THÈSE

pour l'obtention du Grade de

Docteur de l'Université de Poitiers

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

(Diplôme National - Arrêté du 7 Août 2006)

École Doctorale: **Sciences et Ingénierie pour l'Information (S2I)**

Secteur de Recherche: **Mathématiques et leurs Interactions**

présentée par:

Houssam CHRAYTEH [1]

PROBLÈMES DE VALEURS PROPRES POUR DES OPÉRATEURS $\overrightarrow{p}$-MULTIVOQUES

Directeur de thèse : **Jean-Michel Rakotoson**

Soutenue le Jeudi 08 Mars 2012

devant la commission d'Examen

Jury

Chérif Amrouche	Professeur, Université de Pau	Président du jury
Vicenţiu Rădulescu	Professeur, Université de Craiova	Rapporteur
Mervan Pašić	Professeur, Université de Zagreb	Rapporteur
Alain Miranville	Professeur, Université de Poitiers	Examinateur
Ahmad El Soufi	Professeur, Université de Tours	Examinateur
Abdallah El Hamidi	MCF Habilité, Université de LaRochelle	Examinateur
Madalina Petcu	MCF Habilité, Université de Poitiers	Examinateur
Jean-Michel Rakotoson	Professeur, Université de Poitiers	Directeur de thèse

1. N'hésitez pas à m'envoyer vos remarques à: h.chrayteh@yahoo.fr

Je dédie ce travail à :

Mes chers parents	*Nadia et Zaineddine*
Ma chère femme	*Haydi*
Mes deux soeurs	*Fatima et Fida*
Mes deux frères	*Ragheb et Nader*
Ma belle famille	*Wafaa, Israel, Ayman et Mazen*

Remerciements

Remercier toutes les personnes qui ont contribué de près comme de loin à l'existence de ce rapport de thèse est un exercice très compliqué. J'ose espérer que les mots choisis rendront à peu près correctement ce que je ressens.

Recevez, Monsieur le Professeur Jean-Michel Rakotoson, mes plus sincères remerciements pour avoir dirigé cette thèse dans la continuité de mon stage de Master 2. Pour l'attention que vous m'avez portée, votre disponibilité, votre patience et votre soutien moral. Je vous exprime toute ma reconnaissance et mon profond respect. Votre grande expérience et votre rigueur mathématique ont permis l'accomplissement de ce travail.

Les professeurs Vicenţiu Rădulescu et Mervan Pašić ont eu l'extrême gentillesse d'accepter de juger ce travail et d'en être les rapporteurs. Je les remercie vivement pour les efforts, la patience et l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement Madalina Petcu et Alain Miranville pour leurs conseils, les échanges enrichissants qui ont accompagné nos conversations et d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je remercie également Cherif Amrouche, Ahmad El Soufi (qui m'a encouragé pour venir à Poitiers) et Abdallah El Hamidi, pour l'honneur qu'ils me font, d'être parmi les membres de mon jury.

Un grand merci à mes professeurs de l'Université Libanaise Moustafa Jazar et Nazih Mokaddem qui m'ont encouragé à poursuivre mes études supérieures. Je remercie également le professeur Ahmad El Rafei pour son aide et son soutien pour l'obtention d'une bourse de l'Université Libanaise.

Merci à tous les membres du Laboratoire de Mathématiques et Applications, qui m'ont permis de travailler dans de très bonnes conditions. Je remercie en particulier le directeur du laboratoire Pol Vanhaecke, les professeurs Pierre Torasso, Marc Arnaudon, Hassan Emamirad, Patrice Tauvel et Abderrazak Bouaziz pour leur excellent accueil, leur attention et leur écoute. Je remercie également Saïd Hilout, Morgan Pierre et Youssef Barkatou pour les encouragements et le reconfort qu'ils m'ont apporté lors de nos nombreux échanges.

Je tiens à remercier les personnels ita/iatos du département et du laboratoire : Brigitte Brault au secrétariat, Nathalie Mongin à la comptabilité, Nathalie Marlet à la bibliothèque, Jocelyne Attab à la bibliothèque et à la reprographie et Benoît Métrot au service informatique, pour leur disponibilité et leurs compétences professionnelles qui m'ont facilité beaucoup la vie au laboratoire.

J'exprime ma gratitude à Catherine Bougant et Claire Miranville pour leur sympathie, leur générosité et leur sens de l'accueil mais aussi pour les moments chaleureux partagés ensemble.

Mes remerciements amicaux pour tous les doctorants : Appolinaire, Ali, Daniel, Dima, Hélène, Paola, Charlène, Frédéric, Sami K., Caroline L., Florent, Anis, Gilnard et Claire... Par ailleurs, je n'oublie pas les anciens doctorants parmi lesquels Sami I., Armel, Guilhem, Koléhè, Khaoula (je sens l'odeur de ton couscous), Paul, Toufic (ton soutien me manque), Wesam, Gang, Le, Caroline P. et Batoul. Je remercie également mes deux collègues de bureau Brice (tes remarques linguistiques ont beaucoup amélioré la présentation de ce travail) et Jules.

Je voudrais remercier tous mes amis, mais il m'est impossible de les citer tous ici. J'ai une pensée très particulière pour Firas Koubaydatt qui m'a soutenu tout au long de cette thèse. Je remercie aussi Azzam Charefeddine pour son soutien sans faille. Je réserve une place spéciale à Haydar Abdel Hamid, Abdallah Barakat et Bilal Saad qui m'ont souvent remonté le moral, avec subtilité qui plus est.

Je voudrais remercier ma famille que je ne changerais pour rien au monde : maman Nadia et papa Zaineddine, mes deux frères Ragheb et Nader, mes deux soeurs Fatima et Fida et ma belle famille : Wafaa, Israel, Ayman et Mazen qui, de loin, ont toujours su m'offrir leur soutien, leur compréhension, leurs encouragements, leur patience et leur affection. À ces derniers, je dédie cette thèse.

La période la plus difficile de cette thèse a été partagée avec celle qui possède le coeur le plus tendre dans le monde. Alors mille mercis à Haydi pour tout le bonheur qu'elle m'apporte, pour sa patience, son soutien... Elle mérite amplement que je lui dédie ce travail et même ma vie...

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension N	13
$L^0(\Omega, \mu)$	Fonctions μ-mesurables	13
$L^0_+(\Omega, \mu)$	Fonctions μ-mesurables et positives	13
$\overline{\mathbb{R}}_+$	$= [0; +\infty]$	14
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue	14
$L(\Omega, \rho)$	Espace de fonction de Banach	14
$\hookrightarrow$	Injection continue	15
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	Injection compacte	36
$\rightarrow$	Convergence forte	14
$\rightharpoonup$	Convergence faible	37
ρ'	Norme de fonction associée à la norme ρ	15
X'	Espace associé à l'espace X	15
X^*	Espace dual de l'espace X	15
$\overline{\Phi}$	$\mathcal{N}$-fonction complémentaire de Φ	18
$(\triangle_2)$	Condition de croissance	18
$K_\Phi(\Omega)$	Classe d'Orlicz généralisée	18
$L^\Phi(\Omega)$	Espace d'Orlicz	19
$\triangle$	Différence symétrique	21
$\overline{\mathbb{R}}$	$= \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$	22
dom φ	$= \Big\{x \in X : \varphi(x) < +\infty\Big\}$	22
$B(x_0, r)$	Boule ouverte de centre x_0 et de rayon r	22
$\overline{B}(x_0, r)$	Boule fermée de centre x_0 et de rayon r	22
$P(X) = 2^X$	Ensemble des parties de X	22
$\overset{\circ}{int}\{E\}$	Intérieur d'un ensemble E	22
χ_E	Fonction caractéristique d'un ensemble E	14
$s.c.i.$	Fonction semi-continue inférieurement	22
$s.c.s.$	Fonction semi-continue supérieurement	25
$\Gamma_0(X)$	Fonctions propres, convexes et s.c.i.	22
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Crochet de dualité	23
$\partial\varphi(x)$	Sous-différentielle de φ en $x \in X$	23
Dom $\partial\varphi$	$= \Big\{x \in X : \partial\varphi(x) \neq \varnothing\Big\}$	23

Chapitre 1

Introduction

L'objectif de ce travail est de présenter des nouveaux résultats concernant l'existence et la régularité des solutions positives de deux classes (sous-critiques et critiques) d'équations aux dérivées partielles non linéaires faisant intervenir un opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque de Leray-Lions $A : \mathbf{V} \to \mathcal{P}(\mathbf{V}^*)$. L'opérateur a été introduit récemment par J.-M. Rakotoson sur un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (borné ou non borné). Grâce aux $\mathcal{N}$-fonctions, nous construisons un opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque de Leray-Lions "fortement monotone" sur un espace d'Orlicz-Sobolev anisotrope. Cette construction sera le point clé dans notre étude.

1.1 Historique

Soit f une "bonne" fonction sur un espace produit $\Omega \times \mathbb{R}$. Considérons l'équation semilinéaire suivante :

$$-\Delta u = f(x, u). \tag{1.1}$$

Cette équation peut s'écrire aussi sous la forme d'une divergence :

$$-\operatorname{div} \nabla u = f(x, u). \tag{1.2}$$

Beaucoup d'auteurs ont travaillé sur l'existence, la non existence et la régularité des solutions de (1.2), avec des conditions au bord très variées.
À la suite des travaux de I.M. Vishik, Leray-Lions, Ladyzhenskaya-Uraltseva (voir [49] et les livres [50], [47]), l'équation (1.2) a été généralisée de la manière suivante par exemple :
Soit $a(\cdot,\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction de Carathéodory ($a(\cdot, \sigma, \xi)$ mesurable et $a(x,\cdot,\cdot)$ continue) et considérons le problème :

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) = f(x, u). \tag{1.3}$$

La fonction a dans (1.3) dépend continûment de u et ∇u. Mais il existe maintenant des modèles mathématiques où la dépendance en gradient n'est plus une fonction continue du gradient. Par exemple, en restauration et décomposition d'images, il est bien connu que lorsque le terme de régularisation est donné par $\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$, alors le processus de minimisation de l'énergie entraîne un lissage isotrope de l'image (la puissance quadratique du module du gradient pénalise les zones où le gradient est élevé, c'est-à-dire au voisinage des contours), voir les travaux de P.L. Lions et al. dans [3]. D'autre part, lorsque le terme de régularisation est donné par $\int_\Omega |\nabla u| \mathrm{d}x$, alors le processus de minimisation entraîne un lissage anisotrope le long des courbes de niveau de l'image. Dans ces cas, nous devons avoir plus de souplesse, par exemple, nous pouvons bien diffuser de manière isotrope dans les zones homogènes de l'image (gradient faible) et de manière anisotrope le long des contours (gradient élevé). Ceci a été à l'origine de l'idée présentée dans [9] (voir aussi [28]), où le terme de régularisation est donné par $\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^{p(|\nabla u|)}\mathrm{d}x$ et la fonction p doit être décroissante et choisie de sorte que $p \approx 2$ au voisinage de l'origine et $p \approx 1$ au voisinage de l'infini. Considérons par exemple la fonction Φ définie par (voir aussi le modèle étudié dans [15])

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{q(x)}|t|^{q(x)} & \text{si} \quad |t| \leqslant 1, \\ \\ \dfrac{1}{m}|t|^m + \Big(\dfrac{1}{q(x)} - \dfrac{1}{m}\Big) & \text{si} \quad |t| > 1, \end{cases} \qquad 1 < q(x) \leqslant 2 \text{ et } m \geqslant 1.$$

Nous signalons que $\Phi(x,\cdot)$ est Fréchet-différentiable, alors le problème de minimisation issu de l'équation (1.3), reste dans le cadre des problèmes "univoques".
Lors de la résolution de ces problèmes, on est amené à considérer l'équation d'Euler associée au problème :

$$\inf \left\{ \int_\Omega \Phi(x, \nabla v(x))\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x, v(x))\mathrm{d}x : v \in W_0^{1,m}(\Omega) \right\}. \tag{1.4}$$

Ce qui conduit formellement à l'équation :

$$-\mathrm{div}\, \varphi(x, \nabla u) = f(x,u), \tag{1.5}$$

Une question importante qui se pose : Peut-on considérer des fonctions $\Phi(x,\cdot)$ non différentiables au sens classique ? En d'autres termes, peut-on résoudre le problème (1.5) lorsque la fonction $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \varphi(x,\xi)$ est discontinue ?

Beaucoup d'auteurs ont étudié le problème (1.5), lorsque la fonction $f(x,\cdot)$ est discontinue, mais avec un opérateur univoque comme le Laplacien ($\mathrm{div}\, \nabla u$) ou le p-Laplacien ($\mathrm{div}\, |\nabla u|^{p-2}\nabla u$). Nous donnons dans la Section 1.1.1 une brève historique et quelques domaines d'application de ce type de problèmes.

Dans la Section 1.1.2, l'historique d'une classe plus générale d'opérateurs dits "non homogènes anisotropes" est également donnée.

1.1.1 Inégalités hemivariationnelles

L'étude des équations dans lesquelles des inégalités dites "hemivariationnelles" interviennent, a été initié par P.D. Panagiotopoulos dans [68] et [70]. Ces équations traitent des inégalités variationnelles dont les fonctionnelles d'énergie correspondantes ne sont ni convexes ni Fréchet-différentiables. C'est une généralisation du travail de J.J. Moreau dans [63] et cette extension a été très motivée par différents problèmes en mécanique (voir [69], [88]).

Par exemple, le problème de chargement et de déchargement, ainsi que le problème d'hystérésis sont des exemples typiques de la théorie des inégalités hemivariationnelles. En effet, ces problèmes peuvent être réduits à l'étude d'un problème spectral (voir [36]), comme

(P) Trouver $u \in \mathbf{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ qui vérifient

$$a(u,v) - \lambda \int_\Omega u \cdot v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega j^0(x,u,v)\mathrm{d}x \geqslant 0, \quad \forall v \in \mathbf{V}. \tag{1.6}$$

De plus, la stabilité d'une plaque de Von Karman en contact adhésif avec un support rigide ou la stabilité de plaques de Von Karman adhésivement connectées sous forme de sandwich est une autre motivation de l'étude de ce problème de valeurs propres. Pour plus de détails sur les applications des inégalités hemivariationnelles, on peut consulter le livre de Z. Naniewicz & P.D. Panagiotopoulos [67].

Nous signalons que la formulation théorique de ces applications repose essentiellement sur la notion de **sous-différentielle de Clarke** qui remplace et étend la notion de sous-différentielle des fonctions convexes et celle de différentielle classique (de Fréchet).

La littérature sur l'étude des inégalités hemivariationnelles est très riche et beaucoup d'auteurs ont traité ce type d'inégalités, comme

$$-\mathrm{div}\ (a(x,u,\nabla u)) - \lambda f(u) \in \mu\, \partial j(x,u). \tag{1.7}$$

Parmi lesquels, nous mentionnons :

- ⊛ les résultats de [22] qui font intervenir un opérateur a univoque de Leray-Lions, une non-linéarité f discontinue et $\mu = 0$,
- ⊛ les résultats de [71] pour $a(x,u,\nabla u) = \nabla u$, $f(u) = a(x) \cdot u$ et $\mu = 1$,
- ⊛ les résultats de [41] pour $a(x,u,\nabla u) = |\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u$, $f(u) = a(x)|u|^{p-2} \cdot u$ et $\mu = 1$,
- ⊛ les résultats de [42] pour $a(x,u,\nabla u) = |\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u$ et $\lambda = 0$,
- ⊛ les résultats de [53] pour $a(x,u,\nabla u) = |\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u$, $\lambda = 0$ et $\mu = 1$.

Tous les résultats ci-dessus ont été obtenus avec des conditions aux bords de type Dirichlet et sous différentes hypothèses sur la fonction j. D'autres travaux, comme par exemple [72] et [54], traitent un problème de type (1.7) avec une condition de Neumann aux bords.

1.1.2 Opérateurs non homogènes anisotropes

Tout d'abord, les opérateurs principaux qui existent dans les problèmes variationnelles et plus précisément dans les problèmes de valeurs propres sont nombreux et variés. Nous citons par exemple, le Laplacien et le p-Laplacien qui sont des opérateurs homogènes et isotropes (voir [48], [33]).

Dans de nombreuses applications, il est naturel de considérer l'opérateur non homogène et anisotrope suivant

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \tag{1.8}$$

et de travailler avec le concept d'espace de Sobolev anisotrope (voir [92], [39]), où chaque dérivée partielle faible $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ de u est intégrable avec un exposant $p_i > 1$ propre à elle. Plusieurs papiers qui étudie l'existence ou la non existence de solutions pour des problèmes de valeurs propres associés à (1.8) sont apparus, parmi eux, nous citons [32] et [27].

Ensuite, M. Mihăilescu et al. ont exploité, dans [57], la notion des espaces de Lebesgue à exposant variable $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, développée par O. Kováčik et J. Rákosník dans [45] (voir aussi [30], [61]), pour définir un opérateur non homogène anisotrope aux exposants variables :

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{1.9}$$

De plus, ils ont construit un espace de Sobolev anisotrope aux exposants variables convenable $W_0^{1,p_1(\cdot),\ldots,p_N(\cdot)}(\Omega)$ dans lequel, ils ont étudié l'existence de solutions pour des problèmes de valeurs propres liés à (1.9).

Nous signalons que les espaces de Sobolev isotropes à exposant variable, définis par $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, ont été utilisés dans de nombreuses applications pour modéliser plusieurs phénomènes. Sans être exhaustif, nous donnons quelques exemples :

⊛ pour la restauration d'images (voir [15], [28]),

⊛ pour modéliser les fluides électrorhéologiques (une suspension de particules conductrices dispersées dans un fluide isolant). Ces fluides sont également considérés comme matériaux "intelligents" et consomment peu d'énergie. Plusieurs applications ont été proposées : embrayage automobile, amortisseur, contrôle actif de vibration, actionneur (voir [1], [4], [89], [58]),

⊛ pour le problème de "Thermistance" (voir [93]).

Récemment, M. Mihăilescu et al. ont introduit, dans [56] (voir aussi [62], [59]), un opérateur univoque non homogène anisotrope lié aux $\mathcal{N}$-fonctions :

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right), \tag{1.10}$$

où $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction impaire, **continue** et strictement croissante.

Nous mentionnons que leurs résultats d'existence, dans l'espace d'Orlicz-Sobolev, sont très influencés par les hypothèses de croissance et la compétition entre l'opérateur principal et le second membre.

1.1.3 Opérateur $\overline{\rho}^{>}$-multivoque de Leray-Lions

L'opérateur "totalement discontinu" a été introduit très récemment par J.-M. Rakotoson dans [85]. Il est défini par

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right), \tag{1.11}$$

où $\varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \in \partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)$ et $\varphi_i(x,\cdot) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas nécessairement continue (peut avoir des points de discontinuité).

Plusieurs exemples concrets des problèmes de valeurs propres, liés à cet opérateur multivoque (par exemple (1.13)), sont donnés dans [85].

Nous rappelons que la motivation principale de ce type d'opérateur est non seulement l'anisotropie (chaque dérivée partielle faible $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ se trouve dans un espace d'Orlicz $L^{\Phi_i}(\Omega)$ différent), mais encore le besoin de travailler avec un opérateur très souple qui donne à chaque valeur de $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ un traitement différent.

1.2 Présentation du sujet

Mon travail de thèse est motivé, d'une part, par les résultats de M. Mihăilescu et al. dans [56] et d'autre part, par les résultats de J.-M. Rakotoson dans [85]. En fait, grâce à la notion de $\mathcal{N}$-fonction, nous construisons un opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque, anisotrope, de Leray-Lions et "fortement monotone" sur un espace d'Orlicz-Sobolev convenable.

De plus, nous remarquons premièrement, que notre opérateur généralise et étend tous les opérateurs de la Section 1.1.2. Deuxièment, les opérateurs principaux utilisés dans les inégalités hemivariationnelles de la Section 1.1.1 sont tous "univoques", alors si nous considérons l'opérateur défini en (1.11) dans ces inégalités, nous pouvons recouvrir plusieurs résultats.

Tout au long de cette thèse, l'opérateur $\overline{\rho}^{>}$-multivoque (1.11) est utilisé pour résoudre des problèmes de valeurs propres abstraits et dans différentes situations.

Dans ce qui suit, nous présentons le cadre abstrait du problème :

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, à bord $\partial\Omega$ Lipschitzien et μ_i une mesure borélienne pour $i = 0, 1, \ldots, N$. Nous considérons $\varphi_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, N$ une fonction borélienne telle que :

(C1) pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, la fonction $\varphi_i(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire, strictement croissante et $\varphi_i(x, 0) = 0$.

(C2) $\varphi_i(x, \cdot) : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue à droite et $\lim\limits_{t \to +\infty} \inf\limits_{\Omega} \text{ess} \quad \varphi_i(x, t) = +\infty$.

(C3) Il existe $2m$ nombres réels (points de discontinuité) : $\delta_1^i < \ldots < \delta_{2m}^i$ de sorte que pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, la fonction $\varphi_i(x, \cdot) : \mathbb{R} \setminus \{\delta_1^i, \ldots, \delta_{2m}^i\} \to \mathbb{R}$ est continue.

Nous définissons la $\mathcal{N}$-fonction suivante :

$$\Phi_i(x, t) = \int_0^{|t|} \varphi_i(x, s)\, ds, \quad \forall\, x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}.$$

Nous remarquons que $\Phi_i(x, \cdot)$ est une fonction convexe continue mais non différentiable au sens classique, d'où la nécessité d'utiliser une autre notion, celle de la sous-différentielle.
De plus, pour assurer la réflexivité de l'espace d'Orlicz correspondant, nous imposons l'hypothèse de croissance suivante sur les fonctions Φ_i :

(C4) Il existe deux nombres réels : $\underline{\alpha} > 1$, $\overline{\alpha} > 1$, tels que pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ et $\forall\, w_i^*(x, t) \in \partial\Phi_i(x, t)$, on ait

$$\underline{\alpha}\ \Phi_i(x, t) \leqslant t\ w_i^*(x, t) \leqslant \overline{\alpha}\ \Phi_i(x, t).$$

Nous définissons la fonctionnelle J par

$$J(v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right)\ d\mu_i.$$

Nous montrons que sous les conditions **(C1)-(C4)**, l'opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque de Leray-Lions $u \xrightarrow{A} \partial J(u)$ (voir Définition 3.16) défini par :

$$Au = -\mathrm{div}_{\overrightarrow{\rho}}\left(\partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right)$$

est “fortement monotone” (voir Définition 3.3) sur l'espace d'Orlicz-Sobolev donné par $\mathbf{V}_0 \doteq W_0^{1,\rho_1,\ldots,\rho_N}(\Omega, \mu_1, \ldots, \mu_N)$ muni de la norme :

$$\|v\|_{\mathbf{V}_0} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\right),$$

où

$$\rho_i\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\right) = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}}{\lambda}\right)\ d\mu_i \leqslant 1\right\}.$$

Considérons X un espace de Banach réflexif. Soit $j : X \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne. On suppose que l'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow X$ est continue (parfois compacte). Notre **premier but** est de résoudre le problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}_{\overrightarrow{\rho}} \left(\partial \Phi_i \left(x, \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) \right) = \lambda \, w_M^*(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.12}$$

où

$$w_M^* \in \partial j(u).$$

En d'autres termes, nous étudions l'existence de solutions du problème de valeurs propres (1.12) avec différentes conditions sur la fonction j. Nous nous intéressons ensuite à la régularité des fonctions propres obtenues. Nous donnons également un résultat de non-existence pour certaines hypothèses sur la fonction j.

1.3 Exemples modèles et complexité du problème de valeurs propres

L'exemple le plus simple est le suivant :
Soient q, p, q_M et p_M quatre nombres réels positifs tels que

$$1 < q < p < +\infty \quad \text{et} \quad 1 < q_M < p_M < +\infty.$$

Considérons les deux fonctions J sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et j sur $L^{p_M}(\Omega)$ telles que :

$$J(v) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{N} \left[\int_{\left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \leqslant 1 \right\}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^q \mathrm{d}x + \int_{\left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| > 1 \right\}} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p \mathrm{d}x \right], \tag{1.13}$$

et

$$j(v) = \frac{1}{p_M} \left[\int_{\{|v| \leqslant 1\}} |v|^{q_M} \, \mathrm{d}x + \int_{\{|v| > 1\}} |v|^{p_M} \mathrm{d}x \right]. \tag{1.14}$$

Le problème consiste à prouver l'existence d'une solution non triviale u positive (point critique de la fonctionnelle d'énergie $\Phi(u) \doteq J(u) - \lambda j(u)$) dans un espace de Banach-Sobolev bien approprié ($W_0^{1,p}(\Omega)$), c'est-à-dire

$$0 \in \partial J(u) - \lambda \partial j(u). \tag{1.15}$$

Tout d'abord, nous remarquons que les fonctions J et j sont toutes les deux non différentiables au sens classique. Par conséquent, les méthodes variationnelles classiques qui imposent à la fonctionnelle d'Euler-Lagrange d'être C^1-différentiable semblent incompatibles avec le cas traité ci-dessus.

Ensuite, en essayant avec les méthodes variationnelles généralisées pour le cas non différentiable (par exemple le cas des fonctions localement Lipschitziennes) introduites par K.-C. Chang dans [14], la principale difficulté rencontrée est de montrer la convergence forte d'une sous-suite extraite de la suite de Palais-Smale trouvée. Nous adoptons alors des nouvelles méthodes variationnelles qui correspondent aux problèmes étudiés.

Si nous traitons le problème (1.15), avec $p_M = p^*$ c'est-à-dire p_M est l'exposant critique de l'injection de Sobolev de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$, une vraie complexité apparaît. En effet, dans ce cas dit "critique" nous perdons la compacité alors l'équation d'Euler associé à (1.15) ne vérifie pas la condition de Palais-Smale, ce qui nous empêche de montrer l'existence d'une fonction minimisante (ou maximisante) à partir les méthodes variationnelles classiques. Un théorème abstrait est donné pour surmonter cette difficulté.

Enfin, l'opérateur $\overrightarrow{p}$-multivoque de Leray-Lions est un opérateur non homogène et anisotrope. La manipulation de cet opérateur fait intervenir des inégalités. Cela montre une complexité dans les estimations. Par exemple, en étudiant les propriétés qualitatives des fonctions propres dans le cas univoque du p-Laplacien, nous pouvons donner une précision sur les constantes. Ce qui n'est pas le cas pour les fonctions propres liées aux opérateurs $\overrightarrow{p}$-multivoques.

1.4 Organisation de la thèse

Nous regroupons nos résultats en cinq chapitres :

Chapitre 2 : "Quelques rappels de certains résultats classiques".

Chapitre 3 : "Opérateur $\overline{p}^{>}$-multivoque de Leray-Lions".

Chapitre 4 : "Problèmes de valeurs propres et exposants critiques".

Chapitre 5 : "Cas de Résonance".

Chapitre 6 : "Propriétés qualitatives des fonctions propres liées aux opérateurs $\overline{p}^{>}$-multivoques".

Dans le Chapitre 2, nous rappelons des notations et techniques utilisées dans les chapitres suivants. Nous donnons quelques définitions et résultats sur les espaces de fonction de Banach et ceux d'Orlicz, nous présentons différents notions et résultats sur la sous-différentielle des fonctions convexes et celle de Clarke qui sont fréquemment utilisés. Ensuite, nous énonçons les théorèmes généraux pour la résolution des équations aux dérivées partielles dans le cas non différentiable (Méthodes variationnelles). Nous terminons par rappeler un résultat de compacité dû à A. El Hamidi et J.-M. Rakotoson qui sert à montrer la convergence forte du gradient dans les problèmes variationnels dits “critiques”.

Dans le Chapitre 3, nous construisons l'espace de fonction de Banach-Sobolev sur lequel nous définissons l'opérateur $\overline{\rho}^{>}$-multivoque de Leray-Lions, introduit par J.-M. Rakotoson dans [85]. Nous nous intéressons ensuite, par l'intermédiarire des $\mathcal{N}$-fonctions, aux espaces d'Orlicz-Sobolev afin de construire un opérateur $\overline{\rho}^{>}$-multivoque de Leray-Lions “fortement monotone” sur ces espaces (voir [16]).

Nous donnons également une méthode variationnelle qui généralise le théorème de “Mountain Pass” d'Ambrosetti & Rabinowitz et qui sert à montrer l'existence de solutions pour de tels opérateurs.

La résolution des différents types de problèmes de valeurs propres est l'objet du Chapitre 4. Nous commençons par donner une application à la généralisation du théorème de “Mountain Pass” faite dans le Chapitre 3. Dans cette application, nous introduisons un opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque faisant intervenir les espaces de Sobolev aux exposants variables et vérifiant la propriété de “forte monotonie”. Cette application recouvre le résultat suivant :
Considérons les fonctions J et j définies en (1.13) *et* (1.14). *Si* $1 < q < p < +\infty$, $1 < q_M < p_M < p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ *et* $q_M > p$, *alors pour tout* $\lambda > 0$, *il existe une solution non triviale* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *telle que* $0 \in \partial J(u) - \lambda \partial j(u)$.

Nous utilisons ensuite, une variante du principe ε-variationnel d'Ekeland pour montrer deux théorèmes abstraits d'existence au voisinage de l'origine. Le premier résultat prouve l'existence pour des problèmes dits “sous-critiques” dans lesquels la compacité joue un rôle important. Ce résultat montre l'existence du problème suivant :
Considérons les fonctions J et j définies en (1.13) *et* (1.14). *Si* $1 < q < p < +\infty$, $1 < q_M < p_M < p^*$ *et* $q_M < q$, *alors pour tout* $\lambda \in]0, \lambda_*[$, *il existe une solution non triviale* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *telle que* $0 \in \partial J(u) - \lambda \partial j(u)$.

On montre aussi l'existence du problème (avec coercivité) suivant :
Considérons les fonctions J et j définies en (1.13) *et* (1.14). *Si* $1 < q < p < +\infty$, $1 < q_M < p_M < p^*$ *et* $p_M < q$, *alors pour tout* $\lambda > \lambda_{**}$, *il existe une solution non triviale* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *telle que* $0 \in \partial J(u) - \lambda \partial j(u)$.

Le deuxième a pour objet de montrer l'existence de solutions pour des problèmes dits “critiques”, là où nous perdons la compacité.

Nous terminons par donner plusieurs applications de tous les résultats mentionnés dans des domaines bornés et même dans des domaines non bornés avec un poids de type Hardy.

Quant au Chapitre 5, nous étudions l'existence de solutions pour un problème de minimisation avec des contraintes, afin d'exploiter le théorème de multiplicateur de Lagrange généralisé pour montrer l'existence pour des problèmes plus généraux. Ensuite, nous montrons un résultat de non-existence dans un cas particulier.

Nous traitons également à la fin de ce chapitre, un autre problème dans un cas de résonance au voisinage de l'origine, en d'autres termes, le potentiel j possède la même croissance que celle de l'opérateur A au voisinage de zéro.

Plusieurs applications sont données pour illustrer ces résultats. Parmi lesquels, nous montrons l'existence de solution du problème suivant :
Considérons la fonction J définie en (1.13) *et*

$$h(x,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{c^*}{p}|\sigma|^p & si \quad |\sigma| < 1, \\ \dfrac{1}{\beta}|\sigma|^\beta - |\sigma| + \dfrac{c^*}{p} + \dfrac{\beta-1}{\beta} & sinon, \end{cases}$$

où $0 < c^* < \dfrac{1}{N^p \cdot S^p}$, $S > 0$ *est la constante de Sobolev de l'injection de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *dans* $L^p(\Omega)$ *et* $p < \beta < p^*$. *Alors, il existe une solution non triviale* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *telle que* $0 \in \partial J(u) - \partial j(u)$ *où* $j(u) = \displaystyle\int_\Omega h(x, u(x))\mathrm{d}x$.

Après avoir étudié l'existence de solutions pour des problèmes de valeurs propres liées aux opérateurs $\overline{\rho}^{>}$-multivoques, nous étudions, dans le dernier chapitre, les propriétés qualitatives des fonctions propres obtenues en utilisant le "réarrangement relatif". Nous montrons alors la régularité L^∞ d'une solution positive d'un problème de valeurs propres. Ensuite, nous étudions d'une façon directe et même plus précise, la régularité L^∞ de la première fonction propre du p-Laplacien.

