Université de Poitiers

Année scolaire 2007–2008

Licence de Mécanique. L3

Analyse complexe

Corrigé d'examen du 17 Décembre 2007

Exercice 1. *(i) Développer en série entière la fonction*

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad \text{pour } |z| < 1.$$

(ii) Trouver le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue.
(iii) Pour $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ montrer que l'on a:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}.$$

(iv) On sait que si $f(x)$ est une fonction continue 2π périodique sur $[-\pi,\pi]$ et paire, i.e. $f(-x) = f(x)$. Alors le développement en série de Fourier de la fonction f se mètrera sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \textit{où} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx. \tag{1.1}$$

En utilisant directement les résultats de (i) et (iii) sans passer par la formule (1.1), donner le développement en série de Fourier de la fonction

$$g(x) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x}$$

sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

Solution.
(i) Comme

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \quad \text{pour } |z| < 1.$$

alors

$$f(z) = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^n.$$

(ii) Pour $a_n = 2,\ n \geq 1$ le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue est

$$R = \frac{1}{\rho} \quad \text{avec} \quad \rho = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1.$$

Ainsi $R = 1$.

(iii) Pour $z = re^{\mathrm{i}x}$, on a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1 + r\cos\theta + ir\sin\theta}{1 - r\cos\theta - ir\sin\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{(1 + r\cos\theta + ir\sin\theta)(1 - r\cos\theta + ir\sin\theta)}{(1 - r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta + \mathrm{i}2r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\right) \\
&= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos x}.
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re} f(z) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(r^n e^{\mathrm{i}\theta n})\right) \\
&= 1 + 2r\cos\theta + 2r^2\cos 2\theta + 2r^3\cos 3\theta + \cdots
\end{aligned}$$

Exercice 2. **(a)** *Soit Ω une partie ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Considérer la fonction $u(x, y) = f(g(x, y))$, où f est définie sur l'image de g. Calculer Δu en fonction des dérivées partielle de g et les dérivées successives de f au point $g(x, y)$.*

(b) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $(0, 0) \notin \Omega$. Prenons $g(x, y) = \frac{y}{x}$, montrer que si $f(t) = \alpha \arctan t + \beta$, alors $u(x, y)$ est harmonique dans Ω.*

(c) *Réciproquement supposons que $t = \frac{y}{x}$ et $g(t) = t$, montrer que dans ce cas si $\Delta u = 0$, alors f vérifie l'équation différentielle*

$$[(1 + t^2)f'(t)]' = 0.$$

En déduire qu'il existe deux constantes α et β telles que

$$f(t) = \alpha \arctan t + \beta.$$

Solution.

(a) Comme $u(x, y) = f(g(x, y))$, on aura

$$u_x = f'(g)g_x, \qquad u_y = f'(g)g_y$$

$$u_{xx} = f''(g)g_x^2 + f'(g)g_{xx} \qquad u_{yy} = f''(g)g_u^2 + f'(g)g_{yy}.$$

Donc,
$$\Delta u = f''(g)\left(g_x^2 + g_y^2\right) + f'(g)(\Delta g).$$

(b) Comme $g(x,y) = \frac{y}{x}$, alors
$$g_x = -\frac{y}{x^2}, \qquad\qquad g_y = \frac{1}{x}$$
$$g_{xx} = \frac{2xy}{x^4}, \qquad\qquad g_{yy} = 0.$$
On a aussi $f'(t) = \frac{\alpha}{1+t^2}$ et $f''(t) = \frac{-2\alpha t}{(1+t^2)^2}$. Par conséquent
$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{-2\alpha\left(\frac{y}{x}\right)}{(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2)^2}\left((\frac{y}{x^2})^2 + (\frac{1}{x})^2\right) + (\frac{\alpha}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2})(\frac{2xy}{x^4}) \\ &= \frac{-2\alpha y}{x(x^2+y^2)} + \frac{2\alpha y}{x(x^2+y^2)} = 0.\end{aligned}$$

