|\mathbf{x}\|_1.$$

- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1$, pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}_4$.
  En effet,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1 &= |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + |x_3+y_3| + |x_4+y_4| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + |x_3| + |y_3| + |x_4| + |y_4| \\ &= \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1.\end{aligned}$$

(iv) *Il suffit d'écrire,*

$$\left(|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|\right)^2 \geq |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2$$

et en prennant la racine carrée des deux membres on obtient le résultat voulu.

(v)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_1\|_1 &= 4 \geq 2 = \sqrt{4} = \|\mathbf{v}_1\| \\ \|\mathbf{v}_2\|_1 &= 8 \geq 5,29 \simeq \sqrt{28} = \|\mathbf{v}_2\| \\ \|\mathbf{v}_3\|_1 &= 10 \geq 5,29 \simeq \sqrt{28} = \|\mathbf{v}_3\|.\end{aligned}$$

Corrigé d'exercice 2. (i) *Le système différentiel associé à ce schéma est le suivant:*

$$\begin{cases} x'(t) = -k_{12}x(t) - k_{1e}x(t) + b(t) \\ y'(t) = k_{21}x(t) - k_{2e}y(t) \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} x'(t) = -\frac{9}{10}x(t) - \frac{1}{10}x(t) + \alpha t \\ y'(t) = \frac{1}{10}x(t) - \frac{1}{100}y(t) \end{cases}$$

Les conditions initiales sont

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 1.$$

(ii) *Soit* $\mathbf{x}(t) =^t (x(t), y(t))$, *on obtient*

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{100} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} \alpha t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii)

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{10} & \lambda + \dfrac{1}{100} \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda + \frac{1}{100})$$

d'où $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{100}$.

(iv) *Première colonne de P est un vecteur propre associé à λ_1. Si on veut que le premier élément de ce vecteur soit 1, on obtient*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{100} y = -y \qquad \Rightarrow \ y = -\frac{10}{99}.$$

Donc la première colonne de P est ${}^t(1, -\frac{10}{99})$. De même pour la deuxième colonne on écrit

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{100} \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne

$$-y = -\frac{1}{100} y \qquad \Rightarrow \ y = 0.$$

Ainsi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{10}{99} & 1 \end{pmatrix}.$$

(v) *On sait que si*

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \textit{alors} \qquad P^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

d'où

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{10}{99} & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{10}{99} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{10}{99} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{100} \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{10}{99} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{1}{100}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{10}{99} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ -\frac{10}{99}\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-\frac{t}{100}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{10}{99} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ \frac{10}{99}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{100}} - \mathrm{e}^{-t}\right) & \mathrm{e}^{-\frac{t}{100}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(vi) *D'après la formule de la variation des constantes*

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)A}\mathbf{b}(s) ds$$

(vii)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ \frac{10}{99}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{100}} - \mathrm{e}^{-t}\right) & \mathrm{e}^{-\frac{t}{100}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-(t-s)} & 0 \\ \frac{10}{99}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t-s}{100}} - \mathrm{e}^{-(t-s)}\right) & \mathrm{e}^{-\frac{t-s}{100}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha s \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{100}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^{-t} \int_0^t \mathrm{e}^{s} s ds \\ \frac{10\alpha}{99}\left(\mathrm{e}^{\frac{-t}{100}} \int_0^t \mathrm{e}^{\frac{s}{100}} s ds - \mathrm{e}^{-t} \int_0^t \mathrm{e}^{s} s ds\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t - 1 + \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{\frac{-t}{100}} + \frac{10\alpha}{99}\left(100\left(t - 100\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-t}{100}}\right)\right) - \left(t - 1 + \mathrm{e}^{\frac{-t}{100}}\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Car

$$\mathrm{e}^{-\beta t} \int_0^t s \mathrm{e}^{\beta s} ds = \mathrm{e}^{-\beta t} \left[\left(\frac{s \mathrm{e}^{\beta s}}{\beta} \right|_0^t - \frac{1}{\beta} \int_0^t \mathrm{e}^{\beta s} ds \right] = \frac{1}{\beta}\left(t - \frac{1 - \mathrm{e}^{-\beta t}}{\beta}\right).$$