⁕ – ⁕ – ⁕ – ⁕ – ⁕ – ⁕ – ⁕

Chapitre 2

Quelques rappels de certains résultats classiques

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notations et des techniques utilisées dans les autres chapitres. Le chapitre est organisé comme suit : dans les deux premiers paragraphes, nous rappellerons quelques définitions et résultats sur les espaces de fonction de Banach et ceux d'Orlicz respectivement. Le paragraphe suivant aura pour objet de présenter différents notions et résultats sur la sous-différentielle de Clarke qui seront utilisés dans les chapitres suivants. Ensuite, dans le quatrième paragraphe, nous allons énoncer les théorèmes généraux (Méthodes variationnelles) pour la résolution des équations aux dérivées partielles dans le cas non-différentiable. On terminera ce chapitre par rappeler un résultat de compacité dû à A. El Hamidi et J.-M. Rakotoson qui servira à montrer la convergence forte du gradient dans des problèmes variationnels avec des exposants critiques.

2.1 Espaces de fonction de Banach

Dans cette section, on définit un espace de fonction de Banach et on donne quelques propriétés comme la complétude, la réflexivité et la dualité de cet espace.

2.1.1 Définitions et Propriétés

Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, à bord $\partial\Omega$ Lipschitzien et μ une mesure de Borel sur Ω.

Définition 2.1. *(Voir [84]) On note l'ensemble des fonctions μ-mesurables et μ-mesurables positives respectivement par :*

$$L^0(\Omega,\mu) = \Big\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \textit{ est } \mu\textit{-mesurable}\Big\},$$

et

$$L^0_+(\Omega,\mu) = \Big\{u \in L^0(\Omega,\mu) \ : \ u \geqslant 0\Big\}.$$

Les définitions et résultats qui suivent peuvent être trouvés dans [8].

Définition 2.2. *(Voir [8, page 2]) Une fonction $\rho : L^0_+(\Omega,\mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0;+\infty]$ est dite norme de fonction de Banach (ou bien norme de fonction) si $\forall f$, g et f_n dans $L^0_+(\Omega,\mu)$ et pour tout ensemble μ-mesurable $E \subset \Omega$, on a*

N1. $\rho(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ *μ-p.p.*

N2. $\rho(\lambda f) = \lambda\rho(f)$, $\forall\, \lambda > 0$.

N3. $\rho(f+g) \leqslant \rho(f) + \rho(g)$.

N4. $f \leqslant g$ *μ-p.p.* $\Longrightarrow \rho(f) \leqslant \rho(g)$.

N5. $f_n \nearrow f$ *μ-p.p.* $\Longrightarrow \rho(f_n) \longrightarrow \rho(f)$.

N6. $\mu(E) < +\infty \Longrightarrow \rho(\chi_E) < +\infty$.

N7. $\mu(E) < +\infty \Longrightarrow \displaystyle\int_E f\, d\mu \leqslant C_E\, \rho(f)$*, où* $0 < C_E < +\infty$*, est une constante indépendante de f et qui dépend seulement de E et ρ.*

On désigne par χ_E la fonction caractéristique de l'ensemble E et par $\mu(E)$ la mesure de cet ensemble.

Exemple 2.3. *Un exemple simple de norme de fonction de Banach est la norme de Lebesgue associée à l'espace $L^p(\Omega)$ pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Nous verrons plus tard dans le chapitre suivant une liste d'exemples de norme de fonction de Banach (voir Exemple 3.11).*

Définition 2.4. *(Voir [8, page 3]) Soit ρ une norme de fonction, on définit l'espace de fonction de Banach par*

$$X = L(\Omega,\rho) = \Big\{ f \in L^0(\Omega,\mu) : \rho(|f|) < +\infty \Big\},$$

et on munit X de la norme $\|f\|_X = \rho(|f|)$.

L'espace de fonction de Banach X muni de la dernière norme vérifie plusieurs propriétés, dans ce qui suit, on cite parmi ces propriétés celles qu'on va utiliser par la suite, pour plus de détails voir [8].

Proposition 2.5. *(Voir [8, page 4]) Soit (f_n) une suite des fonctions dans l'espace X.*

(i) *Si $0 \leqslant f_n \nearrow f$ μ-p.p. alors,*

ou bien $f \notin X$ *et* $\|f_n\|_X \nearrow +\infty$,

ou bien $f \in X$ *et* $\|f_n\|_X \nearrow \|f\|_X$.

(ii) *[Lemme de Fatou] :*

Si $f_n \to f$ μ-p.p. et $\liminf\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_X < +\infty$, alors $f \in X$ et

$$\|f\|_X \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_X.$$

(iii) *$(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace complet.*

(iv) *Si $f_n \to f$ dans X, alors $f_n \to f$ converge en mesure sur tout ensemble de mesure finie. En particulier, il existe une sous-suite de (f_n) telle que*

$$f_n(x) \to f(x) \quad \mu\text{-p.p.}$$

On termine ce paragraphe par la propriété topologique suivante :

Théorème 2.6. *(Voir [8, page 7]) Soient X et Y deux espaces de fonction de Banach. Si $X \subset Y$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\|f\|_Y \leqslant c\|f\|_X$ c'est-à-dire*

$$X \hookrightarrow Y \text{ (injection continue).}$$

2.1.2 Espace associé d'un espace de fonction de Banach

Dans ce paragraphe, on définit la norme associée ρ' à une norme de fonction de Banach ρ. Ensuite, on introduit l'espace associé défini à partir de cette norme associée. Dans la section suivante et sous certaines hypothèses sur ρ, nous verrons que cet espace associé $L(\Omega, \rho')$ n'est autre que l'espace dual $L(\Omega, \rho)^*$.

Définition 2.7. *(Voir [8, page 8]) Soit ρ une norme de fonction, on définit sa norme associée ρ' sur $L^0_+(\Omega, \mu)$ par*

$$\rho'(g) = \sup\left\{\int_\Omega fg\, d\mu : f \in L^0_+(\Omega, \mu) \text{ et } \rho(f) \leqslant 1\right\}, \text{ pour } g \in L^0_+(\Omega, \mu).$$

On a alors,

Théorème 2.8. *(Voir [8, page 8]) Soit ρ une norme de fonction, alors sa norme associée ρ' définie ci-dessus est aussi une norme de fonction.*

Définition 2.9. *L'espace de fonction de Banach défini par*

$$X' = L(\Omega, \rho') = \left\{g \in L^0(\Omega, \mu) : \rho'(|g|) < +\infty\right\},$$

est dit espace associé à X ; X' est muni de la norme

$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{\int_\Omega |fg|\, d\mu : f \in X \text{ et } \|f\|_X \leqslant 1\right\}, \text{ pour } g \in X'.$$

On déduit immédiatement de cette définition le théorème suivant :

Théorème 2.10. *(Inégalité de Hölder, voir [8, page 9]) Soit X un espace de fonction de Banach et X' son espace associé, si $f \in X$ et $g \in X'$, alors fg est intégrable et on a*

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu \leqslant \|f\|_X \|g\|_{X'}.$$

Remarque 2.11. *Soient p, q tels que $1 < p < +\infty$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, alors l'espace associé à l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est $L^q(\Omega)$.*

2.1.3 Dualité et Réflexivité

Pour pouvoir trouver une certaine relation entre l'espace X' et l'espace dual de X noté X^*, on a besoin d'introduire la définition d'une norme absolument continue.

Définition 2.12. *(Voir [8, page 14]) On dit qu'un espace de fonction de Banach X possède une norme absolument continue, si pour tout $f \in X$, on a*

$$\|f\chi_{E_n}\|_X \to 0, \text{ pour toute suite } (E_n) \subset \Omega \text{ avec } E_{n+1} \subset E_n \text{ et } \mu(E_n) \to 0.$$

On termine ce paragraphe par un théorème qui assure la réflexivité d'un espace de fonction de Banach.

Théorème 2.13. *(Voir [8, page 23]) L'espace X est réflexif si et seulement si X ainsi que son espace associé X' ont tous les deux des normes absolument continues.*

Exemple 2.14. *L'espace $X = L^p(\Omega)$ pour $1 < p < +\infty$ et l'espace $X' = L^{p'}(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ possèdent des normes absolument continues (on a le théorème de la convergence dominée).*

2.2 Espaces d'Orlicz

Dans cette section, on présente une généralisation des espaces de Lebesgue dans lesquels la fonction convexe $t \mapsto |t|^p$ joue un rôle important, on va la remplacer par une autre fonction convexe plus générale Φ dite "$\mathcal{N}$-fonction" et les espaces ainsi obtenus sont les espaces d'Orlicz $L^{\Phi}(\Omega, \mu)$ ou tout simplement $L^{\Phi}(\Omega)$ (voir [2, Chapitre 8], [38], [46], [65] et [86]).

Définition 2.15. *Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si pour tout $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, on a*

$$f(\alpha t + (1-\alpha)s) \leqslant \alpha f(t) + (1-\alpha) f(s), \qquad \forall\, t, s \in \mathbb{R}.$$

Définition 2.16. *(Voir [2], [65, page 33]) Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction ayant les propriétés suivantes :*

(a) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ *si* $t > 0$ *et* $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$.

(b) $\varphi(\cdot)$ *est croissante sur* $[0; +\infty[$ *c'est-à-dire* $0 \leqslant s < t \Rightarrow \varphi(s) \leqslant \varphi(t)$.

(c) $\varphi(\cdot)$ *est continue à droite sur* $[0; +\infty[$.

Alors, la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s)\, ds,$$

est dite $\mathcal{N}$-fonction (voir la figure 2.1).

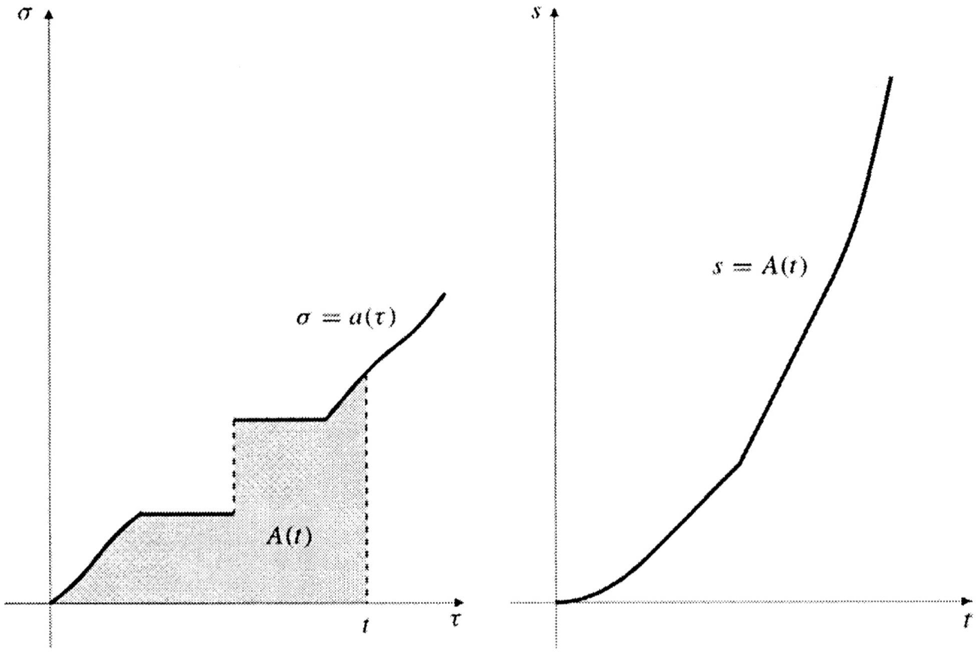


FIGURE 2.1 – Le graphe de $\sigma = a(\tau)$ et celui de la $\mathcal{N}$-fonction $s = A(t)$.

2.2.1 Les propriétés d'une $\mathcal{N}$-fonction

Sous les hypothèses de la Définition 2.16, une $\mathcal{N}$-fonction vérifie toutes les propriétés de la proposition suivante :

Proposition 2.17. *(Voir [46, page 7]) Si φ vérifie* **(a)**, **(b)** *et* **(c)** *de la Définition 2.16 et Φ la $\mathcal{N}$-fonction correspondante, alors :*

(i) $\Phi(\cdot)$ *est une fonction positive, paire, continue et* $\Phi(0) = 0$.

(ii) $\Phi(\cdot)$ *est strictement croissante sur* $]0; +\infty[$.

(iii) $\Phi(\cdot)$ *est convexe.*

(iv) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Phi(t)}{t} = 0 \quad et \quad \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\Phi(t)}{t} = +\infty.$

(v) $\dfrac{\Phi(t)}{t}$ *est une fonction strictement croissante sur* $]0; +\infty[$.

Dans la proposition suivante, on introduit une caractérisation de la $\mathcal{N}$-fonction :

Proposition 2.18. *(Voir [46, page 9]) Soit $\Phi(\cdot)$ une fonction continue convexe, alors*

$$\Phi(\cdot) \text{ est une } \mathcal{N}\text{-fonction} \iff \Phi(\cdot) \text{ est paire et vérifie la propriété (iv)}.$$

Définition 2.19. *(Voir [2]) Soit Φ une $\mathcal{N}$-fonction, on définit la $\mathcal{N}$-fonction $\overline{\Phi}$ complémentaire de Φ par*

$$\overline{\Phi}(t) = \max_{s \geqslant 0} \Big(ts - \Phi(s) \Big).$$

Cette $\mathcal{N}$-fonction $\overline{\Phi}$ joue un rôle important dans la définition de l'espace dual de l'espace d'Orlicz.

Définition 2.20. *(Voir [86]) Soit Φ une $\mathcal{N}$-fonction, on introduit une notion qui caractérise la rapidité de la croissance de Φ : On dit que Φ vérifie la condition $(\triangle_2)$ globalement s'il existe une constante positive $c > 0$ telle que pour tout $t \geqslant 0$, on a*

$$\Phi(2t) \leqslant c\,\Phi(t). \tag{2.1}$$

De même, on dit que Φ vérifie la condition $(\triangle_2)$ au voisinage de l'infini s'il existe $t_0 > 0$ telle que pour tout $t \geqslant t_0$, la relation (2.1) est vérifiée.

Remarque 2.21. *(Voir [86, page 26]) Cette définition joue un rôle important dans la construction de l'espace d'Orlicz. De plus, si Φ vérifie la condition $(\triangle_2)$, alors il existe une constante positive $c > 0$, $t_0 > 0$ et $\alpha > 1$ tels que*

$$\Phi(t) \leqslant c|t|^{\alpha}, \qquad \forall t \geqslant t_0.$$

Exemple 2.22. *(Voir [86]) On donne certains exemples de $\mathcal{N}$-fonctions :*

- ⊛ $\Phi_1(t) = (1+|t|)\log(1+|t|) - |t|$ *et* $\Phi_2(t) = |t|^p$, $p > 1$ *sont deux $\mathcal{N}$-fonctions qui vérifient la condition $(\triangle_2)$.*

Par contre,

- ⊛ $\Psi_1(t) = \exp(|t|) - |t| - 1$ *et* $\Psi_2(t) = \exp(|t|^p) - 1$, $p > 1$ *sont deux $\mathcal{N}$-fonctions qui ne vérifient pas la condition $(\triangle_2)$.*

On note que $\overline{\Psi_1}(t) = \Phi_1(t)$ c'est-à-dire la $\mathcal{N}$-fonction $\overline{\Phi}$ complémentaire d'une $\mathcal{N}$-fonction Φ qui vérifie la condition $(\triangle_2)$ ne vérifie pas nécessairement $(\triangle_2)$.

Définition 2.23. *(Voir [66]) Soit Φ une $\mathcal{N}$-fonction, la fonction donnée par ρ_Φ : $u \longmapsto \displaystyle\int_\Omega \Phi(u)d\mu$ est dite modulaire.*

Définition 2.24. *(Voir [86]) Soit Φ une $\mathcal{N}$-fonction, on définit la classe d'Orlicz généralisée par*

$$K_\Phi(\Omega,\mu) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \mu\text{-mesurable et } \int_\Omega \Phi\Big(|u(x)|\Big)\, d\mu < +\infty \right\}.$$

Dans ce qui suit et pour simplifier la manipulation dans l'espace d'Orlicz, on va imposer quelques hypothèses sur la mesure μ. Pour plus de détails voir [86, Chapitre 3].

Définition-Hypothèse 2.25. *(Voir [86, page 46]) On suppose désormais que la mesure μ satisfait la propriété de "sous ensemble fini" c'est-à-dire si E est un ensemble μ-mesurable et si $\mu(E) > 0$, alors il existe un ensemble F μ-mesurable tel que $F \subset E$ et $0 < \mu(F) < +\infty$. Cette propriété empêche d'avoir une mesure comme*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & si\ A = \varnothing, \\ +\infty & si\ A \neq \varnothing. \end{cases}$$

Définition 2.26. *(Voir [86, page 46]) On dit qu'un ensemble A est un atome de μ (μ-atome) si $\mu(A) > 0$ et si pour tout ensemble B μ-mesurable tel que $B \subset A$ on a ou bien $\mu(B) = 0$ ou bien $\mu(A - B) = 0$.*

Définition 2.27. *(Voir [86, page 46]) Un ensemble D μ-mesurable est dit diffus par rapport à μ (en anglais : D is diffuse for μ) s'il ne contient aucun μ-atome, ce qui implique que pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \mu(D)$, on peut trouver un ensemble μ-mesurable E tel que $E \subset D$ et $\mu(E) = \lambda$.*

En général l'espace $K_\Phi(\Omega, \mu)$ n'est pas un espace vectoriel, mais le lemme suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour l'être.

Lemme 2.28. *(Voir [86, page 46]) Supposons qu'il existe un ensemble de mesure positive et diffus par rapport à la mesure μ. Alors, $K_\Phi(\Omega, \mu)$ est un espace vectoriel si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite*

($\triangle_2^0$) *Φ vérifie la condition ($\triangle_2$) globalement,*
ou
($\triangle_2^\infty$) *Φ vérifie la condition ($\triangle_2$) au voisinage de l'infini et $\mu(\Omega) < +\infty$.*

Pour simplifier, on dit qu'une $\mathcal{N}$-fonction Φ vérifie la condition ($\triangle_2$) si elle vérifie ($\triangle_2^0$) ou ($\triangle_2^\infty$).

Remarque 2.29. *(Voir [86, page 47]) L'hypothèse "il existe un ensemble de mesure positive et diffus par rapport à la mesure μ" est utilisée pour démontrer le sens direct du Lemme 2.28.*

Définition 2.30. *(Voir [86, page 49]) Soit Φ une $\mathcal{N}$-fonction, on définit l'espace d'Orlicz généralisé par*

$$L^\Phi(\Omega, \mu) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \mu\text{-mesurable et } \exists \lambda > 0, \int_\Omega \Phi\left(\lambda |u(x)|\right)\, d\mu < +\infty \right\}.$$

L'espace $L^\Phi(\Omega, \mu)$ est un espace de Banach muni de la norme de Luxemburg (norme de fonction de Banach) suivante (voir [86, page 68]) :

$$\rho(u) = \|u\|_\Phi = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)\, d\mu \leqslant 1 \right\}. \tag{2.2}$$

Par conséquent,

$$L^\Phi(\Omega, \mu) = L(\Omega, \rho).$$

Proposition 2.31. *(Voir [86]) Soit $u \in L^{\Phi}(\Omega, \mu)$ telle que $u \neq 0$, alors on a :*

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{\Phi}}\right) \, d\mu \leqslant 1.$$

La norme associée à ρ (voir Définition 2.7) est une norme équivalente à la norme suivante (grâce à la Proposition 2.32, voir aussi [86, page 61]) :

$$\inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\Omega} \overline{\Phi}\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right) \, d\mu \leqslant 1\right\}, \tag{2.3}$$

où $\overline{\Phi}$ est la $\mathcal{N}$-fonction complémentaire de Φ donnée par la Définition 2.19.

L'espace d'Orlicz qui correspond à $\overline{\Phi}$ est

$$L^{\overline{\Phi}}(\Omega, \mu) = L(\Omega, \rho').$$

L'inégalité de Hölder généralisée s'écrit :

Proposition 2.32. *(Voir [2]) Soit Φ et $\overline{\Phi}$ deux $\mathcal{N}$-fonctions complémentaires (ou conjuguées), alors*

$$\left|\int_{\Omega} u(x)v(x) \, d\mu\right| \leqslant 2\|u\|_{\Phi}\|v\|_{\overline{\Phi}}. \tag{2.4}$$

Proposition 2.33. *(Voir [2], [86, page 77]) Si Φ vérifie la condition $(\triangle_2)$ (c'est-à-dire si l'une des conditions $(\triangle_2^0)$ ou $(\triangle_2^\infty)$ du Lemme 2.28 est vérifiée), alors la classe d'Orlicz et l'espace d'Orlicz généralisés coïncident c'est-à-dire*

$$K_{\Phi}(\Omega, \mu) = L^{\Phi}(\Omega, \mu).$$

Par suite, si Φ vérifie la condition $(\triangle_2)$, on peut prendre la définition de $K_{\Phi}(\Omega, \mu)$ comme une définition de l'espace d'Orlicz. Ce qui simplifie la manipulation de cet espace.

Proposition 2.34. *(Voir [86, page 83]) Soient Φ une $\mathcal{N}$-fonction qui vérifie la condition $(\triangle_2)$ et $(u_n)_n$ une suite dans $L^{\Phi}(\Omega, \mu)$. Alors, la convergence modulaire et la convergence forte vers un élément $u \in L^{\Phi}(\Omega, \mu)$ sont équivalentes c'est-à-dire :*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} \Phi(u_n - u) d\mu = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \|u_n - u\|_{\Phi} = 0.$$

Pour pouvoir comparer deux espaces d'Orlicz, on introduit la définition suivante :

Définition 2.35. *(Voir [2]) Soient Φ_1 et Φ_2 deux $\mathcal{N}$-fonctions. On dit que Φ_2 domine Φ_1 globalement (au voisinage de l'infini) s'il existe une constante positive $c > 0$ telle que*

$$\Phi_1(t) \leqslant \Phi_2(ct), \quad \forall\, t \geqslant 0 \ (\forall\, t \geqslant t_0).$$

Proposition 2.36. *(Voir [65], [86, page 155]) Soient Φ_1 et Φ_2 deux $\mathcal{N}$-fonctions. Si Φ_2 domine Φ_1, alors on a l'injection continue suivante*

$$L^{\Phi_2}(\Omega,\mu) \hookrightarrow L^{\Phi_1}(\Omega,\mu).$$

Définition-Hypothèse 2.37. *(Voir [65, page 36]) Une mesure μ est dite séparable s'il existe une suite d'ensembles mesurables E_n tels que*

(i) $\mu(E_n) < +\infty$, *pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Pour tout ensemble μ-mesurable A tel que $\mu(A) < +\infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A \vartriangle E_n) < \varepsilon$. (où $\vartriangle$ désigne la différence symétrique c'est-à-dire $C \vartriangle D = (C \cup D) - (C \cap D)$)*

Théorème 2.38. *(Voir [65, page 36], [46, page 85], [86, page 91]) Soit Φ une $\mathcal{N}$-fonction et μ une mesure séparable, alors*

$$\Phi \text{ vérifie la condition } (\triangle_2) \Longrightarrow L^{\Phi}(\Omega,\mu) \text{ est séparable.}$$

En utilisant la condition $(\triangle_2^0)$ ou $(\triangle_2^\infty)$, on termine cette Section en donnant une relation entre l'espace d'Orlicz associé et le dual de l'espace d'Orlicz.

Théorème 2.39. *(Voir [2], [86, page 112]) Soit Φ et $\overline{\Phi}$ deux $\mathcal{N}$-fonctions complémentaires, alors*

$$L^{\Phi}(\Omega,\mu) \text{ est réflexif} \Longleftrightarrow \Phi \text{ et } \overline{\Phi} \text{ vérifient la condition } (\triangle_2).$$

Par conséquent, on a le résultat suivant :

Corollaire 2.40. *Si Φ et $\overline{\Phi}$ vérifient la condition $(\triangle_2)$, alors l'espace d'Orlicz associé à $L^{\Phi}(\Omega)$ et son dual coïncident et on a*

$$\left(L^{\Phi}(\Omega,\mu)\right)' = L(\Omega,\rho)' = L\left(\Omega,\rho'\right) = L^{\overline{\Phi}}(\Omega,\mu).$$

Théorème 2.41. *(Voir [46, page 88]) Soit Φ une $\mathcal{N}$-fonction, alors*

$$L^{\Phi}(\Omega,\mu) \text{ a une norme absolument continue} \Longleftrightarrow \Phi \text{ vérifie la condition } (\triangle_2).$$

2.3 Sous-différentielle

Dans le premier paragraphe, on donne la définition de la sous-différentielle pour le cas des fonctions convexes (voir [25]). Ensuite, dans le second, on la donne pour des fonctions localement Lipschitziennes (voir [18], [64] et [35]). Ce dernier cas englobe le premier comme le montre le Théorème 2.43.

2.3.1 Cas des fonctions convexes

Soient X un espace de Banach et $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction à valeurs réelles. On définit le domaine effectif de φ par

$$\text{dom } \varphi = \Big\{ x \in X : \varphi(x) < +\infty \Big\}.$$

Pour éliminer le cas trivial lorsque $\varphi \equiv +\infty$, on dit qu'une fonction est propre si son domaine effectif est non vide. On commence par donner quelques résultats sur les fonctions convexes, pour les démonstrations et les détails voir [35].

Lemme 2.42. *(Voir [35, page 34]) Si $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction convexe et continue en un certain point $x_0 \in$ dom φ, alors il existe $r > 0$ telle que φ soit Lipschitzienne sur la boule $\overline{B}(x_0, r)$.*

D'après le Lemme 2.42, on donne le Théorème 2.43 qui est à l'origine de la théorie de Clarke que l'on va détailler dans les sections 2.3.3 et 2.3.4 (voir [18] et [35]).

Théorème 2.43. *(Voir [35, page 35]) Si $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement, alors φ est localement Lipschitzienne (voir Définition 2.53) sur $\overset{\circ}{int}\{dom\ \varphi\}$.*
$\overset{\circ}{int}\{\cdot\}$ d'un ensemble désigne son intérieur.

Pour la suite de cette section, on introduit la définition suivante :

Définition 2.44. *(Voir [35]) Soient X, Y deux espaces de Banach et $f : X \to P(Y)$ une multi-fonction (c'est-à-dire c'est une fonction qui donne aux éléments de X, comme image, des éléments dans l'ensemble des parties de Y, noté $P(Y)$).*
On dit que la multi-fonction f est semi-continue inférieurement (s.c.i.) en un point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert $V \subset Y$ tel que $f(x_0) \cap V \neq \varnothing$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(x) \cap V \neq \varnothing$, pour tout $x \in U$.
Si f est semi-continue inférieurement en tout point $x \in X$, on dit que f est semi-continue inférieurement.

Le théorème suivant est un outil majeur de ce qu'on appelle "méthode directe de calcul des variations".

Théorème 2.45. *(Voir [35, page 37]) Soient X un espace de Banach réflexif et $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, convexe, semi-continue inférieurement (ou propre, faiblement semi-continue inférieurement (voir Proposition A.2 et [10])) et coercive c'est-à-dire*

$$\lim_{\|x\|_X \to +\infty} \varphi(x) = +\infty,$$

alors il existe un minimum global $x_0 \in X$ de φ tel que

$$\varphi(x_0) = \inf_{x \in X} \varphi(x).$$

D'après ce dernier théorème, on déduit que l'ensemble des fonctions propres, convexes et semi-continues inférieurement a une propriété importante dans l'analyse convexe. On notera dans la suite $\Gamma_0(X)$ l'ensemble de ces fonctions.

Définition 2.46. *(Voir [25], [35, page 38]) Soit X un espace de Banach et $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on appelle $\overline{\varphi} : X^* \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ la fonction conjuguée de φ ou la transformation de Legendre de φ, la fonction définie par*

$$\overline{\varphi}(x^*) = \sup \Big\{ \langle x^*, x \rangle - \varphi(x) : x \in dom\ \varphi \Big\}.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité entre X^* et X.

Remarque 2.47. *D'après cette définition, on a pour tous $x \in X$ et $x^* \in X^*$,*

$$\langle x^*, x \rangle \leqslant \varphi(x) + \overline{\varphi}(x^*). \tag{2.5}$$

Cette inégalité est dite inégalité de Young-Fenchel. Sous certaines hypothèses, l'égalité aura lieu (voir Proposition 2.50).

2.3.2 Sous-différentielle des fonctions convexes

Après avoir énoncé les éléments de base des fonctions convexes et leurs propriétés, on va définir la sous-différentielle de ces fonctions qui généralise la notion du gradient des fonctions régulières.

Définition 2.48. *(Voir [25], [35, page 42]) Soit $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, convexe. La sous-différentielle de φ en un point x est l'ensemble défini par*

$$\partial\varphi(x) = \Big\{ x^* \in X^* : \langle x^*, y - x \rangle \leqslant \varphi(y) - \varphi(x),\ \forall y \in dom\ \varphi \Big\}.$$

Ceci définit une fonction multivoque $\partial\varphi : X \to 2^{X^*}$, où 2^{X^*} désigne l'ensemble des parties de X^*.
Tout élément x^* de $\partial\varphi(x)$ est dit sous-gradient de φ au point x. On appelle domaine de $\partial\varphi$, l'ensemble donné par

$$Dom\ \partial\varphi = \Big\{ x \in X : \partial\varphi(x) \neq \varnothing \Big\}.$$

On dit φ est sous-différentiable en $x \in X$, si $x \in Dom\ \partial\varphi$.

Dans la proposition suivante, on donne une condition sur la fonction φ pour que l'ensemble Dom $\partial\varphi$ ne soit pas vide. En d'autres termes, on donne une hypothèse de sorte que φ soit sous-différentiable en un certain point $u_0 \in X$.

Proposition 2.49. *(Voir [35, page 43], [25]) Soit $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe, continue en un point $u_0 \in X$, alors $u_0 \in Dom\ \partial\varphi$ et $\partial\varphi(u_0)$ est un ensemble borné, faiblement* -compact de X^*.*

Proposition 2.50. *(Voir [21, § 23], [35, page 42]) Soit $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, convexe. Alors, on a égalité dans* (2.5).

$$x^* \in \partial\varphi(x) \Longleftrightarrow \varphi(x) + \overline{\varphi}(x^*) = \langle x^*, x \rangle .$$

Si en plus, on a $\varphi \in \Gamma_0(X)$ c'est-à-dire φ est s.c.i. , alors

$$x^* \in \partial\varphi(x) \Longleftrightarrow x \in \partial\overline{\varphi}(x^*).$$

Proposition 2.51. *(Voir [25], [35, page 47]) Soient X, Y deux espaces de Banach, $\Lambda : X \to Y$ une fonction linéaire continue, $\Lambda^* : Y^* \to X^*$ sa transposée et $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue. Alors, la sous-différentielle de la fonction composée $\varphi \circ \Lambda$ est donnée par :*

$$\partial\left(\varphi \circ \Lambda\right)(u) = \Lambda^*\Big(\partial\varphi(\Lambda u)\Big), \ \forall u \in X.$$

Avant de passer au cas des fonctions localement Lipschitziennes, on termine ce paragraphe par définir la dérivée directionnelle d'une fonction.

Définition 2.52. *(Voir [35, page 44]) Soit $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, convexe. On définit la dérivée directionnelle de φ en $x \in dom\ \varphi$ dans la direction $h \in X$ par*

$$\varphi'(x; h) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\varphi(x + \lambda h) - \varphi(x)}{\lambda}.$$

2.3.3 Cas des fonctions localement Lipschitziennes

Dans cette Section, on va passer à des fonctions plus générales qui peuvent être non-convexes. Pour cela, on donne la définition des fonctions localement Lipschitziennes qui sont à la base de la théorie de la sous-différentielle généralisée de Clarke qui a été introduite par Francis H. Clarke en 1976 dans son article [19] (pour plus de détails voir [18], [64] et [35]).

Dans la suite, on considère X un espace de Banach.