(c) Si $t = y/x$, alors
$$g_x = -\frac{t}{x}, \quad g_y = \frac{t}{y}, \quad \Delta g = g_{xx} = \frac{2xy}{x^4} = \frac{2t}{x^2},$$
Ainsi on peut écrire $\Delta u = f''(t)\left(\frac{t^2}{x^2} + \frac{t^2}{y^2}\right) + f'(t)\frac{2t}{x^2} = 0$. En multipliant par x^2, on aura
$$0 = f''(t)t^2\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) + 2tf'(t) = f''(t)(1+t^2) + 2tf'(t) = [(1+t^2)f'(t)]'.$$
Ceci montre que $(1+t^2)f'(t) = \alpha$ une constante. Ou bien on écrit $f'(t) = \frac{\alpha}{1+t^2}$. Enfin, ceci implique qu'il existe une constante β telle que
$$f(t) = \alpha \arctan t + \beta.$$

Exercice 3. *Considérons le champ des vitesses*
$$V(z) = u_0\left(1 - \frac{a^2}{\overline{z}^2}\right).$$

(a) *Déterminer $\Omega \subset \mathbb{C}$ une région du plan complexe dans laquelle $\overline{V}(z)$ est une fonction holomorphe dans Ω.*

(b) *Montrer que l'écoulement est irrotationnel et le fluide est incompressible.*

(c) *Trouver le potentiel réel $\phi(x,y)$ et la fonction de courant $\psi(x,y)$.*

(d) *Montrer que le cercle centré à l'origine et de rayon a est une ligne de courant.*

(e) *Montrer que les lignes de courants lorsque $|z| \to \infty$ sont les lignes parallèles aux axes des x, i.e. $y = cte$.*

(f) *Montrer que la circulation et le flux sont nuls sur ce cercle de rayon a.*

Solution.

(a) En calculant le conjugé de V, on trouve

$$\overline{V}(z) = u_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right).$$

Alors le seul point singulier est $z = 0$, donc cette fonction est définie dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrons que $\overline{V}(z)$ est holomorphe dans Ω.

$$\begin{aligned}
\overline{V}(z) &= u_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) \\
&= u_0\left(1 - \frac{a^2}{(x+\mathrm{i}y)^2}\right) \\
&= u_0\left(1 - \frac{a^2(x-\mathrm{i}y)^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= u_0\left(1 - \frac{a^2(x^2-y^2-2\mathrm{i}xy)}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= \underbrace{u_0\left(1 - \frac{a^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)}_{=u} + \mathrm{i}\underbrace{u_0\left(\frac{2a^2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)}_{=v}.
\end{aligned}$$

Ainsi les conditions de Cauchy-Riemann sont:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_0\left(\frac{2a^2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_0\left(\frac{2a^2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\right) = -\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.2}$$

Ainsi la fonction $\overline{V}(z)$ est holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Comme $\overline{V} = u + \mathrm{i}v$, alors $V = u - \mathrm{i}v$. Pour que l' écoulement soit irrotationnel, i.e. rot $V = 0$. il suffit que $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ce qui est vraie d'après (3.2) et pour que le fluide soit incompressible, i.e. div $V = 0$ il suffit que $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ce qui est vraie d'après (3.1).

(c) Comme $\Phi' = \overline{V} = u_0\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)$. Alors en intégrant on obtient

$$\Phi(z) = u_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right) = u_0\left(x + \mathrm{i}y + \frac{a^2(x-\mathrm{i}y)}{x^2+y^2}\right) = \phi(x,y) + \mathrm{i}\psi(x,y).$$

de sorte que ϕ le potentiel réel et ψ la fonction de courant sont:

$$\phi(x,y) = u_0\left(x + \frac{a^2x}{x^2+y^2}\right) \quad \text{et} \quad \psi(x,y) = u_0\left(y - \frac{a^2y}{x^2+y^2}\right).$$

(d) Sur le cercle $C(O,a)$ on a $x^2 + r^2 = a^2$. Donc pour $(x,y) \in C(0,a)$ $\psi(x,y) = u_0y(1 - \frac{a^2}{a^2}) = 0$. Ce qui prouve que $C(0,a)$ est une ligne de courant.

(e) Lorsque $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ et $y = \alpha$ une constante, alors

$$\psi(x, y) = u_0 y \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) \to u_0 \alpha.$$

Ainsi les lignes de courants à l'infini sont les lignes parallèles à l'axe des x.

(f) D'après la formule

$$\int_{C(0,a)} \overline{V}(z) dz = Cir(V, C(0, a)) + \mathrm{i} Flux(V, C(0, a)).$$

on a, à la suite d'un chagement de variable $z = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\int_{|z|=a} u_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) dz = 2\mathrm{i}u_0 \int_0^{2\pi} (1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} d\theta. = 0$$