Définition 2.53. *On dit que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction localement Lipschitzienne si $\forall\, v \in X$, il existe un voisinage $U(v)$ de v et une constante $K(v) > 0$ tels que*

$$|f(u) - f(w)| \leqslant K(v)\, \|u - w\|_X\ , \qquad \forall\, u, w \in U(v).$$

Remarque 2.54. *On rappelle que si $\varphi \in \Gamma_0(X)$, alors φ est localement Lipschitzienne sur $\overset{\circ}{int}\{dom\ \varphi\}$ (voir Théorème 2.43).*

Lemme 2.55. *(Théorème de Rademacher) Si $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction localement Lipschitzienne, alors f est Fréchet-différentiable presque partout. Pour la preuve de ce résultat, on peut consulter par exemple [40] et [35].*

La définition suivante donne une généralisation de la dérivée directionnelle d'une fonction convexe.

Définition 2.56. *(Voir [64], [18, page 25]) Pour toute fonction $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ localement Lipschitzienne, sa dérivée directionnelle généralisée en $u \in X$ dans la direction $v \in X$ est donnée par*

$$\varphi^0(u;v) = \limsup_{\lambda \searrow 0,\, h \to 0} \frac{\varphi(u+h+\lambda v) - \varphi(u+h)}{\lambda}.$$

Remarque 2.57. *On note que cette définition n'impose pas l'existence d'une limite (car c'est une limite supérieure seulement). De plus, ce qui la diffère de la définition traditionnelle de la dérivée directionnelle c'est que le point de base u dans le quotient varie (en $u + h$).*

Des propriétés importantes de $\varphi^0(\cdot;\cdot)$, pour la suite, sont données dans le reste de cette Section où la fonction $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est toujours supposée localement Lipschitzienne (pour les démonstrations voir [18] et [35]).

Proposition 2.58. *(Voir [64], [18, page 25]) Soit $u \in X$ un élément fixé, alors*

(a) *$v \mapsto \varphi^0(u;v)$ est sous-linéaire c'est-à-dire $\forall\, v_1, v_2 \in X$, on a*

$$\varphi^0(u; v_1 + v_2) \leqslant \varphi^0(u;v_1) + \varphi^0(u;v_2).$$

(b) *$v \mapsto \varphi^0(u;v)$ est positivement homogène c'est-à-dire*

$$\varphi^0(u;\lambda v) = \lambda \varphi^0(u;v), \quad \forall\, \lambda > 0.$$

(c) *$v \mapsto \varphi^0(u;v)$ est convexe, continue et $|\varphi^0(u;v)| \leqslant K_u \|v\|_X$, où $K_u > 0$ est la constante de Lipschitz de φ au voisinage de $u \in X$.*

(d) *$v \mapsto \varphi^0(u;v)$ est Lipschitzienne et $K_u > 0$ est sa constante de Lipschitz c'est-à-dire*

$$\left|\varphi^0(u;v_1) - \varphi^0(u;v_2)\right| \leqslant K_u \left\|v_1 - v_2\right\|_X.$$

(e) *$\varphi^0(u;-v) = (-\varphi)^0(u;v)$.*

Proposition 2.59. *(Voir [18, page 26]) $(u,v) \mapsto \varphi^0(u;v)$ est une fonction semi-continue supérieurement (s.c.s.) sur $X \times X$ c'est-à-dire si (u_n) et (v_n) sont deux suites dans X qui convergent respectivement vers u et v, alors*

$$\limsup_{n \to +\infty} \varphi^0(u_n; v_n) \leqslant \varphi^0(u;v).$$

2.3.4 Sous-différentielle de Clarke des fonctions localement Lipschitziennes

Définition 2.60. *(Voir [64], [18, page 27]) Soit φ une fonction localement Lipschitzienne sur X, la sous-différentielle généralisée de Clarke de φ (ou tout simplement la sous-différentielle de φ) en $u \in X$, est la sous-différentielle de la fontion convexe $v \mapsto \varphi^0(u;v)$ en 0. Plus précisément, on a*

$$\xi^* \in \partial\varphi(u) \subset X^* \iff \langle \xi^*, v\rangle \leqslant \varphi^0(u;v), \forall v \in X.$$

Autrement dit, c'est le sous ensemble de X^*, donné par

$$\partial\varphi(u) = \Big\{\xi^* \in X^* : \langle \xi^*, v\rangle \leqslant \varphi^0(u;v), \forall v \in X\Big\}.$$

Remarque 2.61. *On note qu'on a utilisé la même notation "$\partial\varphi(u)$" (voir Définition 2.48) de la sous-différentielle des fonctions convexes pour définir la sous-différentielle des fonctions localement Lipschitziennes, cela ne causera aucune confusion car si on suppose que φ est une fonction convexe, alors les deux Définitions 2.48 et 2.60 sont équivalentes.*

Dans ce qui suit, on donne quelques propriétés de la sous-différentielle généralisée de Clarke qu'on va utiliser fréquemment dans les chapitres suivants de cette thèse (pour les détails voir [18] et [35]).

Proposition 2.62. *(Voir [64], [18, page 27]) Soit φ une fonction localement Lipschitzienne sur X et $K_u > 0$ est la constante de Lipschitz au voisinage de u, alors*

(a) *$\partial\varphi(u) \subseteq X^*$ est un ensemble non vide, convexe et faiblement* -compact. Plus précisément, la fonction φ est sous-différentiable en tout point de X.*

(b) *$\forall \xi^* \in \partial\varphi(u)$, on a $\|\xi^*\|_* \leqslant K_u$, où $\|\cdot\|_*$ est la norme dans l'espace X^* donnée par $\|\xi^*\|_* = \sup\Big\{ \langle \xi^*; v\rangle : v \in X, \|v\|_X \leqslant 1\Big\}$.*

(c) *$\forall v \in X$, on a*
$$\varphi^0(u;v) = \max\Big\{ \langle \xi^*; v\rangle : \xi^* \in \partial\varphi(u)\Big\}.$$

On considère la multi-fonction $\partial\varphi : X \longrightarrow 2^{X^*} \setminus \{\varnothing\}$, on donnera dans les propositions qui suivent quelques résultats utiles de cette multi-fonction (pour les preuves voir [18] et [35]).

Proposition 2.63. *(Voir [18], [14, page 105]) $u \mapsto \partial\varphi(u)$ est une multi-fonction s.c.s. dans le sens où $\forall u_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ et $v \in X$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall w^* \in \partial\varphi(u)$ où $\|u - u_0\| < \delta$, il existe $w_0^* \in \partial\varphi(u_0)$ tel que*

$$|\, \langle w^* - w_0^*\,; v\rangle \,| < \varepsilon.$$

Proposition 2.64. *(Voir [18, page 29]) $u \mapsto \partial\varphi(u)$ est une multi-fonction faiblement* -fermée c'est-à-dire si (u_n) et (ξ_n^*) sont deux suites dans X et X^* respectivement telles que $\xi_n^* \in \partial\varphi(u_n)$ et on suppose que u_n converge vers u dans X et ξ_n^* converge vers ξ^* dans X^* muni de la topologie faible*, alors*

$$\xi^* \in \partial\varphi(u).$$

Proposition 2.65. *(Voir [18, page 38], [14]) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) $\partial(\lambda\varphi)(u) = \lambda\partial\varphi(u)$.

(b) *Si u est un extremum local (maximum ou minimum) de φ, alors $0 \in \partial\varphi(u)$. Dans ce cas, on dit que u est un point critique de φ.*

Proposition 2.66. *(Voir [18, page 38]) Si $\varphi_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$ sont N fonctions localement Lipschitziennes, alors*

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\right)(u) \subseteq \sum_{i=1}^{N}\partial\varphi_i(u). \tag{2.6}$$

Si en particulier, toutes les fonctions φ_i sont convexes continues ou bien plus généralement si

$$\varphi_i{}'(u;h) \doteq \lim_{\lambda\searrow 0}\frac{\varphi_i(u+\lambda h)-\varphi_i(u)}{\lambda} = \varphi_i^0(u;h) \quad \forall u,\ \forall h \in X.$$

Alors, on a, dans ce cas, une égalité dans la relation (2.6).

Définition 2.67. *(Voir [18, page 39]) Soit $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne (non nécessairement convexe). On dit que φ est régulière au point $u \in X$, si $\forall h \in X$, $\varphi'(u;h)$ existe et on a*

$$\varphi'(u;h) = \varphi^0(u;h), \quad \forall h \in X.$$

La sous-différentielle de la composée de deux fonctions est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.68. *(Voir [18, page 45]) Soient X, Y deux espaces de Banach, $\Lambda : X \to Y$ une fonction continue et Gâteaux-différentiable et $\psi : Y \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne. Alors, on a*

(1) *$\psi \circ \Lambda : X \to \mathbb{R}$ est localement Lipschitzienne,*

(2) *la sous-différentielle de $\psi \circ \Lambda$ est donnée par*

$$\begin{aligned}\partial\left(\psi\circ\Lambda\right)(u) &\subseteq [\Lambda']^*\Big(\partial\psi(\Lambda u)\Big),\\ &\subseteq \partial\psi(\Lambda u)\circ\Lambda'(u) = \Big\{w^*\circ\Lambda'(u) : w^* \in \partial\psi(\Lambda u)\Big\},\end{aligned}$$

où $[\Lambda']^*$ *est l'opérateur adjoint de* Λ'.
Si

$$\psi'(\Lambda u; h) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\psi(\Lambda u + \lambda h) - \psi(\Lambda u)}{\lambda} = \psi^0(\Lambda u; h) \quad \forall u, \forall h,$$

ou bien, en particulier, si la fonction ψ *est convexe et continue sur* Y*, alors on a une égalité (voir Proposition 2.51).*

La sous-différentielle de la multiplication de deux fonctions localement Lipschitziennes est telle que :

Proposition 2.69. *(Voir [18, page 48]) Si* $\varphi_1, \varphi_2 : X \to \mathbb{R}$ *deux fonctions localement Lipschitziennes, alors* $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ *est localement Lipschitzienne et on a*

$$\partial(\varphi_1\varphi_2)(u) = \varphi_1(u)\partial\varphi_2(u) + \varphi_2(u)\partial\varphi_1(u).$$

La sous-différentielle d'un quotient de deux fonctions localement Lipschitziennes est comme suit :

Proposition 2.70. *(Voir [18, page 48]) Si* $\varphi_1, \varphi_2 : X \to \mathbb{R}$ *deux fonctions localement Lipschitziennes et* $\varphi_2(u) \neq 0$*, alors* $\varphi = \dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}$ *est localement Lipschitzienne au voisinage de* $u \in X$ *et*

$$\partial\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)(u) = \frac{\varphi_2(u)\partial\varphi_1(u) - \varphi_1(u)\partial\varphi_2(u)}{(\varphi_2(u))^2}.$$

Proposition 2.71. *(Voir [14, page 107]) Soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable et localement bornée. On considère la fonction intégrale définie par*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\xi) d\xi.$$

Alors, on a les propriétés suivantes :

(i) Φ *est localement Lipschitzienne.*

(ii) *La sous-différentielle de* Φ *en tout point* t *est caractérisée par :*

$$\partial\Phi(t) \subset \left[\liminf_{\sigma \to t} \varphi(\sigma);\ \limsup_{\sigma \to t} \varphi(\sigma)\right].$$

(iii) *Si, de plus, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t \pm 0)$ *existe, alors*

$$\partial\Phi(t) = \left[\liminf_{\sigma \to t} \varphi(\sigma);\ \limsup_{\sigma \to t} \varphi(\sigma)\right].$$

Le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions localement Lipschitziennes s'énonce de la manière suivante :

Théorème 2.72. *(Voir [18, page 41]) Soient $u, v \in X$ et $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne sur un ouvert $U \subseteq X$ contenant le segment fermé $[u; v]$ défini par :*

$$[u; v] = \Big\{(1-t)u + tv : 0 \leqslant t \leqslant 1\Big\}.$$

Alors, il existe $w \in \,]u; v[= \Big\{(1-t)u + tv : 0 < t < 1\Big\}$ et $w^* \in \partial\varphi(w)$ tel que

$$\varphi(v) - \varphi(u) = \langle w^*; v - u \rangle .$$

Une relation entre la différentielle classique et la sous-différentielle de Clarke (par exemple, lorsque la fonction est continûment différentiable) qui montre bien que la seconde est une généralisation de la première, est donnée par :

Proposition 2.73. *(Voir [18, page 33]) Si $\varphi \in C^1(X; \mathbb{R})$, alors $\partial\varphi(u)$ se réduit à un singleton et dans ce cas la sous-différentielle de φ n'est autre que sa différentielle au sens classique, c'est-à-dire on a*

$$\partial\varphi(u) = \big\{\varphi'(u)\big\}.$$

2.4 Méthodes variationnelles et points critiques

Plusieurs auteurs on été intéressés à l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires avec des discontinuités dans la non linéarité. Par exemple, pour résoudre l'équation

$$-\Delta u = \varphi(u), \tag{2.7}$$

où φ est une fonction discontinue, alors on a besoin des nouvelles méthodes variationnelles plus adaptées car les méthodes variationnelles classiques (voir [6], [73], [74] et [75]) impose à la fonctionnelle d'énergie d'être C^1-différentiable, ce qui n'est pas le cas dans l'équation (2.7).

Pour cela, des méthodes variationnelles pour les fonctions non-différentiables ont été développées par K.-C. Chang en 1981 dans son fameux article [14] (voir aussi [64], [35]). En se basant sur l'article [19] de F.H. Clarke, K.-C. Chang a réussi à faire une généralisation de la définition des points critiques, la condition de Palais-Smale, le lemme de déformation et le principe de "min-max" qui sont à la base de la théorie des méthodes variationnelles.

Le reste de cette section est consacré à donner des définitions et quelques énoncés de ces généralisations (pour les détails voir [14]).

Soient X un espace de Banach et $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne.

Définition 2.74. *(Voir [14], [35, page 128]) On dit que $u \in X$ est un point critique de φ si $0 \in \partial\varphi(u)$ et dans ce cas, la valeur $c = \varphi(u)$ est dite valeur critique de φ (voir Proposition 2.65).*

Remarque 2.75. *Si φ est une fonction C^1-différentiable, la Définition 2.74 se réduit au cas classique.*

Proposition 2.76. *(Voir [64], [14], [35, page 128]) La fonction*

$$\lambda^\varphi : u \in X \longmapsto \lambda^\varphi(u) = \min\Big\{\|w^*\|_* : w^* \in \partial\varphi(u)\Big\},$$

est semi-continue inférieurement c'est-à-dire si (u_n) est une suite qui converge vers u dans X, alors

$$\lambda^\varphi(u) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \lambda^\varphi(u_n).$$

En particulier, d'après la Proposition 2.62, il existe $w_u^* \in \partial\varphi(u)$ tel que

$$\|w_u^*\|_* = \inf\Big\{\|w^*\|_* : w^* \in \partial\varphi(u)\Big\}.$$

La plupart des fonctions que l'on rencontre dans les problèmes de valeurs propres (comme dans la suite de la thèse) ne sont ni bornées inférieurement ni bornées supérieurement. Pour cette raison, on a besoin de définir d'autres types de points critiques qui ne sont pas des minima ou maxima globaux pour ces fonctions (comme on a déjà vu dans le Théorème 2.45).

Pour cela, on introduit la condition de compacité suivante :

Définition 2.77. *(Voir [14], [35, page 124]) On dit que la fonction φ vérifie la condition de Palais-Smale (généralisée) si*

"Pour toute suite $(u_n)_n \subseteq X$ telle que
$\varphi(u_n) \longrightarrow c$ et $\lambda^\varphi(u_n) \longrightarrow 0$ dans X^*,
la suite (u_n) admet une sous-suite convergente".

L'idée de base de la théorie des points critiques est d'examiner les variations de la structure topologique des ensembles de niveau $\Big($c'est-à-dire $\Big\{u \in X : \varphi(u) \lesseqqgtr c\Big\}\Big)$ pour une certaine fonction φ. La technique utilisée est de déformer ces ensembles de niveau en utilisant le champ de vecteurs d'un "pseudo-gradient" (voir [14] et pour le cas classique lorsque φ est C^1-différentiable voir [44]). Par exemple, la figure 2.2 montre au voisinage du point-selle, le passage d'un ensemble de niveau connexe à un autre qui admet deux composantes connexes.

Dans ce chapitre, on ne va pas s'intéresser aux détails de cette théorie, on énonce seulement quelques résultats dans les théorèmes suivants.

Soient X un espace de Banach, réflexif et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne.

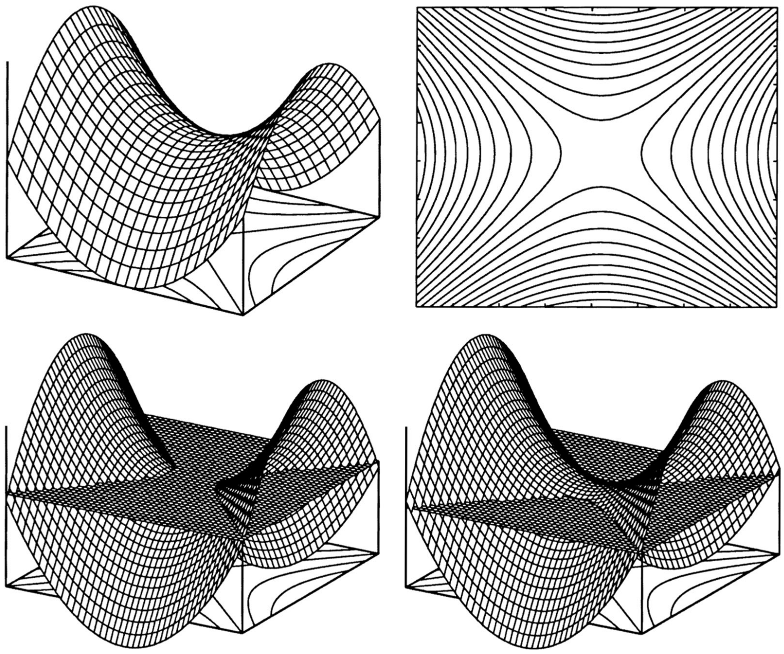


FIGURE 2.2 – Changement de la structure topologique des ensembles de niveau.

Théorème 2.78. *(Rabinowitz, voir [14], [35, page 142]) Soit $X = X_1 \oplus X_2$, où X_1 est un espace de dimension finie. Si f vérifie la condition de Palais-Smale, s'il existe $C_1 < C_2$ deux constantes et un voisinage U de l'origine dans X_1 tels que*

$$f \geqslant C_2 \text{ sur } X_2\ ,$$

$$f \leqslant C_1 \text{ sur } \partial U,$$

alors f admet un point critique.

On donne ensuite l'énoncé du célèbre théorème de "Mountain Pass" dû à A. Ambrosetti & P.H. Rabinowitz (pour la preuve voir [43] et [90]).

Théorème 2.79. *(Ambrosetti & Rabinowitz, voir [14], [35, page 140]) Supposons qu'il existe $u_1 \in X$ et une constante $\delta > 0$ telles que*

$$\|u_1\|_X > \delta \text{ et}$$

$$\max\big\{f(0); f(u_1)\big\} < \alpha \leqslant \inf_{\|u\|_X=\delta} f(u).$$

On considère

$$\beta = \min_{p\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} f\Big(p(t)\Big) \geqslant \alpha,$$

où Γ désigne l'ensemble des chemins continus reliant l'origine à u_1 dans X (voir la figure 2.3) c'est-à-dire

$$\Gamma = \Big\{p \in C\left([0,1]; X\right) : p(0) = 0,\ p(1) = u_1\Big\}.$$

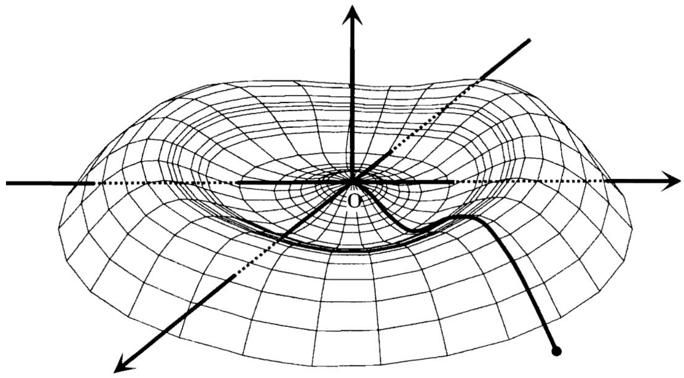


FIGURE 2.3 – Géométrie de “Mountain Pass”.

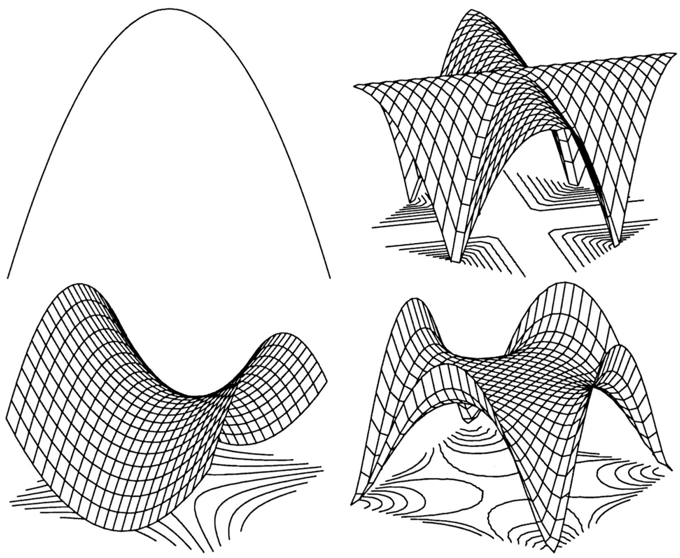


FIGURE 2.4 – Exemples de points de “Mountain Pass”.

Alors, sous ces hypothèses, on dit que f vérifie la géométrie de “Mountain Pass”. Ensuite, d'après S.Z. Shi dans [90], on déduit qu'il existe une suite $(u_n)_n \subset X$ telle que (Principe variationnel d'Ekeland)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta, \\ \lambda^f(u_n) = \inf \left\{ \|w_n^*\|_{X^*} : w_n^* \in \partial f(u_n) \right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{array} \right. \tag{2.8}$$

De plus, si f vérifie la condition de Palais-Smale, alors β est une valeur critique de f c'est-à-dire il existe $u \in X$ tel que $f(u) = \beta$ et $0 \in \partial f(u)$ (voir les figures 2.3 et 2.4).

Théorème 2.80. *(Voir [14], [35, page 144]) Supposons que f vérifie la condition de Palais-Smale et elle est bornée inférieurement, alors $c = \inf_X f(u)$ est une valeur critique de la fonction f.*

2.5 Théorème de compacité

Au bénéfice de la convergence presque partout du gradient (voir [79], [82], [83] et [80]) obtenue par J.-M. Rakotoson et le lemme de Brezis-Lieb (voir [11]), on énonce un théorème de compacité dû à A. El Hamidi et J.-M. Rakotoson qui sert à démontrer la convergence forte du gradient (voir [26] et [29]).

En utilisant ce nouveau principe de concentration et de compacité, les auteurs dans [27], ont montré que la constante de Sobolev optimale est atteinte (voir aussi [52], [51]).

Soient Ω un ouvert arbitraire de $\mathbb{R}^N$ et $\omega \subset\subset \Omega$ un ouvert relativement compact de Ω c'est-à-dire $\overline{\omega} \subset \Omega$, où $\overline{\omega}$ désigne la fermeture de ω.
Soient $1 < p_i < +\infty$, pour $i = 1, \ldots, N$, on définit

$$p^- = \min\Big\{p_1, \ldots, p_N\Big\},$$

$$\mathbb{L}^{\overrightarrow{p}}_{loc}(\Omega) = \prod_{i=1}^{N} L^{p_i}_{loc}(\Omega),\ \overrightarrow{p} = (p_1, \ldots, p_N),$$

$$W^{1,\overrightarrow{p}}_{loc}(\Omega) = \left\{ v \in \bigcup_{i=1}^{N} L^{p_i}_{loc}(\Omega) : \nabla v \in \mathbb{L}^{\overrightarrow{p}}_{loc}(\Omega) \right\}.$$

Soient $1 < q < +\infty$ et $q' = \dfrac{q}{q-1}$ son conjugué.
On définit la fonction de troncature, Lipschitzienne suivante. Pour $\varepsilon > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$,

$$S_\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } |\sigma| \leqslant \varepsilon \\ \varepsilon \operatorname{sign}(\sigma) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $\sigma^k = S_k(\sigma)$, pour tout $k \geqslant 1$.

On considère une fonction (non linéaire) $\widehat{a} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ qui vérifie les conditions de Leray-Lions suivantes :

(L1) $\widehat{a}(x, \cdot, \cdot)$ est une fonction continue pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $(\sigma, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. La fonction $\widehat{a}(\cdot, \sigma, \xi)$ est mesurable (On dit que $\widehat{a}$ est une fonction de Carathéodory).

(L2) **(i)** $\widehat{a}$ transforme les ensembles bornés de $W^{1,\overrightarrow{p}}_{loc}(\Omega)$ en des ensembles bornés dans $\displaystyle\prod_{i=1}^{N} L^{p'_i}_{loc}(\Omega)$,

(ii) pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $(\sigma, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, on a

$$\widehat{a}(x, \sigma, \xi) \cdot \xi \geqslant 0,$$

(iii) pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $v \in W_{loc}^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$, la fonction suivante est continue pour tout $\omega \subset\subset \Omega$,

$$\begin{aligned} \widehat{a}(x, \cdot, \nabla v) : \Big(W^{1,\overrightarrow{p}}(\omega), \text{Topologie faible}\Big) \quad &\longrightarrow \quad \left(\prod_{i=1}^{N} L^{p_i'}(\omega), \text{Topologie forte}\right) \\ u \quad &\longrightarrow \quad \widehat{a}(x, u, \nabla v). \end{aligned}$$

(L3) Pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $(\sigma, \xi_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $i = 1, 2$, on a

$$\Big[\widehat{a}(x, \sigma, \xi_1) - \widehat{a}(x, \sigma, \xi_2)\Big]\Big[\xi_1 - \xi_2\Big] > 0, \text{ si } \xi_1 \neq \xi_2.$$

(L4) Si pour un certain $x \in \Omega$, il existe une suite $(\sigma_n, \xi_{1n}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, $\xi_2 \in \mathbb{R}^N$ tels que $\Big[\widehat{a}(x, \sigma_n, \xi_{1n}) - \widehat{a}(x, \sigma_n, \xi_2)\Big]\Big[\xi_{1n} - \xi_2\Big]$ et σ_n sont bornés lorsque $n \to +\infty$, alors $|\xi_{1n}|$ reste dans un ensemble borné de $\mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$.

On énonce un théorème concernant la convergence p.p. du gradient (pour la démonstration voir [26]).

Théorème 2.81. *(Voir [26]) Soit (u_n) une suite bornée de $W_{loc}^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$. Alors,*

(i) *il existe une sous-suite notée (u_n) et une fonction $u \in W_{loc}^{1,\overrightarrow{p}}(\Omega)$ telles que $u_n(x) \to u(x)$ p.p. $x \in \Omega$, lorsque $n \to +\infty$,*

(ii) *si on suppose de plus que les conditions **(L1)-(L4)** sont vérifiées et $\forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, $\forall k \geqslant k_0 > 0$, on a*

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_{\Omega} \widehat{a}\Big(x, u_n(x), \nabla u_n(x)\Big) \cdot \nabla\Big(\varphi S_{\varepsilon}(u_n - u^k)\Big) \leqslant o(1), \text{ lorsque } \varepsilon \to 0,$$

alors il existe une sous-suite aussi notée (u_n) telle que

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

⁎ − ⁎ − ⁎ − ⁎ − ⁎ − ⁎ − ⁎

Chapitre 3

Opérateur $\overline{\rho}^{>}$-multivoque de Leray-Lions

Dans ce chapitre, nous allons construire l'espace de fonction de Banach-Sobolev sur lequel nous définirons l'opérateur $\overline{\rho}^{>}$-multivoque de Leray-Lions introduit par J.M. Rakotoson dans [85]. Nous nous intéresserons ensuite aux espaces d'Orlicz-Sobolev afin de construire un opérateur $\overline{\rho}^{>}$-multivoque de Leray-Lions "fortement monotone" (voir [16]). Nous donnerons également une méthode variationnelle (voir Théorème 3.7) qui étudiera l'existence de solutions pour de tels opérateurs.

3.1 Existence de points critiques

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(V, \|\cdot\|_V)$ deux espaces de Banach réflexifs.

Définition 3.1. *(Voir [12]) Un opérateur multivoque $A : X \to 2^{X^*}$ est dit monotone si $\forall u_1,\ u_2 \in X$, $\forall w_1 \in Au_1$ et $\forall w_2 \in Au_2$, on a*

$$\langle w_1 - w_2\,; u_1 - u_2 \rangle \geqslant 0.$$

Remarque 3.2. *Soit F une fonction convexe, continue de $X \to \mathbb{R}$. Alors, l'opérateur A défini par $u \in X \mapsto Au = \partial F(u)$ est monotone.*

Preuve:
D'après la Proposition 2.49, on a $\forall u \in X$, $\partial F(u) \neq \varnothing$.
Soient $u_1,\ u_2 \in X$ et $w_1 \in \partial F(u_1)$, $w_2 \in \partial F(u_2)$, alors d'après la définition de la sous-différentielle de F, on a

$$F(u_2) - F(u_1) \geqslant \langle w_1; u_2 - u_1 \rangle\,,$$

et

$$F(u_1) - F(u_2) \geqslant \langle w_2; u_1 - u_2 \rangle\,.$$

En additionnant ces deux relations, on déduit que A est monotone. ■

Définition 3.3. *(Voir [85], [16]) Soit $A : X \to 2^{X^*}$ un opérateur multivoque monotone. A est dit fortement monotone si*

"Pour toute suite $(u_n)_n$ dans X qui converge faiblement vers u et qui vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle w_n - w\,;u_n - u\rangle = 0$, pour un certain $w_n \in Au_n$ et un certain $w \in Au$, on a alors u_n converge vers u fortement dans X. "

Remarque 3.4. • *La Définition 3.1 est déjà connue (voir [12]), tandis que la seconde est récemment introduite par J.-M. Rakotoson (voir [85]).*

- *Cette nouvelle définition de la "forte monotonie" généralise la plupart des définitions déjà existantes dans la littérature, car on n'impose pas une minoration par la norme de l'espace comme par exemple dans la Définition 1.4.3 de l'opérateur fortement monotone (strongly monotone) dans [35].*
- *Pour traiter le cas univoque, plusieurs notions sur les opérateurs ont été introduites par différents auteurs pour résoudre les problèmes variationnels comme les opérateurs pseudo-monotones, de type $(S)_+$, ...*
- *Si A est fortement monotone et B est monotone, alors $A+B$ est fortement monotone.*

On montre, dans le Lemme 3.5, que sous certaines hypothèses de croissance sur les fonctions J et j, la fonctionnelle Φ définie par $\Phi = J - j$ vérifie la condition de Palais-Smale.

Lemme 3.5. *(Voir [85]) Soient $J : V \to \mathbb{R}$ et $j : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions localement Lipschitziennes. Supposons que*

(H0) $V \hookrightarrow\hookrightarrow X$ *est une injection compacte.*

(H1) $\begin{array}{rcl} A: \ V & \longrightarrow & 2^{V^*} \\ u & \longrightarrow & \partial J(u) \end{array}$ *est fortement monotone.*

(H2) *On a les conditions de croissance suivantes :*

(1) $\exists\,\beta > 0$, $\exists\,c_0 \geqslant 0$:

$$\beta j(u) \leqslant \inf_{v^*\in\partial j(u)} \langle v^*; u\rangle + c_0\beta, \quad \forall\, u \in X.$$

(2) *Il existe deux constantes $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$:*

$$\frac{1}{\beta} \sup_{w^*\in\partial J(u)} \langle w^*; u\rangle - c_2 + c_1\|u\|_V \leqslant J(u), \quad \forall\, u \in V,$$

où $J^0(u;u) = \sup\limits_{w^*\in\partial J(u)} \langle w^*; u\rangle$ *et* $-j^0(u;-u) = \inf\limits_{v^*\in\partial j(u)} \langle v^*; u\rangle$.

Alors, la fonction Φ définie par

$$\Phi(u) = J(u) - j(u), \ u \in V$$

vérifie la condition de Palais-Smale.

Remarque 3.6. *La première hypothèse dans* ***(H2)*** *est une généralisation de la condition d'Ambrosetti et Rabinowitz introduite dans [76, page 9] pour les fonctions* C^1*-différentiables.*

Preuve:
On reprend la preuve de [85] :
Soit $(u_n)_n$ une suite dans V telle que

$$\begin{cases} |\Phi(u_n)| \ \text{ est bornée,} \\ \text{et} \\ \|u_n^*\|_{V^*} = \inf\Big\{\|\ell_n\|_{V^*} : \ell_n \in \partial\Phi(u_n)\Big\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

On a alors,

$$u_n^* = w_n^* - v_n^* \quad \text{ où } w_n^* \in \partial J(u_n) \text{ et } v_n^* \in \partial j(u_n).$$

On commence par démontrer que la suite (u_n) est bornée dans V. En effet, on a (Dans tout ce qui suit, c et c_i sont des constantes positives) :

$$J(u_n) - j(u_n) \leqslant c, \tag{3.2}$$

et

$$\langle w_n^*; u_n\rangle - \langle v_n^*; u_n\rangle = \langle u_n^*; u_n\rangle\,. \tag{3.3}$$

On mutiplie l'égalité (3.3) par $\dfrac{-1}{\beta}$ et on l'ajoute à (3.2), on obtient

$$J(u_n) - \frac{1}{\beta}\langle w_n^*; u_n\rangle - j(u_n) + \frac{1}{\beta}\langle v_n^*; u_n\rangle \leqslant c - \frac{1}{\beta}\langle u_n^*; u_n\rangle\,. \tag{3.4}$$

D'après l'hypothèse de croissance **(H2)**, on a

$$J(u_n) - \frac{1}{\beta}\langle w_n^*; u_n\rangle \geqslant c_1\|u_n\|_V - c_2, \tag{3.5}$$

et

$$-j(u_n) + \frac{1}{\beta}\langle v_n^*; u_n\rangle \geqslant -c_0. \tag{3.6}$$

Les relations (3.4), (3.5) et (3.6) impliquent

$$\|u_n\|_V \leqslant c_3|\langle u_n^*; u_n\rangle| + c_3 \leqslant c_3\|u_n^*\|_{V^*}\|u_n\|_V + c_3. \tag{3.7}$$

D'où

$$\|u_n\|_V \leqslant c_4, \ \text{ car } \|u_n^*\|_{V^*} \to 0. \tag{3.8}$$

Par suite, il existe $u \in V$ et une sous-suite aussi notée (u_n) tels que

(i) $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V,

(ii) $u_n \to u$ fortement dans X, d'après l'hypothèse **(H0)**.

Donc d'après la convergence forte dans X, on a $\|u_n\|_X \leqslant c_5$ et d'après **(c)** de la Proposition 2.58, on a $\|v_n^*\|_{X^*} \leqslant c_6$, pour $v_n^* \in \partial j(u_n)$.
De plus, on a

$$\langle w_n^*; u_n - u\rangle - \langle v_n^*; u_n - u\rangle = \langle u_n^*; u_n - u\rangle . \tag{3.9}$$

Prenons $w^* \in \partial J(u)$, en ajoutant $\langle -w^*; u_n - u\rangle$ à l'égalité (3.9), on déduit

$$\langle w_n^* - w^*; u_n - u\rangle = -\langle w^*; u_n - u\rangle + \langle v_n^*; u_n - u\rangle + \langle u_n^*; u_n - u\rangle . \tag{3.10}$$

Par conséquent,

$$|\langle w_n^* - w^*; u_n - u\rangle| \leqslant |\langle w^*; u_n - u\rangle| + c_6\|u_n - u\|_X + c_7\|u_n^*\|_{V^*}. \tag{3.11}$$

D'après ce qui précède, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle w_n^* - w^*; u_n - u\rangle = 0, \quad w_n^* \in \partial J(u_n) \text{ et } w^* \in \partial J(u) = A(u). \tag{3.12}$$

L'hypothèse **(H1)** implique que $u_n \to u$ fortement dans V. ■

En s'appuyant sur le théorème suivant et en utilisant la condition de Palais-Smale du Lemme 3.5 et la géométrie de "Mountain Pass", on prouve l'existence de point critique de la fonctionnelle Φ.
Pour que la fonctionnelle Φ vérifie la géométrie de "Mountain Pass" (voir la figure 2.3), on suppose qu'on a en plus les deux conditions suivantes :
(H3) $\Phi(0) = 0$ et il existe $r_0 > 0,\ R_0 > 0$ tels que

$$\begin{cases} \inf\limits_{\|u\|_V = r} J(u) > 0 & \text{si } 0 < r < r_0, \\ \text{et} & \\ J(u) > 0 & \text{si } \|u\|_V > R_0. \end{cases} \tag{3.13}$$

(H4) $\displaystyle\lim_{\|u\|_V\to 0} \frac{j(u)}{J(u)} = 0$ et il existe $u_0 \neq 0$ tel que $\displaystyle\limsup_{t\to+\infty} \frac{j(tu_0)}{J(tu_0)} > 1.$

Théorème 3.7. *(Voir [85]) Sous les hypothèses **(H0)-(H2)** du Lemme 3.5, **(H3)** et **(H4)**, il existe une fonction $u \in V$, $u \neq 0$ telle que u est un point critique de Φ c'est-à-dire*

$$0 \in \partial\Phi(u), \quad \Phi(u) = \beta > 0.$$

Preuve:
On reprend la preuve de [85] :
L'idée de cette preuve c'est de montrer que les conditions **(H3)** et **(H4)** qu'on a mises sur J et j au voisinage de l'origine et l'infini servent à montrer que Φ vérifie la géométrie de "Mountain Pass". Puis en utilisant un résultat de S.Z. Shi, on déduit qu'il existe une suite de Palais-Smale. Enfin, les hypothèses **(H0)-(H2)** achèvent la

démonstration.

D'après l'hypothèse **(H4)**, il existe r assez petit où $0 < r < r_0$, $u_0 \in V$, $u_0 \not\equiv 0$ et $t_0(R_0, u_0) = t_0 > 0$ tels que

$$\sup_{\|v\|_V = r} \frac{j(v)}{J(v)} < \frac{1}{2},$$

$$1 - \frac{j(t_0 u_0)}{J(t_0 u_0)} < 0 \text{ et } t_0 \|u_0\|_V > 2R_0.$$

D'après ce qui précède et **(H3)**, on a $\forall v \in V$ tel que $\|v\|_V = r$,

$$\begin{aligned} \Phi(v) &= J(v) - j(v) \\ &= J(v)\left(1 - \frac{j(v)}{J(v)}\right) \\ &\geqslant \frac{1}{2} \inf_{\|u\|_V = r} J(u) \doteq \alpha > 0, \quad \forall v \in V, \ \|v\|_V = r. \end{aligned}$$

Posons $u_1 = t_0 u_0$, alors

$$\Phi(u_1) = J(u_1)\left(1 - \frac{j(u_1)}{J(u_1)}\right) < 0, \text{ où } u_1 \notin \overline{B}(0, r).$$

Par conséquent, Φ vérifie la géométrie de "Mountain Pass".

Appliquons le résultat de S. Z. Shi (voir Théorème 2.79, [43] et [90]), on déduit qu'il existe une suite $(u_n) \subset V$ telle que

$$\begin{cases} \Phi(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \beta, \\ \text{et} \\ \lambda^{\Phi}(u_n) = \inf\left\{\|w_n^*\|_{V^*} : w_n^* \in \partial\Phi(u_n)\right\} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0, \end{cases} \tag{3.14}$$

où

$$\beta = \min_{p \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi\big(p(t)\big),$$

et

$$\Gamma = \Big\{p \in C\left([0,1]; V\right) : p(0) = 0, \ p(1) = u_1\Big\}.$$

D'après le Lemme 3.5, Φ vérifie la condition de Palais-Smale, on conclut alors qu'il existe $u \in V$ tel que

$$0 \in \partial\Phi(u), \quad \Phi(u) = \beta \geqslant \alpha > 0.$$

■

Remarque 3.8. *Dans le chapitre 4 de cette thèse, on va imposer à la place de la condition de compacité **(H0)** seulement une injection continue et on modifiera les autres hypothèses du Théorème 3.7 de sorte qu'on puisse résoudre et montrer l'existence de solutions pour des problèmes critiques, là où on perd la compacité (voir Théorème 4.8).*

3.2 Espace de fonction de Banach-Sobolev

Dans ce paragraphe, on reprend les travaux de [85] et [16], mais en travaillant sur des mesures plus générales. On définit l'espace de fonction de Banach-Sobolev sur lequel on va construire un opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque de Leray-Lions fortement monotone (voir Section 3.3) et on donne quelques propriétés de cet espace, utiles pour la suite de cette thèse (voir [85] et [16]).
Rappelons que $L(\Omega, \rho_i) = \Big\{v \in L^0(\Omega, \mu_i) : \rho_i(|v|) < +\infty\Big\}$, $i = 0, \ldots, N$ où μ_i est une mesure borélienne, ρ_i est une norme de fonction de Banach.

Définition 3.9. *(Voir [85]) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\rho_0, \ldots, \rho_N$ $(N+1)$ normes de fonction de Banach et $L(\Omega, \rho_i)$, $i = 0, \ldots, N$ les espaces de fonction de Banach correspondants. On définit l'espace de fonction de Banach-Sobolev par*

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= W^{1,\rho_0,\ldots,\rho_N}(\Omega, \mu_0, \ldots, \mu_N) \\ &= \left\{ v \in L(\Omega, \rho_0) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L(\Omega, \rho_i),\ i = 1, \ldots, N \right\}. \end{aligned}$$

L'espace $\mathbf{W}$ est muni de la norme

$$\|v\|_{\mathbf{W}} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \right) + \rho_0(|v|).$$

$(\mathbf{W}, \|\cdot\|_{\mathbf{W}})$ est un espace de Banach (voir [85]).

Remarque 3.10. • *On suppose que pour chaque $i = 0, \ldots, N$, la mesure borélienne μ_i vérifie les hypothèses déjà mentionnées dans le Chapitre 2, pages 19 et 21.*

- *Si Ω est borné, alors l'espace $\mathbf{W}$ s'injecte dans $W^{1,1}(\Omega, \mu_0, \ldots, \mu_N)$ de façon continue :*

$$\mathbf{W} \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega, \mu_0, \ldots, \mu_N).$$

*En effet, en utilisant la propriété **N7.** de la Définition 2.2, on a*

$$\int_\Omega |f|\, d\mu_i \leqslant C_\Omega\ \rho_i(|f|),\ \ pour\ f \in L(\Omega, \rho_i),\ i = 0, \ldots, N.$$

Alors, les fonctions $v \in L^1(\Omega, \mu_0)$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega, \mu_i)$ car $v \in L(\Omega, \rho_0)$ et $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L(\Omega, \rho_i)$.

- *Notons que d'après **N6.** de la Définition 2.2, on a $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathbf{W}$.*

Exemple 3.11. *On donne ici quelques exemples de normes de fonction de Banach et leurs espaces correspondants :*

(1) *La norme de Lebesgue classique :* $\rho(v) = \|v\|_p$ *dans l'espace* $L^p(\Omega)$, *pour* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ *(Dans le reste de cette thèse, nous ne tenons pas compte des cas* $p = 1, +\infty$ *car on a besoin de la réflexivité de l'espace).*

(2) *La norme de Lebesgue à exposant variable dans l'espace* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *(voir [45]), pour* $p \in L^\infty(\Omega)$ *et* $\inf\operatorname{ess}_{x\in\Omega} p(x) > 1$, *définie par :*

$$\rho(v) = \|v\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left|\frac{v(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant 1\right\}.$$

(3) *La norme modulaire ou de Luxemburg (voir [2] et [65]) dans l'espace d'Orlicz* $L^\Phi(\Omega)$, *où* Φ *est une* $\mathcal{N}$*-fonction (voir Définition 2.16) :*

$$\rho(v) = \|v\|_\Phi = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \Phi\left(x, \frac{v(x)}{\lambda}\right) \mathrm{d}x \leqslant 1\right\}.$$

(4) *La norme de Lorentz (voir [84]) :*

$$\rho(v) = \|v\|_{L^{p,q}(\Omega,a)} = \left[\int_0^{|\Omega|_a} \left(t^{\frac{1}{p}} |v|^a_{**}(t)\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right]^{\frac{1}{q}},$$

dans l'espace de Lorentz avec poids $L^{p,q}(\Omega, a)$, *où* a *est un poids sur l'ensemble* Ω, $1 < p, q < +\infty$ *et pour* $v \geqslant 0$ *et* $\sigma \in]0, |\Omega|_a[$, *on définit*

$$v^a_*(\sigma) = \inf\left\{t > 0 : \int_{\{v>t\}} a(x)\mathrm{d}x \leqslant \sigma\right\} \quad \text{et} \quad v^a_{**}(\sigma) = \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma v^a_*(t)\mathrm{d}t.$$

(5) *La norme (voir [31]) :*

$$\rho(v) = \|v\|_{G\Gamma(p,m,w)} = \left[\int_0^1 w(t)\left(\int_0^t |v|^p_*(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{m}{p}} \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{m}},$$

dans le Γ*-espace généralisé* $G\Gamma(p, m, w)$.

Pour les applications de l'espace $\mathbf{W}$ dans les problèmes aux limites, on s'intéresse par la suite aux conditions de Dirichlet, pour cela on introduit l'espace de fonction de Banach-Sobolev suivant :

Définition 3.12. *On a* $C_c^\infty(\Omega) \subset \mathbf{W}$, *alors sous les mêmes hypothèses de la Définition 3.9, on définit l'espace de fonction de Banach-Sobolev*

$$\mathbf{V} = W_0^{1,\rho_0,\dots,\rho_N}(\Omega, \mu_0, \dots, \mu_N),$$

comme la fermeture de l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ *muni de la norme suivante (voir aussi [85]) :*

$$\|v\| = \sum_{i=1}^N \rho_i\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\right) + \rho_0(|v|).$$

3.2.1 Dual des espaces de fonction de Banach-Sobolev

Après avoir défini l'espace $\mathbf{V}$ de fonction de Banach-Sobolev, on introduit dans la proposition suivante le dual de $\mathbf{V}$.

Proposition 3.13. *(Voir [85]) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\rho_0, \ldots, \rho_N$ $(N+1)$ normes de fonction de Banach et ρ_i' la norme de fonction associée à ρ_i. On suppose que ρ_i et ρ_i' sont des normes absolument continues. Alors, le dual de l'espace $\mathbf{V}$ est donné par :*

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^* &= \Big(W_0^{1,\rho_0,\ldots,\rho_N}(\Omega, \mu_0, \ldots, \mu_N)\Big)^* \\
&= \Big\{T : \text{ il existe } f_0, \ldots, f_N \text{ où } f_i \in L(\Omega, \rho_i') \text{ telles que} \\
\langle T, v\rangle &= \int_\Omega v(x) f_0(x)\, d\mu_0 + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, d\mu_i \,, \forall\, v \in \mathbf{V}\Big\}.
\end{aligned}$$

3.2.2 Calcul de la sous-différentielle sur les espaces de fonction de Banach-Sobolev

Dans ce paragraphe, on étudie la sous-différentielle généralisée d'une fonction définie sur l'espace $\mathbf{V}$ de fonction de Banach-Sobolev. Pour cela, on énonce un théorème dans lequel on trouve la sous-différentielle d'une fonction présentée sous forme d'une intégrale (voir [24], [18, Section 2.7] et [35, page 58]).

Soient $L(\Omega, \rho)$ un espace de fonction de Banach, réflexif et séparable, μ une mesure borélienne. On considère $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory (c'est-à-dire $\forall \sigma \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \mapsto \Phi(x, \sigma)$ est μ-mesurable et μ-p.p. $x \in \Omega$, $\sigma \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(x, \sigma)$ est continue). On suppose que

(H5) Pour tout ensemble borné $B \subset L(\Omega, \rho)$, il existe une constante $K_B > 0$ telle que $\forall u \in B$ et $\forall v \in B$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Big|\Phi(x, u(x)) - \Phi(x, v(x))\Big|\, d\mu(x) &\leqslant K_B\, \rho(u - v), \\
\int_\Omega |\Phi(x, 0)|\, d\mu(x) &< +\infty.
\end{aligned}$$

Théorème 3.14. *(Voir [24], [18, Section 2.7], [35, page 58]). Sous l'hypothèse **(H5)**, on déduit que la fonctionnelle $F(u) = \displaystyle\int_\Omega \Phi(x, u(x))\, d\mu(x)$ est bien définie sur $L(\Omega, \rho)$ et sa sous-différentielle est donnée par*

$$\partial F(u) \subseteq \Big\{w^* \in L(\Omega, \rho') : w^*(x) \in \partial\Phi(x, u(x)) \;\; \mu\text{-p.p. } x \in \Omega\Big\}. \tag{3.15}$$

Si, en plus, la fonction $\sigma \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(x,\sigma)$ est convexe μ-p.p. $x \in \Omega$, ou bien plus généralement si μ-p.p. $x \in \Omega$, (voir Proposition 2.66)

$$\Phi'(x,\sigma;t) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\Phi(x,\sigma+\lambda t) - \Phi(x,\sigma)}{\lambda} = \Phi^0(x,\sigma;t) \quad \forall \sigma,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors, on a, dans ce cas, une égalité dans la relation (3.15).

En utilisant ce dernier théorème et la Proposition 2.68, on montre le lemme suivant qui va nous permettre de calculer la sous-différentielle d'une fonction intégrale sur un espace de fonction de Banach-Sobolev.

Lemme 3.15. *(Voir [85]) Soit $\mathbf{V} = W_0^{1,\rho_0,\ldots,\rho_N}(\Omega,\mu_0,\ldots,\mu_N)$ l'espace de fonction de Banach-Sobolev tel que ρ_i et sa norme associée ρ_i' sont toutes des normes de fonction de Banach absolument continues. Soient Φ_i pour $i = 0,\ldots,N$ $(N+1)$ fonctions de Carathéodory sur $\Omega \times \mathbb{R}$ telles que*

(1) *μ_i-p.p. $x \in \Omega$, la fonction $\sigma \mapsto \Phi_i(x,\sigma)$ est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

(2) *Les fonctions $v \in L(\Omega,\rho_i) \mapsto F_i(v) = \int_\Omega \Phi_i(x,v(x))\, d\mu_i$ vérifient **(H5)** pour $i = 0,\ldots,N$ c'est-à-dire pour tout ensemble borné $B_i \subset L(\Omega,\rho_i)$, il existe une constante $K_{B_i} > 0$ telle que $\forall u \in B_i$ et $\forall v \in B_i$, on a*

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big|\Phi_i(x,u(x)) - \Phi_i(x,v(x))\Big|\, d\mu_i &\leqslant K_{B_i}\rho_i(u-v), \\ \int_\Omega |\Phi_i(x,0)|\, d\mu_i &< +\infty. \end{aligned}$$

Alors,

(i) *la fonctionnelle définie par*

$$J_0(v) = \int_\Omega \Phi_0(x,v(x))\, d\mu_0 + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \Phi_i\Big(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\Big)\, d\mu_i \tag{3.16}$$

est localement Lipschitzienne sur $\mathbf{V}$,

(ii) *pour tout $u \in \mathbf{V}$ et tout $T \in \partial J_0(u)$, il existe $(N+1)$ fonctions*

$$(w_0,\ldots,w_N) \in L(\Omega,\rho_0') \times \ldots \times L(\Omega,\rho_N'),$$

telles que

$$\langle T; v\rangle = \int_\Omega w_0(x)v(x)\, d\mu_0 + \sum_{i=1}^N \int_\Omega w_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, d\mu_i\ , \qquad \forall\, v \in \mathbf{V},$$

où pour $i = 1, \ldots, N$, *on a*

$$w_i(x) \in \partial\Phi_i\Big(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big) \quad \mu_i\text{-}p.p.\ x \in \Omega,$$

et

$$w_0(x) \in \partial\Phi_0(x, u(x)) \quad \mu_0\text{-}p.p.\ x \in \Omega.$$

Preuve:
On reprend la preuve de [85] :

Montrons **(i)** :

Soit $v \in \mathbf{V}$. Considérons la fonction $\widehat{F}$ définie par

$$\begin{aligned} \widehat{F} : \quad \prod_{j=0}^{N} L(\Omega, \rho_j) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u} = \big(u_0, \ldots, u_N\big) &\longrightarrow \widehat{F}(\overrightarrow{u}) = \sum_{j=0}^{N} F_j(u_j). \end{aligned}$$

Étant donné que $v \in \mathbf{V}$, alors $\overrightarrow{v} = \left(v, \dfrac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial v}{\partial x_N}\right) \in \displaystyle\prod_{j=0}^{N} L(\Omega, \rho_j)$.

D'après l'hypothèse **(2)**, on peut trouver une boule $B(\overrightarrow{v}, r)$ dans $\displaystyle\prod_{j=0}^{N} L(\Omega, \rho_j)$ de centre $\overrightarrow{v}$, de rayon $r > 0$ et une constante $K_B > 0$ telles que

$$\begin{aligned} \Big|\widehat{F}(\overrightarrow{f}) - \widehat{F}(\overrightarrow{g})\Big| &= \Big|\sum_{j=0}^{N} F_j(f_j) - F_j(g_j)\Big| \\ &\leqslant K_B \sum_{j=0}^{N} \rho_j(f_j - g_j), \end{aligned}$$

pour tout $\overrightarrow{f} = \big(f_0, \ldots, f_N\big)$ et $\overrightarrow{g} = \big(g_0, \ldots, g_N\big)$ dans $B(\overrightarrow{v}, r)$.

Vu que la fonctionnelle J_0 dans (3.16), n'est autre que la fonction $\widehat{F}$ restreinte à $\mathbf{V}$, alors en prenant le voisinage $\vartheta = B(\overrightarrow{v}, r) \cap \mathbf{V}$ de v dans $\mathbf{V}$, on déduit que J_0 est localement Lipschitzienne sur $\mathbf{V}$.

Montrons **(ii)** :

Considérons l'injection Λ définie par

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbf{V} &\longrightarrow \prod_{j=0}^{N} L(\Omega, \rho_j) \\ u &\longrightarrow \Lambda(u) = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right). \end{aligned}$$

Alors, on a $J_0 = \widehat{F} \circ \Lambda$ et en appliquant la Proposition 2.68, on obtient

$$\partial J_0(u) \subseteq \Lambda^* \Big(\partial \widehat{F}(\Lambda u)\Big). \tag{3.17}$$

On introduit la projection (linéaire) Π_k suivante pour $k = 0, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \Pi_k : \prod_{j=0}^{N} L(\Omega, \rho_j) &\longrightarrow L(\Omega, \rho_k) \\ \overrightarrow{v} = \big(v_0, \dots, v_N\big) &\longrightarrow \Pi_k(\overrightarrow{v}) = v_k = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e_k}, \end{aligned}$$

où $\Big\{\overrightarrow{e_k},\ k = 0, \dots, N\Big\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{N+1}$. Par suite, on a

$$F_i(v_i) = F_i\big(\Pi_i(\overrightarrow{v})\big), \quad \text{pour } i = 0, \dots, N,$$

d'où,

$$\widehat{F}(\overrightarrow{v}) = \sum_{i=0}^{N} F_i(v_i) = \sum_{i=0}^{N} F_i\big(\Pi_i(\overrightarrow{v})\big).$$

D'après la Proposition 2.66, on a

$$\partial \widehat{F}(\overrightarrow{v}) \subseteq \sum_{i=0}^{N} \partial\Big(F_i\big(\Pi_i(\overrightarrow{v})\big)\Big).$$

De plus, la Proposition 2.68 nous donne

$$\partial \widehat{F}(\overrightarrow{v}) \subseteq \sum_{i=0}^{N} \partial\Big(F_i\big(\Pi_i(\overrightarrow{v})\big)\Big) \subseteq \sum_{i=0}^{N} \Pi_i^*\Big(\partial F_i\big(\Pi_i(\overrightarrow{v})\big)\Big). \tag{3.18}$$

Alors, les relations (3.18) et (3.17) combinées, impliquent $\forall u \in \mathbf{V}$,

$$\partial J_0(u) \subseteq \Lambda^* \sum_{i=0}^{N} \Pi_i^*\Big(\partial F_i\big(\Pi_i \circ \Lambda(u)\big)\Big). \tag{3.19}$$

Essayons maintenant de calculer explicitement les éléments de l'ensemble

$$\Lambda^* \sum_{i=0}^{N} \Pi_i^*\Big(\partial F_i\big(\Pi_i \circ \Lambda(u)\big)\Big) \quad \text{dans (3.19).}$$

$\boxed{\partial F_i\big(\Pi_i \circ \Lambda(u)\big) :}$

D'après la définition de Λ et Π_i, on a

$$\Pi_i \circ \Lambda(u) = \Pi_i\bigg(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\bigg) = \begin{cases} u & \text{si } i = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant N. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, on a

$$\partial F_0\big(\Pi_0 \circ \Lambda(u)\big) = \partial F_0(u),$$

et

$$\partial F_i\big(\Pi_i \circ \Lambda(u)\big) = \partial F_i\bigg(\frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg), \ \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

Par suite, d'après le Corollaire 3.14, on obtient

$$\partial F_0(u) \subseteq \bigg\{w_0^* \in L(\Omega, \rho_0') : w_0^*(x) \in \partial\Phi_0(x, u(x)) \ \mu_0\text{-p.p. } x \in \Omega\bigg\}, \tag{3.20}$$

et

$$\partial F_i\bigg(\frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg) \subseteq \bigg\{w_i^* \in L(\Omega, \rho_i') : w_i^*(x) \in \partial\Phi_i\bigg(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\bigg) \ \mu_i\text{-p.p. } x \in \Omega\bigg\}. \tag{3.21}$$

$\boxed{\Pi_i^* :}$

L'opérateur adjoint Π_i^* de Π_i est donné par (voir Définition A.7) :

$$\begin{array}{rcl} \Pi_i^* : \ L(\Omega, \rho_i') & \longrightarrow & \Big(\displaystyle\prod_{j=0}^{N} L(\Omega, \rho_j)\Big)^* \\ v_i^* & \longrightarrow & \Pi_i^*(v_i^*) = v_i^* \cdot \overrightarrow{e_i}, \end{array}$$

où $\Big\{\overrightarrow{e_i}, \ i = 0, \dots, N\Big\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{N+1}$.

$\boxed{\Lambda^* :}$

De même l'opérateur adjoint $\Lambda^* : \Big(\displaystyle\prod_{j=0}^{N} L(\Omega, \rho_j)\Big)^* \longrightarrow \mathbf{V}^*$ est défini par

$$\begin{aligned} \bigg\langle \Lambda^*\Big(\sum_{i=0}^{N} w_i^* \overrightarrow{e_i}\Big); v \bigg\rangle & \doteq \Big\langle \Lambda^*\Big(\overrightarrow{w^*}\Big); v\Big\rangle = \Big\langle \overrightarrow{w^*}; \Lambda(v)\Big\rangle \\ & = \int_\Omega v w_0^* \, d\mu_0 + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega w_i^* \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mu_i \, . \end{aligned}$$

On déduit alors, pour $T \in \partial J_0(u)$, qu'il existe $(N+1)$ fonctions

$$(w_0^*, \ldots, w_N^*) \in \prod_{i=0}^{N} L(\Omega, \rho_i'),$$

telles que

$$\langle T; v\rangle = \int_\Omega v w_0^* \, d\mu_0 + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega w_i^* \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mu_i \ .$$

De plus, on a, pour $i = 1, \ldots, N$,

$$w_i^*(x) \in \partial\Phi_i\Big(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big) \quad \mu_i\text{-p.p. } x \in \Omega,$$

et

$$w_0^*(x) \in \partial\Phi_0(x, u(x)) \quad \mu_0\text{-p.p. } x \in \Omega.$$

■

Définition 3.16. *(Voir [85], [16]) Sous les hypothèses et les notations du Lemme 3.15, on définit l'opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque de Leray-Lions par*

$$-\mathrm{div}_{\overrightarrow{\rho}}\left(\partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \omega_0 \ \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

où $\overrightarrow{\rho} = (\rho_0, \ldots, \rho_N)$.

Dans le lemme suivant, on donne quelques hypothèses supplémentaires pour rendre l'opérateur multivoque $u \mapsto \partial J_0(u)$ fortement monotone.

Lemme 3.17. *(Voir [85]) Supposons que les hypothèses du Lemme 3.15 sont vérifiées et que*

(A) *Pour tout $j = 0, \ldots, N$ et pour μ_j-p.p. $x \in \Omega$, les fonctions $\sigma \mapsto \partial\Phi_j(x, \sigma)$ sont monotones ;*

(B) *Pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ dans $\mathbf{V}$ qui converge faiblement vers un élément $u \in \mathbf{V}$, telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n^* - T^*; u_n - u\rangle = 0, \quad \textit{pour certains} \quad T_n^* \in \partial J_0(u_n),\ T^* \in \partial J_0(u),$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_0\big(\,|u_n - u|\,\big) = 0, \tag{3.22}$$

on a l'existence d'une sous-suite notée aussi (u_n) qui vérifie :

(B1) $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ *μ_i-p.p. $x \in \Omega$, pour $i = 1, \ldots, N$.*

(B2) *Il existe une constante $M > 1$ telle que*

$$\lim_n \rho_j \left(\left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right| \chi_{E_{nj}} \right) = 0, \text{ pour } j = 1, \ldots, N,$$

où

$$E_{nj} \doteq \left\{ x \in \Omega : \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x) \right| > M, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right| > M - 1 \right\}.$$

(B3)

$$\text{Si} \quad \lim_n \int_{F_{nj}} w^*_{nj} \frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x)\, d\mu_j = 0, \text{ alors } \quad \lim_n \rho_j \left(\left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x) \right| \chi_{F_{nj}} \right) = 0,$$

où

$$F_{nj} \doteq \left\{ x \in \Omega : \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x) \right| > M, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right| \leqslant M - 1 \right\},$$

et

$$w^*_{nj}(x) \in \partial\Phi_j \left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x) \right), \quad j = 1, \ldots, N \quad \mu_j\text{-p.p. } x \in \Omega.$$

Alors, avec toutes ces hypothèses, on déduit que

(i) *$u \mapsto \partial J_0(u)$ est monotone.*

(ii) *$u_n \to u$ fortement dans $\mathbf{V}$ (pour toute la suite).*

Preuve:
On reprend la preuve de [85] :
Soit $j \in \{1, \ldots, N\}$ fixé, on décompose le domaine Ω de la manière suivante

$$\Omega = E_{nj} \cup F_{nj} \cup G_{nj},$$

où

$$G_{nj} \doteq \left\{ x \in \Omega : \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x) \right| \leqslant M \right\}.$$

On définit

$$\delta^j_n(x) = \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right|.$$

D'après **(B1)** et pour tout $j = 1, \ldots, N$, on a

$$\delta^j_n(x) \to 0, \ \mu_j\text{-p.p. } x \in \Omega.$$

De plus, on a

$$\rho_j(\delta^j_n) \leqslant \rho_j\big(\delta^j_n \chi_{E_{nj}}\big) + \rho_j\big(\delta^j_n \chi_{F_{nj}}\big) + \rho_j\big(\delta^j_n \chi_{G_{nj}}\big). \tag{3.23}$$

Montrons que chacun des trois termes à droite tend vers 0, lorsque $n \to +\infty$.

(1) Si $x \in G_{nj}$, alors on a

$$0 \leqslant \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right| \leqslant \underbrace{M + \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right|}_{\in L(\Omega, \rho_j)}.$$

Par suite, $\delta_n^j \chi_{G_{nj}} \in L(\Omega, \rho_j)$ et puisque ρ_j est une norme absolument continue, on déduit que

$$\rho_j\big(\delta_n^j \chi_{G_{nj}}\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{3.24}$$

(2) D'après **(B2)**, on a

$$\rho_j\big(\delta_n^j \chi_{E_{nj}}\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{3.25}$$

(3) D'après le Lemme 3.15, on a pour $T_n^* \in \partial J_0(u_n),\ T^* \in \partial J_0(u)$,

$$\begin{aligned} \langle T_n^* - T^*; u_n - u \rangle &= \int_\Omega \big(w_{n0}^* - w_0^*\big)\big(u_n - u\big)\, d\mu_0 \\ &+ \sum_{j=1}^N \int_\Omega \big(w_{nj}^* - w_j^*\big) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) d\mu_j \\ &\geqslant \sum_{j=1}^N \int_\Omega \big(w_{nj}^* - w_j^*\big) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) d\mu_j \\ &\geqslant 0, \end{aligned}$$

où $w_{nj}^*(x) \in \partial \Phi_j\left(x, \dfrac{\partial u_n}{\partial x_j}(x)\right)$, $w_j^*(x) \in \partial \Phi_j\left(x, \dfrac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right)$, μ_j-p.p. $x \in \Omega$. En effet, ceci découle de la condition **(A)** (c'est-à-dire la monotonicité des fonctions $\partial \Phi_j(x, \cdot)$). En particulier, cela implique que la fonction $u \mapsto \partial J_0(u)$ est monotone, d'où **(i)**.

Par suite, d'après **(B)** et **(3)**, on a pour tout $j = 1, \ldots, N$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \big(w_{nj}^* - w_j^*\big) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) d\mu_j = 0. \tag{3.26}$$

D'autre part, on a

$$w_{nj}^* \frac{\partial u_n}{\partial x_j} = \big(w_{nj}^* - w_j^*\big) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + w_{nj}^* \frac{\partial u}{\partial x_j} + w_j^* \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_{F_{nj}} \left| w_{nj}^* \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right| d\mu_j \leqslant \int_\Omega \big(w_{nj}^* - w_j^*\big) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) d\mu_j + \int_{F_{nj}} \left| w_{nj}^* \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| d\mu_j \\ + \int_{F_{nj}} \left| w_j^* \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right| d\mu_j. \end{aligned} \tag{3.27}$$

(α) D'après (3.26), on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \left(w^*_{nj}-w^*_j\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)d\mu_j=0.$$

(β) On a $w^*_j\in L(\Omega,\rho'_j)$. De plus, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} w^*_j(x)\chi_{F_{nj}}(x)=0$, μ_j-p.p. $x\in\Omega$. Comme la suite (u_n) est bornée dans $\mathbf{V}$, on a donc

$$\int_{F_{nj}}\left|w^*_j\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right|d\mu_j\leqslant C\ \rho'_j(w^*_j\chi_{F_{nj}})\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$

car la norme ρ'_j est absolument continue.

(γ) D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{F_{nj}}\left|w^*_{nj}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|d\mu_j\leqslant\rho_j\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\chi_{F_{nj}}\Big)\rho'_j(w^*_{nj}).\tag{3.28}$$

Le fait que $w^*_{nj}\in\partial F_j\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_j}\right)$ et la suite $\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_j}\right)_n$ est bornée dans $L(\Omega,\rho_j)$ (car $(u_n)_n$ est bornée dans $\mathbf{V}$), implique que le dernier terme $\rho'_j(w^*_{nj})$ dans (3.28) reste dans un borné de $\mathbb{R}$, lorsque $n\to+\infty$.

D'autre part, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}\in L(\Omega,\rho_j)\ \text{ et }\ \lim_{n\to+\infty}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\chi_{F_{nj}}(x)=0,\quad\mu_j\text{-p.p.}$$

De même, comme la norme ρ_j est absolument continue, on trouve

$$\rho_j\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\chi_{F_{nj}}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.\tag{3.29}$$

Par conséquent, (3.28) nous donne

$$\int_{F_{nj}}w^*_{nj}\frac{\partial u}{\partial x_j}d\mu_j\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.\tag{3.30}$$

On déduit de (α), (β) et (γ) que

$$\int_{F_{nj}}w^*_{nj}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}d\mu_j\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

En utilisant l'hypothèse **(B3)**, on obtient

$$\lim_n\rho_j\left(\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x)\right|\chi_{F_{nj}}\right)=0.\tag{3.31}$$

Les relations (3.29) et (3.31) impliquent

$$\rho_j\big(\delta^j_n\chi_{F_{nj}}\big)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.\tag{3.32}$$

Enfin, grâce aux relations (3.24), (3.25) et (3.32), on conclut de la relation (3.23) que

$$\rho_j\left(\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En effet, en raisonnant par l'absurde, on a pour toute la suite :

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_j\left(\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\right) = 0.$$

Ce qui montre **(ii)** et implique que

$$u_n \to u \text{ fortement dans } \mathbf{V}.$$

■

3.3 Construction générale d'un opérateur $\overline{\rho}^{>}$ multivoque fortement monotone

Dans cette section, on construit un opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque de Leray-Lions (voir la Définition 3.16) qui est un opérateur "totalement discontinu" dans le sens donné ci-dessous et on donne des conditions nécessaires pour qu'il soit fortement monotone (voir [16]).

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, à bord $\partial\Omega$ Lipschitzien.
On considère $\varphi_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, N$ une fonction borélienne telle que :

(C1) pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, la fonction $\varphi_i(x,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire, strictement croissante et $\varphi_i(x,0) = 0$.

(C2) $\varphi_i(x,\cdot) : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue à droite et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \inf_{\Omega}\text{ess}\ \ \varphi_i(x,t) = +\infty$.

(C3) Il existe $2m$ nombres réels (points de discontinuité) : $\delta_1^i < \ldots < \delta_{2m}^i$ de sorte que pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, la fonction $\varphi_i(x,\cdot) : \mathbb{R} \setminus \{\delta_1^i, \ldots, \delta_{2m}^i\} \to \mathbb{R}$ soit continue.

Sous ces hypothèses, on définit la fonction suivante :

$$\Phi_i(x,t) = \int_0^{|t|} \varphi_i(x,s)\, ds, \quad \forall\, x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Proposition 3.18. *(Voir [16]) Sous les conditions **(C1)**, **(C2)** et **(C3)**, la fonction Φ_i vérifie les propriétés suivantes :*

(a) *pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, $\Phi_i\,(x,\cdot)$ est une $\mathcal{N}$-fonction sur $[0;+\infty[$.*

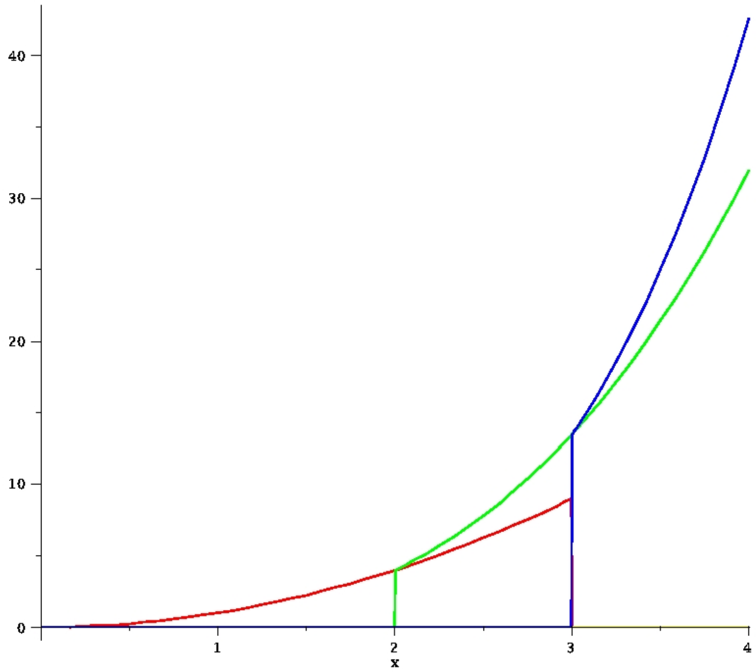


Figure 3.1 – Le graphe de $\sigma = \Phi_i(x,t)$.

(b) $\Phi_i\,(x,\cdot)$ *est convexe.*

(c) $\Phi_i\,(x,\cdot)$ *est localement Lipschitzienne et* $\forall\ t \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\partial\Phi_i(x,t) = \left[\liminf_{\sigma\to t} \varphi_i(x,\sigma);\ \limsup_{\sigma\to t} \varphi_i(x,\sigma)\right]. \tag{3.33}$$

(d) $\forall\ t \in \mathbb{R}$ *et* $\forall\ w(x,t) \in \partial\Phi_i(x,t)$*, on a*

$$\int_0^{|t|} w(x,\sigma)d\sigma = \Phi_i(x,t). \tag{3.34}$$

Preuve:

(a,b) D'après les conditions **(C1)** et **(C2)**, on voit que les hypothèses **(a)**-**(c)** de la Définition 2.16 sont vérifiées, ainsi les propriétés **(a)** et **(b)** de la Proposition 3.18 se déduisent facilement.

(c) D'après le Lemme 2.42, la fonction $\Phi_i\,(x,\cdot)$ est localement Lipschitzienne. De plus, d'après la Proposition 2.71, on a

$$\partial\Phi_i(x,t) = \left[\liminf_{\sigma\to t} \varphi_i(x,\sigma);\ \limsup_{\sigma\to t} \varphi_i(x,\sigma)\right].$$

(d) On rappelle que, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (sauf aux $2m$ points $(\delta_j^i)_{j=1,\dots,2m}$ de discontinuité), on a

$$\varphi_i(x,t) = \liminf_{\sigma \to t} \varphi_i(x,\sigma) = \limsup_{\sigma \to t} \varphi_i(x,\sigma).$$

Ainsi $\forall\, t \in \mathbb{R}$ et $\forall\, w(x,t) \in \partial\Phi_i(x,t)$, on a $\displaystyle\int_0^{|t|} w(x,\sigma)d\sigma = \Phi_i(x,t)$.

■

Remarque 3.19. *On remarque que*

$$\liminf_{\sigma \to t} \varphi_i(x,\sigma) = \lim_{\varepsilon \to 0\ ,\ \varepsilon > 0} \varphi_i(x, t-\varepsilon),$$

et

$$\limsup_{\sigma \to t} \varphi_i(x,\sigma) = \lim_{\varepsilon \to 0\ ,\ \varepsilon > 0} \varphi_i(x, t+\varepsilon).$$

Vu l'importance de la condition $(\triangle_2)$ dans l'utilisation et la manipulation des espaces d'Orlicz (voir la Section 2.2), on a besoin d'ajouter l'hypothèse de croissance suivante sur les fonctions Φ_i assurant cette condition.

(C4) Il existe deux nombres réels : $\underline{\alpha} > 1$, $\overline{\alpha} > 1$, tels que pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ et $\forall\, w_i(x,t) \in \partial\Phi_i(x,t)$, on a

$$\underline{\alpha}\ \Phi_i(x,t) \leqslant t\ w_i(x,t) \leqslant \overline{\alpha}\ \Phi_i(x,t).$$

Remarque 3.20. **(i)** *D'après la Remarque 3.19, cette dernière condition est équivalente à*

$$\underline{\alpha}\ \Phi_i(x,t) \leqslant t \lim_{\varepsilon \to 0\ ,\ \varepsilon > 0} \varphi_i(x,t-\varepsilon) \leqslant t \lim_{\varepsilon \to 0\ ,\ \varepsilon > 0} \varphi_i(x,t+\varepsilon) \leqslant \overline{\alpha}\ \Phi_i(x,t).$$

(ii) *D'après la condition* **(C4)**, *on a pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, pour tout $t > 0$ et tout $\sigma > 1$ (voir [2] et [46, page 24]),*

$$\sigma^{\underline{\alpha}}\ \Phi_i(x,t) \leqslant \Phi_i(x,\sigma t) \leqslant \sigma^{\overline{\alpha}}\ \Phi_i(x,t). \tag{3.35}$$

(iii) *Il existe $K > 0$ tel que pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\Phi_i(x,2t) \leqslant K\ \Phi_i(x,t). \tag{3.36}$$

D'où la $\mathcal{N}$-fonction $\Phi_i(x,\cdot)$ satisfait la condition $(\triangle_2)$ (voir Définition 2.1).

(iv) *D'après* ***(C4)***, *on a les injections continues suivantes (voir [86, Corollaire 5 page 26]) :*

$$L^{\overline{\alpha}}(\Omega,\mu_i) \hookrightarrow L^{\Phi_i}(\Omega,\mu_i) \hookrightarrow L^{\underline{\alpha}}(\Omega,\mu_i). \tag{3.37}$$

Exemple 3.21. *Après avoir énoncé les hypothèses* **(C1)**-**(C4)**, *on donne quelques exemples des fonctions* $\varphi(x,t)$ *et* $\Phi(x,t)$ *qui les vérifient (pour plus de détails, voir [20] et [60]) :*

(i) *Soient* $\delta > 0$, $q(x)$ *et* $p(x)$ *deux fonctions mesurables bornées telles que*

$$2 \leqslant \inf_{\Omega} \operatorname{ess} q(x) \leqslant q(x) \leqslant \sup_{\Omega} \operatorname{ess} q < \inf_{\Omega} \operatorname{ess} p(x) \leqslant p(x) \leqslant \sup_{\Omega} \operatorname{ess} p < +\infty.$$

On considère

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} q(x)\alpha(x)|t|^{q(x)-2}t & si \;\; |t| < \delta, \\ p(x)|t|^{p(x)-2}t & si \;\; |t| > \delta, \\ p(x)\cdot(\delta)^{p(x)-1} & si \;\; t = \delta, \\ -p(x)\cdot(\delta)^{p(x)-1} & si \;\; t = -\delta, \end{cases}$$

et

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \alpha(x)|t|^{q(x)} & si \;\; |t| \leqslant \delta, \\ |t|^{p(x)} & si \;\; |t| > \delta, \end{cases} \qquad où \;\; \alpha(x) = (\delta)^{p(x)-q(x)}.$$

On peut choisir $\underline{\alpha} = \inf_{\Omega} \operatorname{ess} q(x)$ *et* $\overline{\alpha} = \sup_{\Omega} \operatorname{ess} p(x)$.

(ii) *Soit* $p(x)$ *une fonction mesurable bornée telle que*

$$3 \leqslant \inf_{\Omega} \operatorname{ess} p(x) \leqslant p(x) \leqslant \sup_{\Omega} \operatorname{ess} p(x) < +\infty.$$

On considère

$$\varphi(x,t) = p(x)\frac{|t|^{p(x)-2}t}{\log(1+|t|)},$$

et

$$\Phi(x,t) = \frac{|t|^{p(x)}}{\log(1+|t|)} + \int_0^{|t|} \frac{s^{p(x)}}{(1+s)(\log(1+s))^2}\,\mathrm{d}s.$$

On peut choisir $\underline{\alpha} = \inf_{\Omega} \operatorname{ess} p(x) - 1$ *et* $\overline{\alpha} = \sup_{\Omega} \operatorname{ess} p(x)$.

(iii) *Soient* $\alpha > 0$ *et* $p(x)$ *une fonction mesurable bornée telle que*

$$2 \leqslant \inf_{\Omega} \operatorname{ess} p(x) \leqslant p(x) \leqslant \sup_{\Omega} \operatorname{ess} p(x) < +\infty.$$

On considère

$$\varphi(x,t) = p(x)\cdot\log(1+\alpha+|t|)\cdot|t|^{p(x)-2}t,$$

et

$$\Phi(x,t) = \log(1+\alpha+|t|)\cdot|t|^{p(x)} - \int_0^{|t|} \frac{s^{p(x)}}{1+\alpha+s}\,\mathrm{d}s.$$

On peut choisir $\underline{\alpha} = \inf_{\Omega} \operatorname{ess} p(x)$ *et* $\overline{\alpha} = \sup_{\Omega} \operatorname{ess} p(x) + 1$.

Proposition 3.22. *(Voir [16]) Soient $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $t, s \in \mathbb{R}$.*
On suppose que

$$(t-s)(w_t - w_s) = 0 \quad \text{où} \quad w_t \in \partial\Phi_i(x,t) \text{ et } w_s \in \partial\Phi_i(x,s),$$

alors

$$t = s.$$

Preuve:
Raisonnons par l'absurde et supposons que $t \neq s$, alors on aura $w_t = w_s$.
D'après la condition **(C1)**, on a $\varphi_i(x,\cdot)$ est strictement croissante, donc si on suppose par exemple que $t < s$, on obtient

$$w_t \leqslant \limsup_{\sigma \to t} \varphi_i(x,\sigma) < \liminf_{\sigma \to s} \varphi_i(x,\sigma) \leqslant w_s,$$

ce qui contredit le fait que $w_t = w_s$, par conséquent

$$t = s.$$

■

On définit l'espace d'Orlicz associé à la $\mathcal{N}$-fonction Φ_i par :

$$L^{\Phi_i}(\Omega,\mu_i) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \mu_i\text{-mesurable et } \int_\Omega \Phi_i\Big(x, u(x)\Big)\, d\mu_i < +\infty \right\}.$$

Cet espace est muni de la norme de fonction de Banach (de Luxemburg) suivante :

$$\rho_i(u) = \|u\|_{\Phi_i} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{u(x)}{\lambda}\right)\, d\mu_i \leqslant 1 \right\}.$$

On suppose de plus que la $\mathcal{N}$-fonction $\overline{\Phi_i}(x,\cdot)$ complémentaire de $\Phi_i(x,\cdot)$ (voir la Définition 2.19) vérifie la condition $(\triangle_2)$.

Remarque 3.23. *(Voir [17]) D'après l'exemple 2.22, si la $\mathcal{N}$-fonction Φ_i vérifie la condition $(\triangle_2)$, alors $\overline{\Phi_i}(x,\cdot)$ ne la vérifie pas nécessairement. C'est pour cela, si par exemple, on suppose que*
(UC) *pour presque tout $x \in \Omega$ la fonction $t \in [0,+\infty) \mapsto \Phi_i\big(x,\sqrt{t}\big)$ est convexe,*
alors dans ce cas $\overline{\Phi_i}(x,\cdot)$ vérifie la condition $(\triangle_2)$.

En effet, d'après la Proposition 2.2. de [60], l'espace de Banach $L^{\Phi_i}(\Omega)$ est uniformément convexe (c'est-à-dire $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que

$$u, v \in L^{\Phi_i}(\Omega),\ \|u\|_{\Phi_i} \leqslant 1,\ \|v\|_{\Phi_i} \leqslant 1 \text{ et } \|u-v\|_{\Phi_i} > \varepsilon \Longrightarrow \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{\Phi_i} < 1-\delta).$$

De plus, tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif (voir [10]), alors d'après le Théorème 2.39, on déduit que $\overline{\Phi_i}(x,\cdot)$ vérifie la condition $(\triangle_2)$.

On définit l'espace d'Orlicz-Sobolev associé à $\overrightarrow{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_N)$ noté $\mathbf{V}_0 = W_0^{1,\rho_1,\ldots,\rho_N}(\Omega, \mu_1, \ldots, \mu_N)$ (voir Définitions 3.9 et 3.12) comme la fermeture de l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ muni de la norme suivante (voir aussi [16]) :

$$\|v\| = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\right),$$

où

$$\rho_i \left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\right) = \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}{\lambda}\right)\, d\mu_i \leqslant 1\right\}.$$

On définit la fonctionnelle J sur $\mathbf{V}_0$ de la façon suivante :

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i\ .$$

Le résultat principal de ce paragraphe est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.24. *(Voir [16]) Sous les conditions* **(C1)-(C4)**, *l'opérateur $\overrightarrow{\rho}$ multivoque de Leray-Lions (voir Définition 3.16) défini par :*

$$Au = -\mathrm{div}_{\overrightarrow{\rho}}\left(\partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right)$$

est fortement monotone sur l'espace d'Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\rho_1,\ldots,\rho_N}(\Omega, \mu_1, \ldots, \mu_N)$.

Remarque 3.25. *(Voir [16]) L'espace d'Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\rho_1,\ldots,\rho_N}(\Omega, \mu_1, \ldots, \mu_N)$ s'injecte dans l'espace $W_0^{1,1}(\Omega, \mu_1, \ldots, \mu_N)$ de façon continue.*

Preuve:
D'après la condition **(C2)**, on a $\lim_{t\to+\infty} \inf\mathrm{ess}_{\Omega}\ \varphi_i(x,t) = +\infty$, donc il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \geqslant t_0 > 0$, on a $1 \leqslant \inf\mathrm{ess}_{\Omega}\ \varphi_i(x,t)$.
Par suite,

$$\int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|\geqslant t_0\right\}} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|\, d\mu_i \leqslant \int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|\geqslant t_0\right\}} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right| \left|\varphi_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right)\right|\, d\mu_i\,,$$

et d'après la condition **(C4)**, on a

$$\int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|\geqslant t_0\right\}} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right| \left|\varphi_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right)\right|\, d\mu_i \leqslant \overline{\alpha} \int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|\geqslant t_0\right\}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i\,.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right| \, d\mu_i &= \int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|\geqslant t_0\right\}} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right| \, d\mu_i + \int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|< t_0\right\}} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right| \, d\mu_i \\
&\leqslant \overline{\alpha} \int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|\geqslant t_0\right\}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right) \, d\mu_i + C \\
&\leqslant \overline{\alpha} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right) \, d\mu_i + C.
\end{aligned}$$

Alors,

$$W_0^{1,\rho_1,\ldots,\rho_N}(\Omega, \mu_1, \ldots, \mu_N) \hookrightarrow W_0^{1,1}(\Omega, \mu_1, \ldots, \mu_N).$$

où $W_0^{1,1}(\Omega, \mu_1, \ldots, \mu_N)$ est la fermeture de l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ muni de la norme suivante

$$\|v\| = \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^1(\Omega,\mu_i)}.$$

■

Pour démontrer le Théorème 3.24, nous allons montrer la monotonicité forte de l'opérateur multivoque :

$$u \mapsto -\mathrm{div}_{\overrightarrow{\rho}}\left(\partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right).$$

Pour cela, on considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ bornée dans $\mathbf{V}_0$ qui converge faiblement vers $u \in \mathbf{V}_0$. Il faut montrer que $\forall\, T_n \in \partial J(u_n)$ et $\forall\, T \in \partial J(u)$, vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n - T; u_n - u\rangle = 0,$$

alors on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ fortement dans $\mathbf{V}_0$.
L'idée générale de la preuve c'est d'appliquer le Lemme 3.17. Mais tout d'abord, on montre que toutes les hypothèses de ce lemme sont satisfaites dans les lemmes suivants :

Dans un premier temps, on vérifie l'hypothèse **(B1)** du Lemme 3.17 :

Lemme 3.26. *(Voir [16]) Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une sous-suite de (u_n) aussi notée (u_n) telle que pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, on a*

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

Preuve:
Soient $T_n \in \partial J(u_n)$ et $T \in \partial J(u)$ vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n - T, u_n - u\rangle = 0.$$

Alors, il existe une sélection (voir Lemme 3.15)

$$w_{ni}^* \in \partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) \text{ et } w_i^* \in \partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right),$$

telle que $T_n = -\displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial w_{ni}^*}{\partial x_i}$, $\quad T = -\displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial w_i^*}{\partial x_i}$ $\quad$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^N \int_\Omega (w_{ni}^*(x) - w_i^*(x))\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i \ = 0.$$

Étant donné que la fonction $\Phi_i\,(x,\cdot)$ est convexe, on déduit que pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, $F_{ni}(x) \geqslant 0$ où

$$F_{ni}(x) \doteq (w_{ni}^*(x) - w_i^*(x))\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right). \tag{3.38}$$

Par suite, $\forall\ i = 1, \ldots, N$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (w_{ni}^*(x) - w_i^*(x))\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i \ = 0. \tag{3.39}$$

Donc, on peut extraire une sous-suite de $(F_{ni}(x))_n$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} (w_{ni}^*(x) - w_i^*(x))\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) = 0\ ,\ \mu_i\text{-p.p. } x \in \Omega. \tag{3.40}$$

D'après la condition **(C4)**, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\underline{\alpha}\ \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) \leqslant w_{ni}^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \leqslant \overline{\alpha}\ \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right). \tag{3.41}$$

La deuxième inégalité de (3.41) implique

$$\frac{1}{\overline{\alpha}}\ w_{ni}^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \leqslant\ \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right). \tag{3.42}$$

Puisque $\Phi_i(x,\cdot)$ est convexe, alors d'après la définition de la sous-différentielle, on a

$$w_{ni}^*(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) \leqslant \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) - \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right), \tag{3.43}$$

ce qui implique

$$w_{ni}^*(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \leqslant w_{ni}^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) + \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) - \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right). \tag{3.44}$$

Par suite, en combinant (3.42) et (3.44), on obtient

$$w_{ni}^*(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \leqslant \left(1 - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right) w_{ni}^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) + \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right). \tag{3.45}$$

En développant $F_{ni}(x)$ de la relation (3.38), on trouve que

$$w_{ni}^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) = w_i^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - w_i^*(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + w_{ni}^*(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + F_{ni}(x). \tag{3.46}$$

Alors, en utilisant (3.45) et (3.46), on obtient

$$\begin{aligned} w_{ni}^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \leqslant w_i^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - w_i^*(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \\ \left(1 - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right) w_{ni}^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) + \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + F_{ni}(x). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Cette dernière relation nous donne

$$\frac{1}{\overline{\alpha}}\, w_{ni}^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \leqslant w_i^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - w_i^*(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + F_{ni}(x). \tag{3.48}$$

D'autre part,

⊛ si $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right| > 1$, alors d'après la relation (3.35), on a

$$\Phi_i(x,1)\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right|^{\underline{\alpha}} \leqslant \Phi_i\left(x, \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right| . 1\right), \tag{3.49}$$

⊛ si $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant 1$ et ayant $\underline{\alpha} > 1$, alors on a

$$\Phi_i\left(x,1\right)\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right|^{\underline{\alpha}} \leqslant \Phi_i\left(x,1\right). \tag{3.50}$$

Donc, d'après les relations (3.49) et (3.50), on a

$$\Phi_i\left(x,1\right)\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right|^{\underline{\alpha}} \leqslant \Phi_i\left(x,1\right) + \Phi_i\left(x, \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right|\right). \tag{3.51}$$

On multiplie (3.51) par $\underline{\alpha}$ et on utilise la première inégalité de (3.41), on obtient

$$\underline{\alpha}\ \Phi_i\,(x,1)\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right|^{\underline{\alpha}} - \underline{\alpha}\ \Phi_i\,(x,1)\ \leqslant\ w_{ni}^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x). \tag{3.52}$$

On multiplie ensuite (3.52) par $\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ et on utilise la relation (3.48), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\underline{\alpha}}{\overline{\alpha}}\ \Phi_i\,(x,1)\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right|^{\underline{\alpha}} - \frac{\underline{\alpha}}{\overline{\alpha}}\ \Phi_i\,(x,1)\ \leqslant\ & \\ w_i^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - w_i^*(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \Phi_i&\left(x,\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + F_{ni}(x).\end{aligned} \tag{3.53}$$

D'après (3.40), on a pu extraire une sous-suite $(F_{ni}(x))_n$ qui est convergente, alors il existe une fonction $K_1(x)$ indépendante de n telle que

$$-w_i^*(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \Phi_i\left(x,\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + F_{ni}(x) \leqslant K_1(x), \tag{3.54}$$

alors les relations (3.53) et (3.54) nous donnent

$$\frac{\underline{\alpha}}{\overline{\alpha}}\ \Phi_i\,(x,1)\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right|^{\underline{\alpha}}\ \leqslant\ \frac{\underline{\alpha}}{\overline{\alpha}}\ \Phi_i\,(x,1)\ + w_i^*(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) + K_1(x). \tag{3.55}$$

D'après la condition **(C1)**, on a $\Phi_i\,(x,1) > 0$ et comme $\underline{\alpha} > 1$, alors μ_i-p.p.

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right|^{\underline{\alpha}}\ \leqslant\ 1 + \left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}\ \Phi_i\,(x,1)}\ \ w_i^*(x)\right)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) + K_2(x). \tag{3.56}$$

Par conséquent, la suite $\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$, car sinon, il existe une sous-suite de $\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right)_n$ telle que $\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ce qui contredit la relation (3.56).
Alors, il existe une sous-suite telle que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Upsilon_i(x).$$

En plus, la suite $(w_{ni}^*(x))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$, ceci d'après la Proposition 2.58 et puisque $\left(\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right)$ est bornée. Alors de même, il existe une sous-suite telle que

$$w_{ni}^*(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widehat{w}_i(x).$$

On a aussi (voir la Proposition 2.64),

$$\widehat{w}_i(x) \in \partial\Phi_i\big(x, \Upsilon_i(x)\big).$$

Par conséquent, la relation (3.40) s'écrit à la limite, de la manière suivante :

$$(\widehat{w}_i(x) - w_i^*(x)) \left(\Upsilon_i(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) = 0.$$

D'après la Proposition 3.22, on déduit que

$$\Upsilon_i(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).$$

Finalement, on a l'existence d'une sous-suite qui vérifie

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \ , \text{ pour } \mu_i\text{-presque tout } x \in \Omega.$$

$\blacksquare$

Ensuite, l'hypothèse **(B2)** est satisfaite grâce au lemme suivant :

Lemme 3.27. *(Voir [16]) Soit $M > 1$ une constante telle que*

$$\begin{cases} M \geqslant \Big(\sup\big\{ \left|\delta_j^i\right| : 1 \leqslant i \leqslant N \ \textit{et} \ 1 \leqslant j \leqslant 2m \big\} + 2 \Big), \\ \\ \textit{la mesure de l'ensemble } \left\{ x \in \Omega : \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| = M \right\} \textit{ soit nulle.} \end{cases} \tag{3.57}$$

On définit l'ensemble suivant

$$\Theta_{ni} \doteq \left\{ x \in \Omega : \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \right| > M \ \ \textit{et} \ \ \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| > M - 1 \right\}.$$

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\Theta_{ni}} \Phi_i \left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) d\mu_i \ = 0. \tag{3.58}$$

D'après le choix de la constante M, on déduit que :

Remarque 3.28. *Soit $i \in \big\{1, \dots, N\big\}$. Alors, d'après la définition de M et pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, la fonction*

$$\begin{array}{rl} \varphi_i(x, \cdot) :]M-2, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \varphi_i(x,t) \end{array} \tag{3.59}$$

est continue. Par suite, si $x \in \Theta_{ni}$, on a alors

$$\partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) = \left\{\varphi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right)\right\}, \tag{3.60}$$

et

$$\partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) = \left\{\varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right\}. \tag{3.61}$$

Preuve du Lemme 3.27 :
Soit $\varepsilon > 0$, on définit l'ensemble suivant :

$$\Omega_{ni}^{\varepsilon} \doteq \left\{x \in \Omega : \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| > \varepsilon\right\}.$$

Son complémentaire dans Ω est donné par :

$$(\Omega_{ni}^{\varepsilon})^c = \left\{x \in \Omega : \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Soit aussi l'ensemble

$$\begin{aligned}\Theta_{ni}^{\varepsilon} &\doteq \Theta_{ni} \cap (\Omega_{ni}^{\varepsilon})^c \\ &= \left\{x \in \Omega : \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right| > M, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| > M - 1 \text{ et } \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant \varepsilon\right\}.\end{aligned}$$

Sous ces notations, on a alors,

$$\Theta_{ni} \setminus \Theta_{ni}^{\varepsilon} = \Theta_{ni} \cap \Omega_{ni}^{\varepsilon} \subset \Omega_{ni}^{\varepsilon}.$$

Par suite, on peut décomposer l'intégrale suivant comme suit :

$$\begin{aligned}&\int_{\Theta_{ni}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i = \\ &\quad\int_{\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i + \int_{\Theta_{ni} \setminus \Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i\ .\end{aligned} \tag{3.62}$$

$\boxed{\text{Sur } \Theta_{ni}^{\varepsilon}}$

On a $\Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \leqslant \Phi_i\left(x, \varepsilon\right).$
Alors, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i = 0. \tag{3.63}$$

$\boxed{\text{Sur } \Theta_{ni} \setminus \Theta_{ni}^{\varepsilon}}$

La fonction $\Phi_i(x,\cdot)$ est convexe, on a alors,

$$\Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \leqslant \frac{1}{2}\Phi_i\left(x, 2\,\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) + \frac{1}{2}\Phi_i\left(x, 2\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right). \tag{3.64}$$

En plus, la fonction $\Phi_i(x,\cdot)$ vérifie la condition $(\triangle_2)$ (voir la Remarque 3.20).
Par suite, d'après (3.64), on déduit que :

$$\Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \leqslant 2^{\overline{\alpha}-1}\,\Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) + 2^{\overline{\alpha}-1}\,\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right). \tag{3.65}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int_{\Theta_{ni}\setminus\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i \leqslant \\ C\int_{\Theta_{ni}\setminus\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i + C\int_{\Theta_{ni}\setminus\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i\ ,\end{aligned} \tag{3.66}$$

où C est une constante positive.
De plus, comme on a l'inclusion suivante $\Theta_{ni} \setminus \Theta_{ni}^{\varepsilon} \subset \Omega_{ni}^{\varepsilon}$, on trouve

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty}\int_{\Theta_{ni}\setminus\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i \leqslant \\ C\limsup_{n\to+\infty}\int_{\Theta_{ni}\setminus\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i + C\limsup_{n\to+\infty}\int_{\Omega_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i\ .\end{aligned} \tag{3.67}$$

On rappelle que

$$\Omega_{ni}^{\varepsilon} = \left\{x\in\Omega : \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| > \varepsilon\right\}.$$

On sait, d'après le Lemme 3.26, qu'on a

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x),\ \mu_i\text{-p.p. } x\in\Omega,$$

alors, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\Omega_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i = 0. \tag{3.68}$$

Il nous reste à montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\Theta_{ni}\setminus\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i = 0. \tag{3.69}$$

Pour cela, on définit la fonction suivante :

$$G_n^{\varphi_i}(x) \doteq \left(\varphi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) - \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right). \tag{3.70}$$

On développe $G_n^{\varphi_i}(x)$, on obtient alors

$$\begin{aligned}\varphi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right)\, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) = G_n^{\varphi_i}(x) + \\ + \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + \varphi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right)\, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x).\end{aligned} \tag{3.71}$$

La $\mathcal{N}$-fonction $\Phi_i(x,\cdot)$ est convexe, alors d'après la définition de la sous-différentielle des fonctions convexes et en utilisant (3.60) de la Remarque 3.28, on a pour $x \in \Theta_{ni}$:

$$\varphi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) \leqslant \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) - \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right), \tag{3.72}$$

ce qui implique,

$$\begin{aligned}\varphi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \leqslant \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + \\ - \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) + \varphi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x).\end{aligned} \tag{3.73}$$

En combinant les relations (3.71) et (3.73), on obtient

$$\begin{aligned}\Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) \leqslant G_n^{\varphi_i}(x) + \\ + \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right).\end{aligned} \tag{3.74}$$

En intégrant (3.74) sur l'ensemble $\Theta_{ni} \setminus \Theta_{ni}^{\varepsilon}$ et puisque $G_n^{\varphi_i}(x) \geqslant 0$ pour μ_i-presque tout x (φ_i est strictement croissante), on déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\Theta_{ni}\setminus\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i \ \leqslant \int_{\Theta_{ni}} G_n^{\varphi_i}(x)\, d\mu_i \ + \\ \int_{\Theta_{ni}\setminus\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i \ + \int_{\Theta_{ni}\setminus\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i\, .\end{aligned} \tag{3.75}$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Theta_{ni}\setminus\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i \quad & \leqslant \underbrace{\int_{\Theta_{ni}} G_n^{\varphi_i}(x)\, d\mu_i}_{\Delta_n^1} \\
& + \underbrace{\int_{\Theta_{ni}} \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i}_{\Delta_n^2} \\
& - \underbrace{\int_{\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i}_{\Delta_n^3} \\
& + \underbrace{\int_{\Theta_{ni}\setminus\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i}_{\Delta_n^4}\ .
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

Traitons chaque terme du membre de droite de cette dernière inégalité :

$\boxed{\text{Pour } \Delta_n^1 \ :}$

D'après (3.39) du Lemme 3.26, il existe

$$
w_{ni}^*(x) \in \partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) \text{ et } w_i^*(x) \in \partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) :
$$

$$
\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega} (w_{ni}^*(x) - w_i^*(x))\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i \ = 0.
$$

En plus, dans (3.38), on a défini la fonction F_{ni} sur Ω par :

$$
F_{ni}(x) = (w_{ni}^*(x) - w_i^*(x))\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right).
$$

Sous les hypothèses du Lemme 3.27, on utilise les relations (3.60) et (3.61) de la Remarque 3.28 sur l'ensemble Θ_{ni}, et on obtient

$$
F_{ni}(x) = \left(\varphi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) - \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \doteq G_n^{\varphi_i}(x),
$$

c'est-à-dire les deux fonctions F_{ni} et $G_n^{\varphi_i}$ coïncident sur l'ensemble Θ_{ni} (voir la définition de $G_n^{\varphi_i}(x)$ dans (3.70)).

Par conséquent,

$$
\Delta_n^1 = \int_{\Theta_{ni}} G_n^{\varphi_i}(x)\, d\mu_i = \int_{\Theta_{ni}} F_{ni}(x)\, d\mu_i \leqslant \int_{\Omega} F_{ni}(x)\, d\mu_i. \tag{3.77}
$$

Par suite, d'après (3.77), on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_n^1 = 0 \tag{3.78}$$

$\boxed{\text{Pour } \Delta_n^2 \ :}$

D'après (3.61), on a pour μ_i-presque tout $x \in \Theta_{ni}$:

$$\varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \in \partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right).$$

Par suite, d'après la Proposition 2.50, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) = \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + \overline{\Phi_i}\left(x, \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right), \tag{3.79}$$

où $\overline{\Phi_i}(x,t) = \sup\limits_{s\geqslant 0}\left\{ts - \Phi_i(x,s)\right\}$ est la fonction conjuguée de $\Phi_i(x,\cdot)$.
D'après la construction de la fonction Φ_i, on a $\Phi_i(x,\cdot) \geqslant 0$ et $\Phi_i(x,0) = 0$, alors

$$\overline{\Phi_i}(x,0) = \sup_{s\geqslant 0}\{-\Phi_i(x,s)\} = -\inf_{s\geqslant 0}\{\Phi_i(x,s)\} = 0.$$

Ensuite, d'après la condition **(C4)**, la relation (3.79) nous donne

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi_i}\left(x, \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right) &\leqslant \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) + \overline{\Phi_i}\left(x, \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right)\\
&= \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\\
&\leqslant \overline{\alpha}\ \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right).
\end{aligned}$$

En intégrant cette dernière relation sur Θ_{ni} et en utilisant le fait que $\overline{\Phi_i}(x,0) = 0$, on obtient,

$$\begin{aligned}
\int_{\Theta_{ni}} \overline{\Phi_i}\left(x, \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right) d\mu_i &= \int_\Omega \overline{\Phi_i}\left(x, \chi_{\Theta_{ni}}(x)\varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right) d\mu_i\\
&\leqslant C\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i < +\infty,
\end{aligned}$$

où C est une constante qui ne dépend pas de u.

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$\left\{\begin{array}{ll}
\chi_{\Theta_{ni}}(x)\varphi_i\left(x, \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \chi_{\Theta_{\infty,i}}(x)\varphi_i\left(x, \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) & \mu_i\text{-p.p. } x \in \Omega,\\
\text{et} & \\
\chi_{\Theta_{ni}}\ \varphi_i\left(x, \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \chi_{\Theta_{\infty,i}}\ \varphi_i\left(x, \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) & \text{fortement dans } L^{\overline{\Phi_i}}(\Omega,\mu_i),
\end{array}\right. \tag{3.80}$$

où $\Theta_{\infty,i} \doteq \left\{ x \in \Omega : \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| > M \right\}$.
Par hypothèse, on a $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ faiblement dans $L^{\Phi_i}(\Omega, \mu_i)$, alors on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\Theta_{ni}} \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i \ = 0. \tag{3.81}$$

$\boxed{\text{Pour } \Delta_n^3 \ :}$

Pour tout $x \in \Theta_{ni}^{\varepsilon}$, on a $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| > M - 1$ et $\left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant \varepsilon$.
Par suite, d'après la condition **(C4)**, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right| \ &\leqslant \ \left|\varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right| \varepsilon \\
&\leqslant \ \varphi_i\left(x, \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|\right)(M-1) \\
&\leqslant \ \varphi_i\left(x, \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| \\
&\leqslant \ \overline{\alpha}\, \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right).
\end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_n^3 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \varphi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i \ = 0. \tag{3.82}$$

$\boxed{\text{Pour } \Delta_n^4 \ :}$

On a

$$\int_{\Theta_{ni}\backslash\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i \ \leqslant \int_{\Omega_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i\ . \tag{3.83}$$

Alors, de (3.68), il résulte

$$\limsup_{n\to+\infty} \Delta_n^4 = 0. \tag{3.84}$$

Revenons à l'inégalité (3.76) : D'après les relations (3.78), (3.81), (3.82) et (3.84), on a $\limsup\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\Theta_{ni}\backslash\Theta_{ni}^{\varepsilon}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x)\right) d\mu_i = 0$, d'où la relation (3.69) est prouvée.
D'après ce qui précède, il s'ensuit que la relation (3.58) est montrée, ce qui achève la démonstration. ■

Enfin, on montre que l'hypothèse **(B3)** est vérifiée par le lemme suivant :

Lemme 3.29. *(Voir [16]) On considère M la constante définie dans le Lemme 3.27. On définit l'ensemble suivant :*

$$\Lambda_{ni} \doteq \left\{ x \in \Omega : \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \right| > M \;\; et \;\; \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leqslant M - 1 \right\}.$$

Si on a, pour $w^*_{ni}(x) \in \partial\Phi_i \left(x, \dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \right)$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\Lambda_{ni}} w^*_{ni}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \, d\mu_i \; = 0,$$

alors,

$$\lim_{n \to +\infty} \rho_i \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \, \chi_{\Lambda_{ni}} \right) = 0. \tag{3.85}$$

Preuve:

On a pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, $w^*_{ni}(x) \in \partial\Phi_i \left(x, \dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \right)$, alors d'après la condition **(C4)**, on a

$$\underline{\alpha} \; \Phi_i \left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \right) \leqslant \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) w^*_{ni}(x). \tag{3.86}$$

Etant donné que $\Phi_i\,(x, 0) = 0$, alors en intégrant (3.86) sur l'ensemble Λ_{ni}, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi_i \left(x, \chi_{\Lambda_{ni}}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \right) d\mu_i \; &= \int_{\Lambda_{ni}} \Phi_i \left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \right) d\mu_i \\ &\leqslant \frac{1}{\underline{\alpha}} \int_{\Lambda_{ni}} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) w^*_{ni}(x) \, d\mu_i \; . \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \Phi_i \left(x, \chi_{\Lambda_{ni}}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \right) d\mu_i \; = 0.$$

Par suite,

$$\lim_{n \to +\infty} \rho_i \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \, \chi_{\Lambda_{ni}} \right) = 0. \tag{3.87}$$

■

Remarque 3.30. *La convexité des fonctions Φ_i assure la monotonicité de l'opérateur $u \longmapsto Au$. En effet, puisque la $\mathcal{N}$-fonction Φ_i est convexe pour tout $i = 1, \ldots, N$ (voir la Proposition 3.18), alors μ_i-p.p. $x \in \Omega$, la fonction $\sigma \mapsto \partial\Phi_i(x, \sigma)$ est monotone (voir la Remarque 3.2). Par conséquent, l'hypothèse **(A)** du Lemme 3.17 est satisfaite et l'opérateur A est monotone.*

Preuve du Théorème 3.24.
Après avoir vérifié toutes les hypothèses du Lemme 3.17, on l'applique, on trouve

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \text{ fortement dans } \mathbf{V}_0.$$

D'où, sous les conditions **(C1)-(C4)**, on peut construire un opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque et fortement monotone. ∎

Remarque 3.31. *Dans le chapitre suivant, nous verrons comment en pratique la propriété de "forte monotonie" de l'opérateur A construit précédemment permet de résoudre des problèmes de valeurs propres non-différentiables dans le cas sous-critique.*

⁕ − ⁕ − ⁕ − ⁕ − ⁕ − ⁕ − ⁕

Chapitre 4

Problèmes de valeurs propres et exposants critiques

Dans ce chapitre, nous commencerons par donner une application du Théorème 3.7 dans laquelle nous allons introduire un opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque vérifiant la propriété de “forte monotonie” définie dans le chapitre précédent. Nous utiliserons ensuite une variante du principe ε-variationnel d'Ekeland pour montrer deux théorèmes d'existence abstraits. Le premier résultat prouvera l'existence pour des problèmes dits “sous-critiques”, ici la compacité jouera un rôle important. Le deuxième aura pour objet de montrer l'existence de solutions pour des problèmes dits “critiques”, là où nous n'avons pas d'injection compacte. Nous terminerons par donner des applications de tous les résultats mentionnés dans des domaines bornés et même dans des domaines non bornés avec un poids de type Hardy.

4.1 Exemple d'application - Mountain Pass

Dans la présente section, on commence par traiter un problème de valeurs propres non-différentiable au sens classique (c'est-à-dire au sens de Fréchet) dans le cas sous-critique pour un certain opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque qui vérifie la propriété de “forte monotonie”. On reprend les travaux de [16], [85].

Soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$, N nombres réels positifs, $q_i : \Omega \to \mathbb{R}$ et $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$, pour $i = 1, \ldots, N$, $\;2N$ fonctions mesurables et bornées sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ à bord régulier telles que

$$2 \leqslant \inf_\Omega \operatorname{ess} q_i \leqslant q_i(x) \leqslant \sup_\Omega \operatorname{ess} q_i < \inf_\Omega \operatorname{ess} p_i \leqslant p_i(x) \leqslant \sup_\Omega \operatorname{ess} p_i < +\infty.$$

On note (analogue pour q_i) :

$$\begin{aligned}
p_{i+} &= \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} p_i(x),\\
p_{i-} &= \inf_{x\in\Omega} \operatorname{ess} p_i(x),\\
p_+^+ &= \max\left\{p_{1+},\dots,p_{N+}\right\},\\
p_-^- &= \min\left\{p_{1-},\dots,p_{N-}\right\}.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction $\Phi_i : \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\Phi_i(x,t)=\begin{cases}\alpha_i(x)|t|^{q_i(x)} & \text{si } |t|\leqslant\delta_i,\\ |t|^{p_i(x)} & \text{si } |t|>\delta_i,\end{cases}\qquad \text{où } \alpha_i(x)=(\delta_i)^{p_i(x)-q_i(x)}.$$

On peut choisir la fonction $\varphi_i(x,t)$ comme suit :

$$\varphi_i(x,t)=\begin{cases}q_i(x)\alpha_i(x)|t|^{q_i(x)-2}t & \text{si } |t|<\delta_i,\\ p_i(x)|t|^{p_i(x)-2}t & \text{si } |t|>\delta_i,\\ p_i(x)\cdot(\delta_i)^{p_i(x)-1} & \text{si } t=\delta_i,\\ -p_i(x)\cdot(\delta_i)^{p_i(x)-1} & \text{si } t=-\delta_i.\end{cases}$$

Les fonctions φ_i et Φ_i vérifient les hypothèses **(C1)-(C4)** du Théorème 3.24, avec $\underline{\alpha}=q_-^->1$ et $\overline{\alpha}=p_+^+>1$.

L'espace d'Orlicz $L^{\Phi_i}(\Omega)$ qui correspond à la $\mathcal{N}$-fonction Φ_i (définie ci-dessus) est l'espace de Lebesgue à exposant variable $L^{p_i(\cdot)}(\Omega)$ défini par

$$L^{p_i(\cdot)}(\Omega)=\left\{v:\Omega\to\mathbb{R} \text{ mesurable } : \int_\Omega |v(x)|^{p_i(x)}\,\mathrm{d}x<+\infty\right\}.$$

Cet espace est muni de la norme de Luxemburg suivante :

$$\|u\|_{p_i(\cdot)}=\inf\left\{\lambda>0 : \int_\Omega\left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p_i(x)}\mathrm{d}x\leqslant 1\right\}.$$

Etant donné que $1<p_{i-}\leqslant p_{i+}<+\infty$, alors l'espace $L^{p_i(\cdot)}(\Omega)$ est un espace de Banach réflexif. De plus, la norme $\|\cdot\|_{p_i(\cdot)}$ est une norme absolument continue (pour plus de détails sur l'espace $L^{p_i(\cdot)}(\Omega)$ voir [30] et [45]).

On considère $\mathbf{V}_0$ l'espace de Sobolev anisotrope aux exposants variables suivant (pour plus de détails voir [57]) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_0 &\doteq W_0^{1,p_1(\cdot),\dots,p_N(\cdot)}(\Omega)\\
&= \left\{v\in W_0^{1,1}(\Omega) : \sum_{i=1}^N\left(\int_\Omega\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|^{p_i(x)}\mathrm{d}x\right)<+\infty\right\}.
\end{aligned}$$

On munit cet espace de la norme suivante :

$$\|v\|_{\mathbf{V}_0} = \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{p_i(\cdot)}.$$

La fonction $\Phi_i(x,\cdot)$ est localement Lipschitzienne, convexe et sa sous-différentielle est donnée par

$$\partial\Phi_i(x,t) = \begin{cases} \varphi_i(x,t) & \text{si } \ |t| > \delta_i \ \text{ ou } \ |t| < \delta_i, \\ \text{sign(t)}\big[q_i(x), p_i(x)\big]\,(\delta_i)^{p_i(x)-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit la fonctionnelle $J : \mathbf{V}_0 \to \mathbb{R}$ par

$$J(v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right) \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)}.$$

Théorème 4.1. *(Voir [16]) Soient $\delta_{N+1} > 0$ un réel positif, $q_{N+1}(x)$ et $p_{N+1}(x)$ deux fonctions mesurables et bornées sur Ω telles que*

$$2 < \inf_\Omega \operatorname{ess} q_{N+1}(x) \leqslant \sup_\Omega \operatorname{ess} q_{N+1}(x) < \inf_\Omega \operatorname{ess} p_{N+1}(x).$$

On définit la fonction $j : L^{p_{N+1}(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$j(v) = \int_\Omega \Phi_{N+1}\big(x, v(x)\big) \frac{\mathrm{d}x}{p_{N+1}(x)},$$

telle que

$$\Phi_{N+1}\big(x, u(x)\big) = \begin{cases} |u(x)|^{p_{N+1}(x)} & si \ \ |u(x)| > \delta_{N+1}, \\ \alpha_{N+1}(x)|u(x)|^{q_{N+1}(x)} & si \ \ |u(x)| \leqslant \delta_{N+1}, \end{cases}$$

et $\alpha_{N+1}(x) = (\delta_{N+1})^{p_{N+1}(x)-q_{N+1}(x)}$.

On suppose que

(a) *L'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_{N+1}(\cdot)}(\Omega)$ est compacte.*

(b) $(q_{N+1})_- = \inf_\Omega \operatorname{ess} q_{N+1}(x) > p_+^+ = \max\big\{p_{1+}, \ldots, p_{N+}\big\}$.

Alors, (sous les hypothèses et les notations déjà introduites) pour tout $\lambda > 0$, il existe une fonction $u \in \mathbf{V}_0$ non triviale et $u \geqslant 0$ telle que

$$0 \in \partial J(u) - \lambda \partial j(u).$$

Plus précisément, il existe $w_i(x)$ pour $i = 1, \ldots, N$ et $w_{N+1}(x)$ telles qu'on a

$$p_i(x)w_i(x) \in \partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \ \textit{p.p.},$$

$$\textit{où} \qquad \partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) = \left[\liminf_{t\to\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)} \varphi_i(x,t); \limsup_{t\to\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)} \varphi_i(x,t)\right],$$

$$p_{N+1}(x)w_{N+1}(x) \in \partial\Phi_{N+1}\big(x, u(x)\big) \ \textit{p.p.},$$

$$\textit{où} \qquad \partial\Phi_{N+1}\left(x, u(x)\right) = \left[\liminf_{t\to u(x)} \varphi_{N+1}(x,t); \limsup_{t\to u(x)} \varphi_{N+1}(x,t)\right],$$

et

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega w_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega w_{N+1}(x)v(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\ v \in \mathbf{V}_0.$$

Ce que nous définissons comme

$$-\mathrm{div}_{\vec{p}}\left(\partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right) = \lambda\ w_{N+1}(x).$$

Preuve:
Pour ce faire, il s'agit d'appliquer le Théorème 3.7. Plus précisément, vérifier les hypothèses **(H0)-(H4)** :

(i) D'après **(a)**, on a l'hypothèse de compacité **(H0)**.

(ii) Pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, les fonctions φ_i et Φ_i vérifient les hypothèses **(C1)-(C4)**, alors en appliquant le Théorème 3.24, on déduit que l'opérateur multivoque $v \in \mathbf{V}_0 \mapsto \partial J(v)$ est fortement monotone. Par la suite, on a **(H1)**.

(iii) Soit $v^* \in \lambda\partial j(u)$, alors on a $v^*(x) \in \lambda\partial\Phi_{N+1}\big(x, u(x)\big)\dfrac{1}{p_{N+1}(x)}$ p.p.
On rappelle qu'on a p.p. $x \in \Omega$,

$$\frac{\partial\Phi_{N+1}(x,u(x))}{p_{N+1}(x)} = \begin{cases} \dfrac{q_{N+1}(x)}{p_{N+1}(x)}\alpha_{N+1}(x)|u|^{q_{N+1}(x)-2}u & \text{si } |u(x)| < \delta_{N+1}, \\ |u|^{p_{N+1}(x)-2}u & \text{si } |u(x)| > \delta_{N+1}, \\ \mathrm{sign}(u(x))\left[\frac{q_{N+1}(x)}{p_{N+1}(x)}, 1\right](\delta_{N+1})^{p_{N+1}(x)-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

En outre, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} v^*(x)u(x)\mathrm{d}x &\geqslant \lambda \int_{\{|u|>\delta_{N+1}\}} |u(x)|^{p_{N+1}(x)}\,\mathrm{d}x \\
&+ \lambda \int_{\{|u|\leqslant\delta_{N+1}\}} \frac{q_{N+1}(x)}{p_{N+1}(x)} \alpha_{N+1}(x)\,|u|^{q_{N+1}(x)}\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \lambda (q_{N+1})_- \int_{\{|u|>\delta_{N+1}\}} \frac{|u(x)|^{p_{N+1}(x)}}{p_{N+1}(x)}\mathrm{d}x \\
&+ \lambda (q_{N+1})_- \int_{\{|u|\leqslant\delta_{N+1}\}} \frac{\alpha_{N+1}(x)}{p_{N+1}(x)}\,|u|^{q_{N+1}(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda (q_{N+1})_- \, j(u).
\end{aligned}$$

Par hypothèse, on a

$$(p_{N+1})_+ \geqslant (p_{N+1})_- > (q_{N+1})_+ \geqslant (q_{N+1})_- > p_+^+.$$

En choisissant $\beta > 0$ tel que $p_+^+ < \beta < (q_{N+1})_-$ et d'après ce qui précède, on trouve que

$$\inf_{v^*\in\lambda\partial j(u)} \langle v^*; u\rangle \geqslant \beta\big(\lambda j(u)\big). \tag{4.1}$$

D'où, on a la première condition de croissance de **(H2)**.

(iv) Pour vérifier la deuxième condition de **(H2)**, considérons l'ensemble suivant :

$$H_i = \left\{ x \in \Omega : \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| > \delta_i \right\}. \tag{4.2}$$

Par conséquent, on a

$$J(u) \geqslant \sum_{i=1}^{N} \int_{H_i} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^{p_i(x)} \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} \tag{4.3}$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^{p_i(x)} \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} - C_1(1\ldots N), \tag{4.4}$$

où $C_1(1\ldots N)$ est une constante positive qui dépend de $\delta_1, \ldots, \delta_N$, $p_1, \ldots, p_N$ et du domaine Ω.

D'autre part, soit $w^* \in \partial J(u)$, alors il existe une constante $C_2(1\ldots N)$ telle que

$$\langle w^*; u\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int_{H_i} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^{p_i(x)} \mathrm{d}x + C_2(1\ldots N),$$

où $C_2(1\ldots N)$ est positive et dépend des mêmes paramètres que $C_1(1\ldots N)$. Par la suite, on a

$$\langle w^*; u\rangle \leqslant p_+^+ \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^{p_i(x)} \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} + C_2(1\ldots N).$$

Comme $\beta > 0$, d'après (4.4) on déduit que

$$\frac{1}{\beta} \sup_{w^* \in \partial J(u)} \langle w^*; u \rangle \leqslant \frac{p_+^+}{\beta} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^{p_i(x)} \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} + C_3(1 \ldots N) \quad (4.5)$$

$$\leqslant \frac{p_+^+}{\beta} J(u) + C_4(1 \ldots N). \quad (4.6)$$

Ayant $\dfrac{p_+^+}{\beta} < 1$ et sous les hypothèses données sur J, il existe k_1 et k_2 deux constantes positives telles que

$$\left(1 - \frac{p_+^+}{\beta}\right) J(u) \geqslant k_1 \|u\|_{\mathbf{V}_0} - k_2, \qquad \forall\, u \in \mathbf{V}_0. \quad (4.7)$$

Cette dernière relation et (4.6) impliquent

$$\frac{1}{\beta} \sup_{w^* \in \partial J(u)} \langle w^*; u \rangle + k_1 \|u\|_{\mathbf{V}_0} \leqslant J(u) + C_5(1 \ldots N).$$

Donc la deuxième condition de **(H2)** est vérifiée.
D'après le Lemme 3.5, on conclut que la fonction $\Phi_\lambda(u) \doteq J(u) - \lambda j(u)$ vérifie la condition de Palais-Smale. Dans ce qui suit, on montre en plus qu'elle vérifie la géométrie de "Mountain Pass".

(v) On a $\Phi_\lambda(0) = 0$. En plus, d'après la construction de la fonctionnelle J, on a $J(u) > 0$ pour tout $u \neq 0$, $u \in \mathbf{V}_0$. Alors, on a **(H3)**.

(vi) Commençons par regarder le comportement de $\Phi_\lambda(u)$ au voisinage de l'infini : Soient $u_0 \in C_c^1(\Omega)$, $u_0 \not\equiv 0$ et $t > 1$ tels que

$$\begin{aligned} j(tu_0) &= \int_\Omega \frac{\Phi_{N+1}\big(x, tu_0(x)\big)}{p_{N+1}(x)} \mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_{\{|tu_0| > \delta_{N+1}\}} t^{p_{N+1}(x)} |u_0|^{p_{N+1}(x)} \frac{\mathrm{d}x}{p_{N+1}(x)} \\ &\geqslant t^{(p_{N+1})_-} \frac{1}{(p_{N+1})_+} \int_{\{|tu_0| > \delta_{N+1}\}} |u_0|^{p_{N+1}(x)} \mathrm{d}x \\ &\geqslant t^{(p_{N+1})_-} \left[\frac{1}{(p_{N+1})_+} \int_\Omega |u_0|^{p_{N+1}(x)} \mathrm{d}x - c_0(\delta_{N+1}, p_{N+1}, \Omega) \right], \end{aligned}$$

où c_0 est une constante positive qui dépend de δ_{N+1}, p_{N+1} et Ω.
On choisit $u_0 \in C_c^1(\Omega)$ de sorte que

$$\int_\Omega |u_0|^{p_{N+1}(x)} \mathrm{d}x > c_0 \cdot (p_{N+1})_+.$$

Par conséquent, on a

$$j(tu_0) \geqslant t^{(p_{N+1})_-} \left[\frac{1}{(p_{N+1})_+} \int_\Omega |u_0|^{p_{N+1}(x)} \mathrm{d}x - c_0 \right] > 0. \tag{4.8}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} J(tu_0) &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i \left(x, t\frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right) \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| t\frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right|^{p_i(x)} \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} + c_1(1 \dots N), \end{aligned}$$

où $c_1(1 \dots N)$ est une constante positive indépendante de t et qui dépend seulement de $\delta_1, \dots, \delta_N$, $p_1, \dots, p_N$ et Ω. Par conséquent, on a

$$J(tu_0) \leqslant t^{p_+^+} \frac{1}{p_-^-} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right|^{p_i(x)} \mathrm{d}x + c_1. \tag{4.9}$$

D'après (4.8) et (4.9), on déduit que

$$\frac{\lambda j(tu_0)}{J(tu_0)} \geqslant \frac{t^{(p_{N+1})_-} \lambda \left[\frac{1}{(p_{N+1})_+} \int_\Omega |u_0|^{p_{N+1}(x)} \mathrm{d}x - c_0 \right]}{t^{p_+^+} \left[\frac{1}{p_-^-} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right|^{p_i(x)} \mathrm{d}x + \frac{c_1}{t^{p_+^+}} \right]}. \tag{4.10}$$

Par hypothèse, on a $(p_{N+1})_- > p_+^+$ et ayant $\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right|^{p_i(x)} \mathrm{d}x > 0$, alors d'après (4.10), on obtient

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\lambda j(tu_0)}{J(tu_0)} = +\infty. \tag{4.11}$$

De la même manière, on étudie $\Phi_\lambda(u)$ au voisinage de $u = 0$: Soit $u \in \mathbf{V}_0$ tel que $\|u\|_{\mathbf{V}_0} < 1$.
Etant donné que $(q_{N+1})_- < (p_{N+1})_-$, il existe une constante $c_2 > 0$ telle que

$$j(u) \leqslant c_2 \left(\|u\|_{\mathbf{V}_0}^{(p_{N+1})_-} + \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{(q_{N+1})_-} \right) \leqslant c_3 \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{(q_{N+1})_-}. \tag{4.12}$$

D'autre part, on a

$$J(u) \geqslant c_4 \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{p_+^+}. \tag{4.13}$$

Ayant $(p_{N+1})_- > p_+^+$, alors d'après (4.12) et (4.13), on déduit que

$$\frac{\lambda j(u)}{J(u)} \leqslant c_5 \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{(q_{N+1})_- - p_+^+} \xrightarrow[\|u\|_{\mathbf{V}_0} \to 0]{} 0. \tag{4.14}$$

Toutes les hypothèses du Théorème 3.7 sont vérifiées par la fonctionnelle Φ_λ, on conclut qu'il existe un point critique $u \in \mathbf{V}_0$ tel que

$$0 \in \partial\Phi_\lambda(u), \qquad \Phi_\lambda(u) > 0.$$

En plus, on peut supposer que la solution non triviale u est positive $u \geqslant 0$, comme

$$\Phi_\lambda(u) = \Phi_\lambda(|u|).$$

■

Remarque 4.2. *Si dans le Théorème 4.1, on suppose que les fonctions exposants p_i et q_i sont égales p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $i = 1, \ldots, N$ (c'est-à-dire $p_i(x) = q_i(x)$ p.p.) et si en plus, on a $p_{N+1}(x) = q_{N+1}(x)$ p.p., alors dans ce cas :*

(a) *Les deux fonctions J et j déjà introduites s'écrivent*

$$J : \mathbf{V}_0 \to \mathbb{R} \quad \text{où} \quad J(v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|^{p_i(x)} \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)},$$

et

$$j : L^{p_{N+1}(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R} \quad \text{où} \quad j(v) = \int_\Omega |v(x)|^{p_{N+1}(x)} \frac{\mathrm{d}x}{p_{N+1}(x)}.$$

En particulier, les fonctions J et j deviennent C^1-différentiables au sens de Fréchet.

(b) *La preuve du Théorème 4.1 reste vraie. Par contre, la propriété de "forte monotonie" de l'opérateur $u \mapsto \partial J(u)$ peut être vérifiée d'une autre manière et sans passer par le Théorème 3.24. En effet, il suffit d'appliquer l'inégalité suivante (voir [91, Formule (2.2)]) :*
Pour $p \geqslant 2$, il existe une constante $c(p) > 0$ telle que

$$\left(|\xi|^{p-2}\xi - |\psi|^{p-2}\psi\right) \cdot (\xi - \psi) \geqslant c(p)|\xi - \psi|^p \qquad \xi, \psi \in \mathbb{R} \tag{4.15}$$

Notre Théorème 4.1 généralise un résultat récent de M. Mihăilescu et al. donné par le Théorème 2. de [57] et présenté dans le corollaire suivant :

Corollaire 4.3. *On suppose que $\forall\ i = 1, \ldots, N$, $p_i(x) = q_i(x)$ p.p. $x \in \Omega$ et $p_{N+1}(x) = q_{N+1}(x)$ p.p. $x \in \Omega$, alors le Théorème 4.1 se réduit au cas univoque et en particulier, il généralise le résultat du Théorème 2. dans [57].*
En d'autres termes, $\forall\ \lambda > 0$, il existe $u \in \mathbf{V}_0$, $u \not\equiv 0$ et $u \geqslant 0$ telle que u soit une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i(x)-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \lambda |u|^{p_{N+1}(x)-2} u & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.16}$$

Plus généralement, les $\mathcal{N}$-fonctions Φ_i, $i = 1, \ldots, N$, qu'on a définies dans la Section 3.3 contiennent celles définies récemment par M. Mihăilescu et al. dans [56], alors en combinant le Théorème 3.7 et le Théorème 4.1, on déduit que le Théorème 1. de [56] peut-être obtenu par le corollaire suivant :

Corollaire 4.4. *On suppose que* $\forall\ i = 1, \ldots, N$, *les fonctions* φ_i *sont des homéomorphismes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui vérifient l'hypothèse* ***(C1)*** *(voir page 51). Par conséquent, les* $\mathcal{N}$*-fonctions* Φ_i *sont* C^1*-différentiables au sens de Fréchet.*
Dans ce cas particulier, notre opérateur sera un opérateur anisotrope univoque.
De plus, si les Φ_i *vérifient* ***(C4)****, alors en suivant la même procédure de la preuve du Théorème 4.1, on déduit que, sous les mêmes hypothèses de [56], on a :*
$\forall\ \lambda > 0$, *il existe* $u \in \mathbf{V}_0$, $u \not\equiv 0$ *et* $u \geqslant 0$ *telle que* u *soit une solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\varphi_i\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) = \lambda |u|^{p_{N+1}(x)-2}u & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.17}$$

4.2 Principe ε-variationnel d'Ekeland

Dans cette section, on rappelle le principe ε-variationnel d'Ekeland qui à partir d'une fonction Φ semi-continue inférieurement définie sur un espace métrique (V, d) et à valeurs réelles telle que $\Phi(u) \geqslant \beta, \quad \forall\ u \in V$, on peut construire une suite minimisante sous certain contrôle (voir [23] et [24]).

Plus précisément, considérons $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$.

Lemme 4.5. *(Voir [23], [24], [43, page 23]) Soit* $B(0,\sigma)$ *une boule ouverte dans* V, *de rayon* $\sigma > 0$ *et soit la fonction* $\Phi : \overline{B}(0,\sigma) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *qui vérifie*

⊛ $\Phi(\cdot)$ *est semi-continue inférieurement sur* $\overline{B}(0,\sigma)$.

⊛ $\Phi \not\equiv +\infty$.

⊛ $\Phi(\cdot)$ *est bornée inférieurement sur* $\overline{B}(0,\sigma)$ *c'est-à-dire* $\inf\limits_{\overline{B}(0,\sigma)} \Phi > -\infty$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $u \in \overline{B}(0,\sigma)$ *vérifiant*

$$\inf_{\overline{B}(0,\sigma)} \Phi \leqslant \Phi(u) \leqslant \inf_{\overline{B}(0,\sigma)} \Phi + \varepsilon,$$

il existe un certain $v \in \overline{B}(0,\sigma)$ *tel que*

⊛ $\Phi(v) \leqslant \Phi(u)$.

⊛ $\|u - v\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$.

⊛ $\forall w \in \overline{B}(0,\sigma) \setminus \{v\}$, *on a* $\Phi(w) > \Phi(v) - \sqrt{\varepsilon}\, \|w - v\|$.

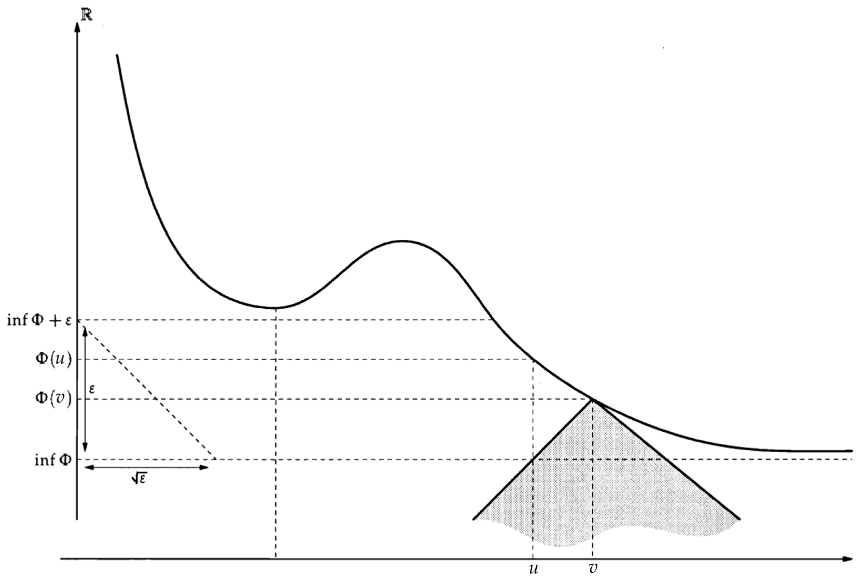


FIGURE 4.1 – Principe ε-variationnel d'Ekeland.

Corollaire 4.6. *(Voir [16]) Sous les mêmes hypothèses du lemme précédent, il existe une suite* $(u_n)_{n\geqslant 0} \subset \overline{B}(0,\sigma)$ *telle que*

(i) $\Phi(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf\limits_{\overline{B}(0,\sigma)} \Phi.$

(ii) $\forall w \in \overline{B}(0,\sigma)$, *on a* $\Phi(w) \geqslant \Phi(u_n) - \dfrac{1}{n}\,\|w-u_n\|.$

(iii) *Si, en plus, on suppose que la suite* $(u_n) \subset \overset{\circ}{int}\{\overline{B}(0,\sigma)\} = B(0,\sigma)$, *alors*

$$\lambda^{\Phi}(u_n) = \inf\left\{\, \|w_n^*\|_{V^*} : w_n^* \in \partial\Phi(u_n)\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Preuve:
On choisit ε du Lemme 4.5 de sorte qu'il dépend de l'entier n :
Posons $\varepsilon = \dfrac{1}{n^2}$ et $v = u_n$, on obtient alors

$$\Phi(u_n) \leqslant \inf_{\overline{B}(0,\sigma)} \Phi + \frac{1}{n^2}. \tag{4.18}$$

et

$$\Phi(w) \geqslant \Phi(u_n) - \frac{1}{n}\,\|w-u_n\|,\ \forall w \in \overline{B}(0,\sigma). \tag{4.19}$$

⊛ La relation (4.18) montre **(i)**.

⊛ La relation (4.19) montre **(ii)**.

⊛ Pour montrer **(iii)**, on définit la fonction Q sur $\overline{B}(0,\sigma)$ par

$$Q(w) \doteq \Phi(w) + \frac{1}{n} \|w - u_n\|.$$

Par conséquent, d'après l'inégalité (4.19), on a $Q(u_n) \leqslant Q(w)$, $\forall w \in \overline{B}(0,\sigma)$. D'après **(iii)**, on a $(u_n)_n \subset B(0,\sigma)$, alors

$$0 \in \partial Q(u_n) \subset \partial\Phi(u_n) + \frac{1}{n}\, \partial P_n(u_n), \tag{4.20}$$

où la fonction P_n est donnée par $P_n(w) \doteq \|w - u_n\|$.
Par conséquent, on a

$$0 = w_n^* + \frac{1}{n}\, v_n^*\,, \quad \text{où} \;\; w_n^* \in \partial\Phi(u_n) \;\text{ et }\; v_n^* \in \partial P_n(u_n). \tag{4.21}$$

D'autre part, d'après la définition de la sous-différentielle des fonctions convexes, on a

$$\partial P_n(u_n) = \Big\{ v^* \in V^* : \langle v^*, w - u_n\rangle_V \leqslant \|w - u_n\|\,, \forall w \Big\}.$$

Donc,

$$\partial P_n(u_n) \subset \Big\{ v^* \in V^* : \|v^*\|_{V^*} \leqslant 1 \Big\}. \tag{4.22}$$

Les relations (4.21) et (4.22) impliquent que

$$\lambda^{\Phi}(u_n) \leqslant \|w_n^*\|_{V^*} = \frac{1}{n}\; \|v_n^*\|_{V^*} \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{4.23}$$

D'où **(iii)** est montré. Ce qui achève la démonstration.

■

4.3 Existence de points critiques au voisinage de l'origine

En utilisant le principe ε-variationnel d'Ekeland et plus précisément le Corollaire 4.6, on montre deux résultats abstraits d'existence d'un point critique. Tout d'abord, le cas sous-critique pour lequel on a une injection compacte (voir Théorème 4.7), ensuite celui dit critique pour lequel on perd la compacité (voir Théorème 4.8).

4.3.1 Cas sous-critique

Dans ce paragraphe, on introduit un théorème abstrait qui montre l'existence d'un point critique d'une fonctionnelle Φ au voisinage de l'origine sous une hypothèse de compacité.

Théorème 4.7. *(Voir [17]) Soient $J : V \to \mathbb{R}$ et $j : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions localement Lipschitziennes. Supposons que*

(H0) $V \hookrightarrow\hookrightarrow X$ *est une injection compacte.*

(H1) $\begin{array}{rrl} A: & V \longrightarrow & 2^{V^*} \\ & u \longrightarrow & \partial J(u) \end{array}$ *est fortement monotone.*

(H3') *Soit $\Phi \doteq J - j$ telle que $\Phi(0) = 0$ et supposons qu'il existe une fonction $\nu_0 \in V$ et une constante $\eta > 0$ telles que*

- ⊛ $\|\nu_0\|_V < \eta$.
- ⊛ $\Phi(v) > 0$ *pour tout* $v \in V$ *tel que* $\|v\|_V = \eta$.
- ⊛ $\Phi(\nu_0) < 0$.
- ⊛ $\inf\limits_{v \in \overline{B}(0,\eta)} \Phi(v) > -\infty$.

Alors, sous les hypothèses **(H0)**, **(H1)** *et* **(H3')**, *il existe une fonction $u \in V$ non nulle telle que u est un point critique de la fonctionnelle Φ c'est-à-dire*

$$0 \in \partial\Phi(u) \subset \partial J(u) - \partial j(u).$$

Preuve:
Afin de montrer le Théorème 4.7, on applique le principe ε-variationnel d'Ekeland, plus particulièrement, on applique le Corollaire 4.6. Pour cela, on considère la boule ouverte $B(0,\eta)$ de rayon $\eta > 0$ où η est donné dans **(H3')**.
D'après l'hypothèse **(H3')**, il existe $\nu_0 \in V$ non nul tel que

- ⊛ $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\nu_0) < 0$, alors $\Phi \not\equiv +\infty$.
- ⊛ $\Phi(\nu_0) < 0$, alors $\nu_0 \in B(0,\eta)$.
- ⊛ $-\infty < \inf\limits_{v \in \overline{B}(0,\eta)} \Phi(v) \doteq c$, alors $-\infty < c \leqslant \Phi(\nu_0) < 0$.

Les fonctions J et j sont localement Lipschitziennes alors $\Phi = J - j$ est semi-continue inférieurement, par suite les hypothèses du Corollaire 4.6 sont vérifiées.
On conclut qu'il existe une suite minimisante $(u_n) \subset \overline{B}(0,\eta)$ et $u \in V$ tels que

(i) $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V.

(ii) $u_n \to u$ fortement dans X, d'après l'hypothèse **(H0)**.

(iii) $\Phi(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} c$, par conséquent $u_n \in \overset{\circ}{int}\{\overline{B}(0,\eta)\} = B(0,\eta)$.

(iv) Ayant $(u_n) \subset B(0,\eta)$, alors il existe $\xi_n^* \in \partial\Phi(u_n)$ tel que

$$\|\xi_n^*\|_{V^*} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Puisque (u_n) est une suite bornée dans V, alors elle est bornée dans X, par la suite, on a $\|u_n\|_X \leqslant c_1$ et d'après **(c)** de la Proposition 2.58, on a $\|v_n^*\|_{X^*} \leqslant c_2$, pour $v_n^* \in \partial j(u_n)$ (où c_1 et c_2 sont deux constantes positives).
De plus, il existe $w_n^* \in \partial J(u_n)$ et $v_n^* \in \partial j(u_n)$ tels que

$$\xi_n^* = w_n^* - v_n^* \quad \text{dans } V^*,$$

on sait qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $\|v_n^*\|_{X^*} \leqslant c_2$, ainsi, on a

$$\langle w_n^*; u_n - u\rangle_V - \langle v_n^*; u_n - u\rangle_V = \langle \xi_n^*; u_n - u\rangle_V . \tag{4.24}$$

Prenons un élément quelconque w^* dans l'ensemble $\partial J(u)$, alors en ajoutant le terme $\langle -w^*; u_n - u\rangle$ à l'égalité (4.24), on déduit que

$$\langle w_n^* - w^*; u_n - u\rangle = -\langle w^*; u_n - u\rangle + \langle v_n^*; u_n - u\rangle + \langle \xi_n^*; u_n - u\rangle . \tag{4.25}$$

Par conséquent,

$$|\langle w_n^* - w^*; u_n - u\rangle| \leqslant |\langle w^*; u_n - u\rangle| + c_2\|u_n - u\|_X + c_3\|\xi_n^*\|_{V^*}. \tag{4.26}$$

D'après ce qui précède, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle w_n^* - w^*; u_n - u\rangle = 0, \quad w_n^* \in \partial J(u_n) \text{ et } w^* \in \partial J(u) = A(u). \tag{4.27}$$

L'hypothèse **(H1)** implique que $u_n \to u$ fortement dans V. On conclut alors qu'il existe $u \in V$ tel que

$$0 \in \partial\Phi(u), \quad \Phi(u) = c < 0.$$

■

4.3.2 Cas critique (sans hypothèse de compacité)

Dans ce deuxième paragraphe, on introduit un théorème abstrait qui nous permet de montrer l'existence d'un point critique de la fonctionnelle $\Phi = J - j$ sans demander que l'injection $V \hookrightarrow X$ soit compacte, comme on a déjà vu au Théorème 3.7 (voir la Remarque 3.8) :

Théorème 4.8. *(Voir [16]) On considère $\Phi = J - j$ où*

$$j : X \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$J : V \longrightarrow \mathbb{R},$$

sont deux fonctions localement lipschitziennes telles que :

*On remplace **(H1)** du Théorème 3.7 par*

(H1') *Pour toute suite de points* $\big(u_n, w_n^*\big)_{n\geqslant 0}$ *du graphe de* $\partial\Phi(\cdot)$ *(c'est-à-dire* $w_n^* \in \partial\Phi(u_n)$*), on a*

$$\left.\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u & \textit{faiblement dans } V \\ w_n^* \longrightarrow 0 & \textit{fortement dans } V^* \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \in \partial\Phi(u).$$

Et on remplace ***(H2)*** *du même théorème par*

(H2') *On peut décomposer la fonction* j *en une somme de deux fonctions localement Lipschitziennes* j_0 *et* j_1 *dans* V *(c'est-à-dire* $j = j_0 + j_1$*) telles que*

⊛ $j_0(0) = j_1(0) = 0$,

⊛ *la fonction* $j_0 : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *est faiblement continue c'est-à-dire si* $v_n \rightharpoonup v$ *faiblement dans* V*, alors* $j_0(v_n) \longrightarrow j_0(v)$.

En plus, il existe $\beta > 0$ *tel que les deux conditions de croissance suivantes sont satisfaites*

$$j_1(u) \leqslant \frac{1}{\beta} \inf_{v^* \in \partial j(u)} \langle v^*, u\rangle\,, \quad \forall u \in X, \tag{4.28}$$

$$\frac{1}{\beta} \sup_{w^* \in \partial J(u)} \langle w^*, u\rangle \leqslant J(u), \quad \forall u \in V. \tag{4.29}$$

(H3') $\Phi(0) = 0$ *et il existe une fonction* $\nu_0 \in V$ *et une constante* $\eta > 0$ *telles que*

⊛ $\|\nu_0\|_V < \eta$.

⊛ $\Phi(v) > 0$ *pour tout* $v \in V$ *tel que* $\|v\|_V = \eta$.

⊛ $\Phi(\nu_0) < 0$.

⊛ $\inf\limits_{v \in \overline{B}(0,\eta)} \Phi(v) > -\infty$.

Alors, sous les hypothèses **(H1')**, **(H2')** *et* **(H3')**, *il existe une fonction* $u \in V$ *non nulle telle que* u *est un point critique de la fonctionnelle* Φ *c'est-à-dire*

$$0 \in \partial\Phi(u) \subset \partial J(u) - \partial j(u).$$

Preuve:
De même pour montrer le Théorème 4.8, on applique le Corollaire 4.6 (principe ε-variationnel d'Ekeland). Alors, comme on a déjà vu dans la preuve du Théorème 4.7, d'après l'hypothèse **(H3')**, il existe $\nu_0 \in V$ et $\nu_0 \not\equiv 0$ tel que

⊛ $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\nu_0) < 0$, alors $\Phi \not\equiv +\infty$.

⊛ $\Phi(\nu_0) < 0$, alors $\nu_0 \in B(0, \eta)$.

⊛ $-\infty < \inf\limits_{v \in \overline{B}(0,\eta)} \Phi(v) \doteq c$, alors $-\infty < c \leqslant \Phi(\nu_0) < 0$.

Les fonctions J et j sont localement Lipschitziennes alors $\Phi = J - j$ est semi-continue inférieurement, par conséquent les hypothèses du Corollaire 4.6 sont vérifiées.
Par la suite, il existe une suite minimisante $(u_n) \subset \overline{B}(0, \eta)$ et $u \in V$ telles que

(a) $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V.

(b) $\Phi(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$, alors $u_n \in \overset{\circ}{int}\{\overline{B}(0,\eta)\} = B(0,\eta)$.

(c) Ayant $(u_n) \subset B(0,\eta)$, alors il existe $\xi_n^* \in \partial\Phi(u_n)$ telle que

$$\|\xi_n^*\|_{V^*} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après **(a)**, **(c)** et **(H1')**, on déduit que

$0 \in \partial\Phi(u) \subset \partial J(u) - \partial j(u)$ c'est-à-dire u est un point critique de la fonctionnelle Φ.

Pour finir la preuve, il reste à montrer que ce dernier point critique trouvé est non trivial c'est-à-dire $u \not\equiv 0$.
D'après **(c)**, on a $\xi_n^* \in \partial\Phi(u_n)$, donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, il existe $w_n^* \in \partial J(u_n)$ et $v_n^* \in \partial j(u_n)$ tels que

$$\xi_n^* = w_n^* - v_n^*. \tag{4.30}$$

Par la suite, on applique l'égalité (4.30) à u_n et on la multiplie par $-\dfrac{1}{\beta}$, où β est la constante positive donnée dans **(H2')**. On obtient alors,

$$-\frac{1}{\beta}\langle \xi_n^*, u_n\rangle = -\frac{1}{\beta}\langle w_n^*, u_n\rangle + \frac{1}{\beta}\langle v_n^*, u_n\rangle . \tag{4.31}$$

Puis, on ajoute $\Phi(u_n) = J(u_n) - j_0(u_n) - j_1(u_n)$, on trouve

$$-\frac{1}{\beta}\langle \xi_n^*, u_n\rangle + \Phi(u_n) = \left[J(u_n) - \frac{1}{\beta}\langle w_n^*, u_n\rangle\right] + \left[\frac{1}{\beta}\langle v_n^*, u_n\rangle - j_1(u_n)\right] - j_0(u_n). \tag{4.32}$$

D'après la relation (4.29), on déduit que

$$J(u_n) - \frac{1}{\beta}\langle w_n^*, u_n\rangle \geqslant J(u_n) - \frac{1}{\beta}\sup_{w^*\in\partial J(u_n)}\langle w^*, u_n\rangle \geqslant 0. \tag{4.33}$$

De même, d'après la relation (4.28), on obtient

$$\frac{1}{\beta}\langle v_n^*, u_n\rangle - j_1(u_n) \geqslant \frac{1}{\beta}\inf_{v^*\in\partial j(u_n)}\langle v^*, u_n\rangle - j_1(u_n) \geqslant 0. \tag{4.34}$$

Donc d'après (4.33) et (4.34), l'égalité (4.32) implique

$$-\frac{1}{\beta}\langle \xi_n^*, u_n\rangle + \Phi(u_n) \geqslant -j_0(u_n). \tag{4.35}$$

En plus, on a

$\circledast$ $-\dfrac{1}{\beta}\langle \xi_n^*, u_n\rangle \leqslant \dfrac{1}{\beta}\|\xi_n^*\|_{V^*}\|u_n\|_V \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

⊛ $\Phi(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$, d'après **(b)**.

⊛ $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans V et $j_0(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} j_0(u)$, d'après **(a)** et le fait que j_0 est faiblement continue par **(H2')**.

Donc si on fait tendre $n \to +\infty$ dans (4.35), on conclut que

$$-j_0(u) \leqslant c < 0.$$

Par conséquent, $j_0(u) > 0$ et comme $j_0(0) = 0$ d'après **(H2')**, il en résulte que $u \not\equiv 0$. ■

4.4 Exemples d'application

4.4.1 Cas sous-critique 1

Dans la présente Section, nous traitons le même problème de valeurs propres (cas sous-critique) déjà introduit à la Section 4.1 c'est-à-dire nous nous intéressons à l'opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque associé à des exposants variables et qui vérifie la propriété de “forte monotonie”. Sauf qu'ici nous changerons les hypothèses mises sur les exposants et dans ce cas le théorème de “Mountain Pass” n'est plus valable. Nous appliquerons le Théorème 4.7 pour résoudre le nouveau problème obtenu.

Soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$, N nombres réels positifs, $q_i : \Omega \to \mathbb{R}$ et $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$, pour $i = 1, \ldots, N$, $2N$ fonctions mesurables et bornées sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ à bord régulier telles que

$$2 \leqslant \inf_{\Omega} \operatorname{ess} q_i \leqslant q_i(x) \leqslant \sup_{\Omega} \operatorname{ess} q_i < \inf_{\Omega} \operatorname{ess} p_i \leqslant p_i(x) \leqslant \sup_{\Omega} \operatorname{ess} p_i < +\infty.$$

Considérons les mêmes notations déjà définies dans la Section 4.1 (analogue pour q_i) :

$$\begin{aligned} p_{i+} &= \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} p_i(x), \\ p_{i-} &= \inf_{x\in\Omega} \operatorname{ess} p_i(x), \\ p_+^+ &= \max\left\{p_{1+}, \ldots, p_{N+}\right\}, \\ p_-^- &= \min\left\{p_{1-}, \ldots, p_{N-}\right\}. \end{aligned}$$

De plus, considérons la fonction $\Phi_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi_i(x,t) = \begin{cases} \alpha_i(x)|t|^{q_i(x)} & \text{si } |t| \leqslant \delta_i, \\ |t|^{p_i(x)} & \text{si } |t| > \delta_i, \end{cases} \quad \text{où } \alpha_i(x) = (\delta_i)^{p_i(x)-q_i(x)}.$$

De même, on peut choisir la fonction $\varphi_i(x,t)$ comme suit :

$$\varphi_i(x,t) = \begin{cases} q_i(x)\alpha_i(x)|t|^{q_i(x)-2}t & \text{si } |t| < \delta_i, \\ p_i(x)|t|^{p_i(x)-2}t & \text{si } |t| > \delta_i, \\ p_i(x)\cdot(\delta_i)^{p_i(x)-1} & \text{si } t = \delta_i, \\ -p_i(x)\cdot(\delta_i)^{p_i(x)-1} & \text{si } t = -\delta_i. \end{cases}$$

Alors comme on a déjà vu, les fonctions φ_i et Φ_i vérifient les hypothèses **(C1)-(C4)** du Théorème 3.24, avec $\underline{\alpha} = q_-^- > 1$ et $\overline{\alpha} = p_+^+ > 1$.

On munit l'espace d'Orlicz $L^{\Phi_i}(\Omega)$ associé à la $\mathcal{N}$-fonction Φ_i, défini par

$$L^{\Phi_i}(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } : \int_\Omega \Phi_i\left(x, v(x)\right) \mathrm{d}x < +\infty \right\},$$

de la norme de Luxemburg suivante :

$$\|u\|_{\Phi_i} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{u(x)}{\lambda}\right) \mathrm{d}x \leqslant 1 \right\}.$$

Étant donné que $1 < q_{i-} < p_{i+} < +\infty$, alors l'espace $L^{\Phi_i}(\Omega)$ muni de cette dernière norme est un espace de Banach réflexif. De plus, cette norme $\|\cdot\|_{\Phi_i}$ est une norme absolument continue.
On considère $\mathbf{V}_0$ l'espace de Sobolev anisotrope aux exposants variables :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &\doteq W_0^{1,\Phi_1,\ldots,\Phi_N}(\Omega) \\ &= \left\{ v \in W_0^{1,1}(\Omega) : \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right) \mathrm{d}x \right) < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

On munit cet espace de la norme suivante :

$$\|v\|_{\mathbf{V}_0} = \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{\Phi_i}.$$

On définit la fonctionnelle $J : \mathbf{V}_0 \to \mathbb{R}$ par

$$J(v) = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right) \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)}.$$

Théorème 4.9. *(Voir [17]) Soient $\delta_{N+1} > 0$ un réel positif, $q_{N+1}(x)$ et $p_{N+1}(x)$ deux fonctions mesurables et bornées sur Ω telles que*

$$2 < \inf_\Omega \operatorname{ess} q_{N+1}(x) \leqslant \sup_\Omega \operatorname{ess} q_{N+1}(x) < \inf_\Omega \operatorname{ess} p_{N+1}(x).$$

On définit la fonction $j : L^{\Phi_{N+1}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *par*

$$j(v) = \int_\Omega \Phi_{N+1}\big(x, v(x)\big)\frac{\mathrm{d}x}{p_{N+1}(x)},$$

où

$$\Phi_{N+1}\big(x, u(x)\big) = \begin{cases} |u(x)|^{p_{N+1}(x)} & si \quad |u(x)| > \delta_{N+1}, \\ \alpha_{N+1}(x)|u(x)|^{q_{N+1}(x)} & si \quad |u(x)| \leqslant \delta_{N+1}, \end{cases}$$

et $\alpha_{N+1}(x) = (\delta_{N+1})^{p_{N+1}(x)-q_{N+1}(x)}$.

On suppose que

(a) *L'injection* $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\Phi_{N+1}}(\Omega)$ *est compacte.*

(b) $(q_{N+1})_- = \inf_\Omega \operatorname{ess} q_{N+1}(x) < q_-^- = \min\big\{q_{1-}, \dots, q_{N-}\big\}$.

Alors, sous les hypothèses et les notations déjà introduites, il existe $\lambda_* > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \in]0; \lambda_*[$, *il existe une fonction* $u \in \mathbf{V}_0$ *non triviale et* $u \geqslant 0$ *telle que*

$$0 \in \partial J(u) - \lambda \partial j(u).$$

Plus précisément, il existe $w_i(x)$ *pour* $i = 1, \dots, N$ *et* $w_{N+1}(x)$ *telles qu'on a*

$$p_i(x)w_i(x) \in \partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \ p.p.,$$

$$p_{N+1}(x)w_{N+1}(x) \in \partial\Phi_{N+1}\big(x, u(x)\big) \ p.p.$$

et

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega w_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega w_{N+1}(x)v(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0.$$

Preuve:
Pour ce faire, il s'agit d'appliquer le Théorème 4.7 c'est-à-dire vérifier les hypothèses **(H0)**, **(H1)** et **(H3')**.
En effet, les hypothèses **(H0)** et **(H1)** se vérifient comme dans la preuve du Théorème 4.1.
Par la suite, il nous reste à montrer que la fonctionnelle $\Phi_\lambda \doteq J - \lambda j$ vérifie l'hypothèse **(H3')** :

(i) On a $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow L^{\Phi_{N+1}}(\Omega)$, alors il existe $S_0 > 0$ une constante positive telle que

$$\|u\|_{\Phi_{N+1}} \leqslant S_0\|u\|_{\mathbf{V}_0}, \quad \forall\, u \in \mathbf{V}_0.$$

On considère $\eta > 0$ tel que $\eta < \dfrac{1}{S_0}$. Alors,

$$\|u\|_{\Phi_{N+1}} < 1, \quad \forall\, u \in \mathbf{V}_0 \text{ tel que } \|u\|_{\mathbf{V}_0} = \eta.$$

Par la suite, d'après le Lemme 5.12, on a

$$\int_\Omega \Phi_{N+1}\left(x, u(x)\right) \mathrm{d}x \leqslant \|u\|_{\Phi_{N+1}}^{(q_{N+1})_-}, \quad \forall\, u \in \mathbf{V}_0 \text{ tel que } \|u\|_{\mathbf{V}_0} = \eta. \tag{4.36}$$

D'après ce qui précède, on a

$$\int_\Omega \Phi_{N+1}\left(x, u(x)\right) \mathrm{d}x \leqslant (S_0)^{(q_{N+1})_-} \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{(q_{N+1})_-}, \quad \forall\, u \text{ tel que } \|u\|_{\mathbf{V}_0} = \eta. \tag{4.37}$$

D'autre part, d'après le Corollaire 5.13, on a $\forall\, u \in \mathbf{V}_0$ tel que $\|u\|_{\mathbf{V}_0} = \eta$:

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} \geqslant \frac{1}{N^{p_+^+} \cdot p_+^+} \cdot \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{p_+^+}. \tag{4.38}$$

Alors, $\forall\, v \in \mathbf{V}_0$ tel que $\|v\|_{\mathbf{V}_0} = \eta$, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(v) &\doteq \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right) \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} - \lambda \int_\Omega \Phi_{N+1}\big(x, v(x)\big) \frac{\mathrm{d}x}{p_{N+1}(x)} \\
&\geqslant \frac{1}{N^{p_+^+} \cdot p_+^+} \cdot \|v\|_{\mathbf{V}_0}^{p_+^+} - \lambda\, \frac{1}{(p_{N+1})_-} (S_0)^{(q_{N+1})_-} \|v\|_{\mathbf{V}_0}^{(q_{N+1})_-} \\
&= \eta^{(q_{N+1})_-} \left[\frac{1}{N^{p_+^+} \cdot p_+^+} \cdot \eta^{p_+^+ - (q_{N+1})_-} - \lambda\, \frac{1}{(p_{N+1})_-} (S_0)^{(q_{N+1})_-} \right].
\end{aligned}$$

Si on choisit $\lambda_* > 0$ telle que

$$\lambda_* = \frac{(p_{N+1})_-}{N^{p_+^+} \cdot p_+^+ \cdot (S_0)^{(q_{N+1})_-}} \cdot \eta^{p_+^+ - (q_{N+1})_-}. \tag{4.39}$$

Alors, pour toute valeur λ telle que $0 < \lambda < \lambda_*$ et pour tout $u \in \mathbf{V}_0$ tel que $\|u\|_{\mathbf{V}_0} = \eta$, on a

$$\Phi_\lambda(u) > 0.$$

(ii) Soit $\varepsilon > 0$ tel que $(q_{N+1})_- + \varepsilon < q_-^-$. D'après la définition de $(q_{N+1})_-$, il existe un ouvert $\hat{\Omega} \subset \Omega$ tel que

$$q_{N+1}(x) \leqslant (q_{N+1})_- + \varepsilon < q_-^-, \quad \text{p.p. } x \in \hat{\Omega}. \tag{4.40}$$

Soit $\nu_0 \in C_c^1(\Omega)$ telle que $\overline{\hat{\Omega}} \subset \operatorname{supp}(\nu_0)$, $\nu_0(x) = 1$ pour tout $x \in \overline{\hat{\Omega}}$ et $0 \leqslant \nu_0(x) \leqslant 1$ dans Ω ($\operatorname{supp}(\nu_0)$ désigne le support de la fonction ν_0).

Alors, pour tout $0 < t < 1$ et en utilisant la relation (5.14), on a

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(t\nu_0) &= \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \Phi_i\left(x, t\frac{\partial \nu_0}{\partial x_i}(x)\right)\frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} - \lambda\int_\Omega \Phi_{N+1}\big(x, t\nu_0(x)\big)\frac{\mathrm{d}x}{p_{N+1}(x)}\\
&\leqslant \sum_{i=1}^{N}\frac{t^{q_-^-}}{p_-^-}\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial \nu_0}{\partial x_i}(x)\right)\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{(p_{N+1})_+}\int_{\hat{\Omega}} \Phi_{N+1}\big(x, t\nu_0(x)\big)\mathrm{d}x\\
&= \frac{t^{q_-^-}}{p_-^-}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial \nu_0}{\partial x_i}(x)\right)\mathrm{d}x +\\
&\quad - \frac{\lambda}{(p_{N+1})_+}\int_{\hat{\Omega}} t^{q_{N+1}(x)}(\delta_{N+1})^{p_{N+1}(x)-q_{N+1}(x)}\,|\nu_0(x)|^{q_{N+1}(x)}\mathrm{d}x\\
&\leqslant t^{q_-^-}\left[\frac{1}{p_-^-}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial \nu_0}{\partial x_i}(x)\right)\mathrm{d}x\right] +\\
&\quad - t^{(q_{N+1})_-+\varepsilon}\left[\frac{\lambda\cdot C}{(p_{N+1})_+}\int_{\hat{\Omega}}|\nu_0(x)|^{q_{N+1}(x)}\mathrm{d}x\right],
\end{aligned}$$

où C est une constante positive qui dépend de δ_{N+1}, p_{N+1} et q_{N+1}.
Par conséquent,

$$\Phi_\lambda(t\nu_0) < 0, \quad \text{pour } 0 < t < C_0^{\left(\frac{1}{q_-^- - (q_{N+1})_- - \varepsilon}\right)} \quad \text{assez petit tel que}$$

$$0 < C_0 < \min\left\{1\ ;\ \frac{\lambda\cdot C\cdot p_-^-}{(p_{N+1})_+}\frac{\displaystyle\int_{\hat{\Omega}}|\nu_0(x)|^{q_{N+1}(x)}\mathrm{d}x}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial \nu_0}{\partial x_i}(x)\right)\mathrm{d}x}\right\}. \tag{4.41}$$

De plus, t est choisi de sorte que $\|t\nu_0\|_{\mathbf{V}_0} < \eta$. Dans (4.41), on a divisé par $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial \nu_0}{\partial x_i}(x)\right)\mathrm{d}x$, donc il faut bien vérifier que cette quantité est non nulle. En effet, on a

$$\begin{aligned}
0 &< C\int_{\hat{\Omega}}|\nu_0(x)|^{q_{N+1}(x)}\mathrm{d}x\\
&\leqslant \int_{\hat{\Omega}}(\delta_{N+1})^{p_{N+1}(x)-q_{N+1}(x)}|\nu_0(x)|^{q_{N+1}(x)}\mathrm{d}x\\
&\leqslant \int_\Omega \Phi_{N+1}\big(x, \nu_0(x)\big)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \begin{cases}(S_0)^{(q_{N+1})_-}\|\nu_0\|_{\mathbf{V}_0}^{(q_{N+1})_-} & \text{si } \|\nu_0\|_{\Phi_{N+1}} \leqslant 1,\\ (S_0)^{(p_{N+1})_+}\|\nu_0\|_{\mathbf{V}_0}^{(p_{N+1})_+} & \text{si } \|\nu_0\|_{\Phi_{N+1}} > 1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Alors, on déduit que $\|\nu_0\|_{\mathbf{V}_0} > 0$. Par suite, en utilisant la relation (5.22) ou (5.23), on conclut que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial \nu_0}{\partial x_i}(x)\right) \mathrm{d}x > 0$.

Remarque 4.10. *D'après les dernières inégalités, on déduit que pour tout* $u \in \mathbf{V}_0$*, on a*

$$\int_\Omega \Phi_{N+1}\big(x, u(x)\big)\mathrm{d}x \leqslant (S_0)^{(q_{N+1})_-} \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{(q_{N+1})_-} + (S_0)^{(p_{N+1})_+} \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{(p_{N+1})_+}.$$

(iii) A l'étape **(i)** et en utilisant les inégalités (4.37) et (4.38), on a montré que pour tout $u \in \mathbf{V}_0$ tel que $\|u\|_{\mathbf{V}_0} = \eta$, on a

$$\Phi_\lambda(u) \geqslant \frac{1}{N^{p_+^+} \cdot p_+^+} \cdot \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{p_+^+} - \lambda \frac{1}{(p_{N+1})_-} (S_0)^{(q_{N+1})_-} \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{(q_{N+1})_-}. \tag{4.42}$$

Par suite, on déduit que

$$-\infty < \inf_{u \in \overline{B}(0,\eta)} \Phi_\lambda(u) < 0. \tag{4.43}$$

Toutes les hypothèses du Théorème 4.7 sont vérifiées, ce qui achève la démonstration. ■

4.4.2 Cas sous-critique 2 (avec coercivité)

Sous les mêmes notations introduites dans la Section 4.4.1 et en utilisant le Théorème 2.45, on montre le résultat suivant :

Théorème 4.11. *(Voir [17]) Soient* $\delta_{N+1} > 0$ *un réel positif,* $q_{N+1}(x)$ *et* $p_{N+1}(x)$ *deux fonctions mesurables et bornées sur* Ω *telles que*

$$2 < \inf_\Omega \operatorname{ess} q_{N+1}(x) \leqslant \sup_\Omega \operatorname{ess} q_{N+1}(x) < \inf_\Omega \operatorname{ess} p_{N+1}(x).$$

On définit la même fonction $j : L^{\Phi_{N+1}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *par*

$$j(v) = \int_\Omega \Phi_{N+1}\big(x, v(x)\big) \frac{\mathrm{d}x}{p_{N+1}(x)},$$

telle que

$$\Phi_{N+1}\big(x, u(x)\big) = \begin{cases} |u(x)|^{p_{N+1}(x)} & si \;\; |u(x)| > \delta_{N+1}, \\ \alpha_{N+1}(x)|u(x)|^{q_{N+1}(x)} & si \;\; |u(x)| \leqslant \delta_{N+1}, \end{cases}$$

et $\alpha_{N+1}(x) = (\delta_{N+1})^{p_{N+1}(x) - q_{N+1}(x)}$.

De plus, on suppose que

(a) *L'injection* $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\Phi_{N+1}}(\Omega)$ *est compacte.*

(b) $(q_{N+1})_- < (p_{N+1})_+ < q_-^- = \min\{q_{1-}, \ldots, q_{N-}\}$.

Alors, sous ces hypothèses, il existe $\lambda_* > 0$ *et* $\lambda_{**} > 0$ *deux constantes telles que pour toute valeur* $\lambda \in]0; \lambda_*[\cup]\lambda_{**}; +\infty[$*, il existe une solution* $u \in \mathbf{V}_0$ *non triviale et* $u \geqslant 0$ *telle que*

$$0 \in \partial J(u) - \lambda \partial j(u).$$

En d'autres termes, il existe $w_i(x)$ *pour* $i = 1, \ldots, N$ *et* $w_{N+1}(x)$ *telles qu'on a*

$$p_i(x) w_i(x) \in \partial \Phi_i \left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) \ p.p.,$$

$$p_{N+1}(x) w_{N+1}(x) \in \partial \Phi_{N+1}\big(x, u(x)\big) \ p.p.$$

et

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega w_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega w_{N+1}(x) v(x) \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in \mathbf{V}_0.$$

Preuve:

Tout d'abord, l'existence de la première valeur $\lambda_* > 0$ telle que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_*[$, λ est une valeur propre de notre problème, est une conséquence du Théorème 4.9. Ensuite, pour trouver la deuxième valeur $\lambda_{**} > 0$, on va montrer que pour λ suffisamment grand, la fonctionnelle $\Phi_\lambda \doteq J - \lambda j$ admet un minimum global non trivial dans $\mathbf{V}_0$.

(i) La fonctionnelle Φ_λ est **coercive** sur $\mathbf{V}_0$. En effet, pour $v \in \mathbf{V}_0$(fixé) tel que $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \left\| \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{\Phi_i} \geqslant 1$, on a d'après le Corollaire 5.13 :

$$J(v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i \left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right) \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} \geqslant \frac{1}{p_+^+} \cdot \frac{1}{N^{q_-^-}} \cdot \|v\|_{\mathbf{V}_0}^{q_-^-}.$$

D'autre part, d'après la Remarque 4.10, on déduit la minoration suivante :

$$\Phi_\lambda(v) \geqslant \frac{1}{p_+^+ \cdot N^{q_-^-}} \cdot \|v\|_{\mathbf{V}_0}^{q_-^-} - \frac{\lambda (S_0)^{(q_{N+1})_-}}{(p_{N+1})_-} \|v\|_{\mathbf{V}_0}^{(q_{N+1})_-} + \frac{\lambda (S_0)^{(p_{N+1})_+}}{(p_{N+1})_-} \|v\|_{\mathbf{V}_0}^{(p_{N+1})_+};$$

Ceci pour tout $v \in \mathbf{V}_0$ où $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \left\| \dfrac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{\Phi_i} \geqslant 1$.

Par hypothèse, on a $(q_{N+1})_- < (p_{N+1})_+ < q_-^-$, alors lorsque $\|v\|_{\mathbf{V}_0} \to +\infty$, c'est $\|v\|_{\mathbf{V}_0}^{q_-^-}$ qui domine et par suite

$$\Phi_\lambda(v) \xrightarrow[\|v\|_{\mathbf{V}_0} \to +\infty]{} +\infty.$$

Par conséquent, Φ_λ est coercive.

(ii) La fonctionnelle Φ_λ est **faiblement semi-continue inférieurement** sur $\mathbf{V}_0$ c'est-à-dire pour toute suite $(u_n) \subset \mathbf{V}_0$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $\mathbf{V}_0$, on a

$$\Phi_\lambda(u) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \Phi_\lambda(u_n).$$

En effet, J est une fonction convexe (car c'est une somme finie des fonctions convexes), alors d'après la Proposition A.2, pour montrer qu'elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible, il suffit en fait de montrer qu'elle est semi-continue inférieurement pour la topologie forte. Pour cela, on fixe un élément $u_0 \in \mathbf{V}_0$ et on considère $\varepsilon > 0$.
On remarque que d'après **(b)** de la Proposition 2.62, on a

$$\|w_0^*\|_{\mathbf{V}_0^*} \leqslant K_{u_0}, \text{ pour tout } w_0^* \in \partial J(u_0), \tag{4.44}$$

où $K_{u_0} > 0$ est la constante de Lipschitz de J au voisinage de $u_0 \in \mathbf{V}_0$.
Ensuite, d'après la définition de la sous-différentielle de la fonction convexe J, on a pour tout $u \in \mathbf{V}_0$ et pour tout $w_0^* \in \partial J(u_0)$:

$$\begin{aligned} J(u) - J(u_0) &\geqslant \langle w_0^*; u - u_0\rangle \\ &\geqslant -\|w_0^*\|_{\mathbf{V}_0^*} \cdot \|u-u_0\|_{\mathbf{V}_0} \\ &\geqslant -K_{u_0} \cdot \|u-u_0\|_{\mathbf{V}_0}. \end{aligned}$$

Prenons $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K_{u_0}}$, alors pour tout $u \in \mathbf{V}_0$ avec $\|u-u_0\|_{\mathbf{V}_0} < \delta$, on a

$$J(u) - J(u_0) \geqslant -\varepsilon.$$

D'où J est semi-continue inférieurement pour la topologie forte et par suite pour la topologie faible.

Soit $(u_n) \subset \mathbf{V}_0$ une suite telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $\mathbf{V}_0$. D'après l'hypothèse **(a)**, l'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\Phi_{N+1}}(\Omega)$ est compacte, alors $u_n \to u$ fortement dans $L^{\Phi_{N+1}}(\Omega)$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} j(u_n) = j(u)$.
On rappelle que

$$J(u) = \Phi_\lambda(u) + \lambda j(u).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} J(u) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \left[\Phi_\lambda(u_n) + \lambda j(u_n)\right] \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \Phi_\lambda(u_n) + \limsup_{n\to\infty} \lambda j(u_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \Phi_\lambda(u_n) + \lambda \lim_{n\to\infty} j(u_n) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \Phi_\lambda(u_n) + \lambda j(u). \end{aligned}$$

D'où $\Phi_\lambda(u) \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \Phi_\lambda(u_n)$, donc Φ_λ est faiblement semi-continue inférieurement sur $\mathbf{V}_0$.

(iii) Les deux étapes précédentes nous permettent d'appliquer le Théorème 2.45, donc la fonctionnelle Φ_λ atteint son minimum dans $\mathbf{V}_0$. Par suite, il existe $u_{\min} \in \mathbf{V}_0$ un minimum global de Φ_λ et donc une solution de notre problème.

(iv) Montrons que cette solution $u_{\min}$ est **non triviale** pour λ suffisamment grand. En effet, considérons $t_0 > \max\{1; \delta_{N+1}\}$ un nombre réel fixé et $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ un ouvert tel que $|\Omega_1| > 0$. Alors, on peut construire une fonction $v_0 \in C_c^\infty(\Omega) \subset \mathbf{V}_0$ telle que

$$\begin{cases} v_0(x) = t_0 & \text{si } x \in \overline{\Omega}_1 \\ 0 \leqslant v_0(x) \leqslant t_0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases}$$

Par la suite, on a

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(v_0) &= \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial v_0}{\partial x_i}(x)\right) \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} - \lambda \int_\Omega \Phi_{N+1}\big(x, v_0(x)\big) \frac{\mathrm{d}x}{p_{N+1}(x)} \\
&\leqslant \frac{1}{p_-^-} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial v_0}{\partial x_i}(x)\right) \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{(p_{N+1})_+} \int_{\Omega_1} |v_0|^{p_{N+1}(x)} \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{p_-^-} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial v_0}{\partial x_i}(x)\right) \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{(p_{N+1})_+} \int_{\Omega_1} (t_0)^{(p_{N+1})_-} \mathrm{d}x \\
&\leqslant C_1 - \frac{\lambda}{(p_{N+1})_+} (t_0)^{(p_{N+1})_-} |\Omega_1|,
\end{aligned}$$

où $C_1 > 0$ est une constante positive.
Posons maintenant,

$$\lambda_{**} = \frac{C_1\ (p_{N+1})_+}{(t_0)^{(p_{N+1})_-}\ |\Omega_1|} > 0,$$

Puisque $u_{\min}$ est un minimum global de Φ_λ, alors pour tout $\lambda > \lambda_{**}$, on a

$$\Phi_\lambda(u_{\min}) \leqslant \Phi_\lambda(v_0) < 0.$$

■

Remarque 4.12. *(Voir [17]) Soit $f \in \mathbf{V}_0^*$. On considère le problème suivant :*

$$-\mathrm{div}_{\vec{\beta}} \left(\partial \Phi_i \left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) \right) = f, \tag{4.45}$$

où les fonctions Φ_i vérifient les mêmes hypothèses du Théorème 4.11. Alors, en remplaçant la fonction $j(v)$ du Théorème 4.11 par le produit de dualité suivant $\langle f, v\rangle_{\mathbf{V}_0}$, on montre, en suivant les mêmes étapes de la démonstration précédente, que la fonctionnelle Φ définie par

$$\Phi(v) = J(v) - \langle f, v\rangle_{\mathbf{V}_0},$$

est coercive et faiblement semi-continue inférieurement.
Par conséquent, il existe un minimiseur global $u \in \mathbf{V}_0$ solution de (4.45).

Dans le reste de ce chapitre, nous nous intéressons aux problèmes dits “critiques” là où nous perdons la compacité. Dans ce genre de problèmes nous avons besoin d'autres instruments pour montrer l'existence de solutions à partir de la convergence faible. Nous traitons plusieurs cas différents dans des domaines bornés et même dans des domaines non bornés.

4.5 Exposant critique dans un domaine borné

Dans cette section, on donne une application du Théorème 4.8 dans la résolution des problèmes de valeurs propres avec des exposants critiques dans un domaine borné. Dans cette application, la compacité n'est plus satisfaite, donc on va utiliser le résultat de compacité de A. El Hamidi et J.-M. Rakotoson (voir Théorème 2.81) pour surmonter cette difficulté.

Théorème 4.13. *(Voir [16]) Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, à bord $\partial\Omega$ Lipschitzien et $\Phi_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\Phi_i(x,t) = \dfrac{1}{p_i}|t|^{p_i}$, où p_i est un réel tel que $p_i > 1$ pour $i = 1,\ldots,N$.*
Sous la condition : $\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{1}{p_i} > 1$, on définit

$$\begin{aligned} p^+ &= \max\{p_1,\ldots,p_N\}, \\ p^- &= \min\{p_1,\ldots,p_N\}, \\ p^* &= \frac{N}{\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{1}{p_i} - 1}. \end{aligned}$$

On suppose que $p^+ < p^*$ et on considère q_1 et q_2 deux réels tels que

$$\textit{(a) } 1 < q_1 < p^-, \qquad \textit{(b) } 1 < q_2 < p^*, \qquad \textit{(c) } q_1 < q_2. \tag{4.46}$$

Alors, il existe $\lambda^* > 0$, tel que $\forall\, \lambda \in]0,\lambda^*[$, le problème suivant :

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - u^{p^*-1} \in \lambda\, \partial j_0(u) \tag{4.47}$$

admet une solution $u \in W_0^{1,p_1,\ldots,p_N}(\Omega)$, $u \geqslant 0$ et $u \not\equiv 0$, où la fonction j_0 est définie comme suit :

$$j_0(u) = \int_\Omega g(u(x))\,\mathrm{d}x \quad \textit{et} \quad g(u(x)) = \begin{cases} |u(x)|^{q_1} & \textit{si } |u(x)| \leqslant 1, \\ |u(x)|^{q_2} & \textit{si } |u(x)| > 1. \end{cases}$$

Preuve:
La preuve se fait en plusieurs étapes :

(i) On considère les deux espaces $\mathbf{V}$ et X définis par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \left\{ v \in L^{p^+}(\Omega) : \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right|^{p_i} \mathrm{d}x < +\infty, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, N \text{ et } \gamma_0 v = 0 \right\}, \\
X &= L^{p^*}(\Omega).
\end{aligned}$$

On a alors,

$$\mathbf{V} \hookrightarrow X \quad \text{injection continue,}$$

et

$$\mathbf{V} \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{injection compacte, pour tout } q < p^*.$$

(Pour plus de détails sur l'exposant critique dans le cas anisotropique, voir [32], [39], [77], [78] et [92]).

On définit les fonctions $j = j_1 + \lambda j_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $J : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^{p_i} \mathrm{d}x,$$

$$j_1(u) = \frac{1}{p^*} \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x.$$

Alors, J et j_1 sont C^1-différentiables et leurs dérivées sont données respectivement par :

$$J'(u) = \left\{ - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i - 2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right\},$$

et

$$j_1'(u) = \left\{ |u|^{p^* - 2} u \right\}.$$

D'après **(c)**, la fonction j_0 est convexe, en plus $j_0(0) = 0$, alors l'opérateur $u \mapsto \partial j_0(u)$ est monotone, donc $\langle \partial j_0(u), u \rangle \geqslant 0$.

Par suite,

$$\langle \partial j(u), u \rangle \geqslant \langle j_1'(u), u \rangle = \int_\Omega |u|^{p^*} \mathrm{d}x \geqslant p^* j_1(u).$$

En outre, $\forall\, i \in \{1, \ldots, N\}$, on a $1 \leqslant \dfrac{p^+}{p_i}$, alors

$$\langle J'(u), u \rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^{p_i} \mathrm{d}x \leqslant p^+ J(u).$$

Si on choisit la constante $\beta > 0$ de **(H2')** telle que $p^+ < \beta < p^*$, alors les deux conditions de croissance (4.28) et (4.29) sont vérifiées.

En plus, comme $\mathbf{V} \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte, pour tout $q < p^*$, alors la fonction $j_0 : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ est faiblement continue.

D'où l'hypothèse **(H2')** est vérifiée.

(ii) L'injection $\mathbf{V} \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ est continue. Considérons alors S_0 la constante de Sobolev telle que

$$\|v\|_{p^*} \leqslant S_0 \|v\|_{\mathbf{V}} \ , \qquad \text{où } \|v\|_{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{p_i} .$$

Soit la fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(\sigma) = \frac{1}{N^{p^+-1}} \sigma^{p^+-q_2} - (S_0)^{p^*} \sigma^{p^*-q_2}.$$

On a $p^+ < p^*$, alors il existe $0 < \eta < 1$ tel que $f(\eta) > 0$.
Par conséquent, pour tout $v \in \mathbf{V}$ tel que $\|v\|_{\mathbf{V}} = \eta$, on trouve (voir Proposition A.3)

$$\begin{aligned} J(v) - j_1(v) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{p_i}^{p_i} - \frac{1}{p^*} \|v\|_{p^*}^{p^*} \\ &\geqslant \frac{1}{p^*} \left[\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{p_i}^{p^+} - (S_0)^{p^*} \|v\|_{\mathbf{V}}^{p^*} \right] \\ &\geqslant \frac{1}{p^*} \left[\frac{1}{N^{p^+-1}} \|v\|_{\mathbf{V}}^{p^+} - (S_0)^{p^*} \|v\|_{\mathbf{V}}^{p^*} \right] \\ &= \frac{1}{p^*} f(\eta)\, \eta^{q_2}. \end{aligned}$$

Donc, d'après ce qui précède, si on choisit $\lambda^* > 0$ tel que

$$\lambda^* \sup_{\|v\|_{\mathbf{V}}=\eta} j_0(v) < \frac{1}{p^*} f(\eta)\, \eta^{q_2},$$

on obtient alors, pour tout $v \in \mathbf{V}$ tel que $\|v\|_{\mathbf{V}} = \eta$ et $\forall\, \lambda \in]0, \lambda^*[$,

$$\Phi(v) \doteq J(v) - j_1(v) - \lambda j_0(v) > 0. \tag{4.48}$$

Soit la fonction $\nu_0 \in C_c^1(\Omega)$ telle que

$$\left|\left\{ |\nu_0| \leqslant 1 \right\}\right| > 0, \qquad \text{et} \qquad \left|\left\{ |\nu_0| > 1 \right\}\right| > 0.$$

Alors, pour tout $0 < t < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(t\nu_0) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{t^{p_i}}{p_i} \left\| \frac{\partial \nu_0}{\partial x_i} \right\|_{p_i}^{p_i} - \frac{t^{p^*}}{p^*} \|\nu_0\|_{p^*}^{p^*} - \lambda t^{q_1} \int_{\{|\nu_0| \leqslant 1\}} |\nu_0|^{q_1} \,\mathrm{d}x \\
&\quad -\lambda t^{q_2} \int_{\{|\nu_0|>1\}} |\nu_0|^{q_2} \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{t^{p^-}}{p^-} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial \nu_0}{\partial x_i} \right\|_{p_i}^{p_i} - \frac{t^{p^*}}{p^*} \|\nu_0\|_{p^*}^{p^*} - \lambda t^{q_1} \int_{\{|\nu_0| \leqslant 1\}} |\nu_0|^{q_1} \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant t^{p^-} \left[\left(\frac{1}{p^-} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial \nu_0}{\partial x_i} \right\|_{p_i}^{p_i} \right) - t^{p^*-p^-} \left(\frac{1}{p^*} \|\nu_0\|_{p^*}^{p^*} \right) \right. \\
&\quad \left. -t^{q_1-p^-} \left(\lambda \int_{\{|\nu_0| \leqslant 1\}} |\nu_0|^{q_1} \,\mathrm{d}x \right) \right] \\
&\leqslant t^{p^-} \left[C_1 - t^{p^*-p^-} C_2 - t^{q_1-p^-} C_3 \right].
\end{aligned}$$

D'après (4.46), on a $p^* - p^- > 0$ et $q_1 - p^- < 0$, en plus, d'après le choix de ν_0, on a $C_3 > 0$, alors si on choisit $t > 0$ très petit, on obtient,

$$\Phi(t\nu_0) < 0 \quad \text{où} \quad t \|\nu_0\|_{\mathbf{V}} < \eta. \tag{4.49}$$

Il nous reste à vérifier le dernier point de l'hypothèse **(H3')**. Soit $v \in \overline{B}(0, \eta)$, d'après les injections $\mathbf{V} \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, $\mathbf{V} \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega)$ et $\mathbf{V} \hookrightarrow L^{q_2}(\Omega)$, il existe deux constantes $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$, telles que

$$\|v\|_{p^*} \leqslant S_0 \|v\|_{\mathbf{V}}, \qquad \|v\|_{q_1} \leqslant K_1 \|v\|_{\mathbf{V}} \qquad \textit{et} \qquad \|v\|_{q_2} \leqslant K_2 \|v\|_{\mathbf{V}}. \tag{4.50}$$

Par la suite,

$$\begin{aligned}
\Phi(v) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{p_i}^{p_i} - \frac{1}{p^*} \|v\|_{p^*}^{p^*} - \lambda \int_{\{|v| \leqslant 1\}} |v|^{q_1} \,\mathrm{d}x - \lambda \int_{\{|v|>1\}} |v|^{q_2} \,\mathrm{d}x \\
&\geqslant -\frac{1}{p^*} (S_0)^{p^*} \|v\|_{\mathbf{V}}^{p^*} - \lambda K_1^{q_1} \|v\|_{\mathbf{V}}^{q_1} - \lambda K_2^{q_2} \|v\|_{\mathbf{V}}^{q_2} \\
&\geqslant -\frac{1}{p^*} (S_0)^{p^*} \eta^{p^*} - \lambda K_1^{q_1} \eta^{q_1} - \lambda K_2^{q_2} \eta^{q_2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\inf \left\{ \Phi(v) : v \in \overline{B}(0, \eta) \right\} > -\infty. \tag{4.51}$$

D'après les relations (4.48), (4.49) et (4.51), l'hypothèse **(H3')** est vérifiée.

(iii) Il nous reste à montrer l'hypothèse de compacité c'est-à-dire le graphe de $\partial\Phi(\cdot)$ vérifie-t-il **(H1')** ? Plus précisément, pour toute suite $(u_n, w_n^*)_{n\geqslant 0}$ telle que $w_n^* \in \partial\Phi(u_n)$, il faut qu'on ait

$$\left.\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } \mathbf{V} \\ w_n^* \longrightarrow 0 & \text{fortement dans } \mathbf{V}^* \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \in \partial\Phi(u).$$

Pour cela, on utilise le résultat de compacité de [26], (voir Théorème 2.81) : En effet, soit $(u_n)_n$ une suite dans $\mathbf{V}$ telle que

⊛ $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $\mathbf{V}$.

⊛ $u_n \longrightarrow u$ fortement dans $L^r(\Omega)$, pour tout $r < p^*$.

⊛ $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ p.p. dans Ω.

Considérons l'opérateur

$$\widehat{a}(x, v, \nabla v) = \left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_1}\right|^{p_1-2}\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \left|\frac{\partial v}{\partial x_N}\right|^{p_N-2}\frac{\partial v}{\partial x_N}\right). \tag{4.52}$$

$\widehat{a}$ vérifie les hypothèses **(L1)-(L4)** du Théorème 2.81 (voir [29]).
De plus, soient $\varepsilon > 0$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ tels que

$$S_\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } |\sigma| \leqslant \varepsilon \\ \varepsilon \operatorname{sign}(\sigma) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $\sigma^k = S_k(\sigma)$, pour tout $k \geqslant 1$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.
L'opérateur $u \in \mathbf{V} \mapsto \partial j(u)$ est borné, alors la suite $\big(\partial j(u_n)\big)_n$ est bornée dans l'espace dual $\big(L^{p^*}(\Omega) + L^{q_2}(\Omega)\big)^*$.
Par la suite, $\forall\, v_n^* \in \partial j(u_n)$, il existe une constante $C_0 > 0$ (indépendante de n) telle que

$$\left|\left\langle v_n^*; \varphi S_\varepsilon(u_n - u^k)\right\rangle\right| \leqslant \varepsilon C_0 \|\varphi\|_\infty. \tag{4.53}$$

D'autre part, soit $w_n^* \in \partial\Phi(u_n)$, alors $\exists\, C_1 > 0$ (indépendante de n) telle que

$$\left|\left\langle w_n^*; \varphi S_\varepsilon(u_n - u^k)\right\rangle\right| \leqslant C_1 \|w_n^*\|_{\mathbf{V}^*}. \tag{4.54}$$

On a $w_n^* \in \partial\Phi(u_n) \subset J'(u_n) - \partial j(u_n)$. Alors, il existe $v_n^* \in \partial j(u_n)$ telle que

$$w_n^* + v_n^* = J'(u_n).$$

Donc d'après (4.53) et (4.54), on a

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\varphi S_\varepsilon(u_n - u^k)\Big)\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon C_0\|\varphi\|_\infty + C_1\|w_n^*\|_{\mathbf{V}^*}. \tag{4.55}$$

Par hypothèse, on a $w_n^* \to 0$ fortement dans $\mathbf{V}^*$. Par conséquent, d'après (4.55), on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|^{p_i-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\varphi S_\varepsilon(u_n - u^k)\Big)\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon C_0 \|\varphi\|_\infty.$$

Ce qui nous permet d'appliquer le Théorème 2.81 (voir [29]), pour déduire l'existence d'une sous-suite telle que

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x) \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{4.56}$$

Alors, $\forall v \in \mathbf{V}$, on a

$$\langle J'(u_n); v\rangle \longrightarrow \langle J'(u); v\rangle\,, \tag{4.57}$$

et

$$\langle j_1'(u_n); v\rangle \longrightarrow \langle j_1'(u); v\rangle\,. \tag{4.58}$$

En plus, comme $\mathbf{V} \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ est une injection compacte, pour tout $q < p^*$, alors la fonction $h : \mathbf{V} \longrightarrow L^r(\Omega)$ définie par $h(u) = |u|^{p^*-2}u$ est faiblement continue (c'est-à-dire h est continue de $\mathbf{V}$ muni de la topologie faible dans $L^r(\Omega)$ muni de la topologie forte), pour tout $r < \dfrac{p^*}{p^*-1}$.
Puisque $w_n^* \in \partial\Phi(u_n) \subset J'(u_n) - j_1'(u_n) - \lambda\partial j_0(u_n)$, alors

$$-w_n^* + J'(u_n) - j_1'(u_n) \in \lambda\partial j_0(u_n). \tag{4.59}$$

Finalement, on va montrer par deux méthodes différentes qu'en passant à la limite dans (4.59), on obtient

$$J'(u) - j_1'(u) \in \lambda\partial j_0(u) \quad \text{ c'est-à-dire } 0 \in \partial\Phi(u).$$

Ce qui revient à dire que l'hypothèse **(H1')** est vérifiée.

Première méthode

Soit $v \in \mathbf{V}$. D'après la définition de la sous-différentielle de j_0 (convexe), on a

$$\langle -w_n^* + J'(u_n) - j_1'(u_n); v - u_n\rangle \leqslant \lambda j_0(v) - \lambda j_0(u_n). \tag{4.60}$$

Par la suite,

$$\begin{aligned}\langle j_1'(u_n) - J'(u_n); u_n\rangle \;\leqslant\; & \lambda j_0(v) - \lambda j_0(u_n) + \langle w_n^*; v - u_n\rangle \\ & - \langle J'(u_n) - j_1'(u_n); v\rangle\,.\end{aligned}$$

De plus, d'après ce qui précède, on a les convergences suivantes :

⊛ $\lim\limits_{n\to+\infty} j_0(u_n) = j_0(u)$ (car j_0 est faiblement continue).

⊛ $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle w_n^*; v - u_n\rangle \; = 0$ (car (u_n) est une suite bornée dans $\mathbf{V}$ et $w_n^* \to 0$ fortement dans $\mathbf{V}^*$).

⊛ $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle J'(u_n) - j_1'(u_n); v\rangle \; = \langle J'(u) - j_1'(u); v\rangle$ (d'après (4.57) et (4.58)).

En passant à la limite, on déduit que

$$\langle j_1'(u) - J'(u); u\rangle \; \leqslant \lambda j_0(v) - \lambda j_0(u) - \langle J'(u) - j_1'(u); v\rangle .$$

Alors, pour $v \in \mathbf{V}$, on a

$$\langle J'(u) - j_1'(u); v - u\rangle \; \leqslant \lambda j_0(v) - \lambda j_0(u).$$

Ce qui montre (d'après la définition de la sous-différentielle de j_0) que

$$0 \in \partial\Phi(u).$$

Deuxième méthode

La suite $u_n \to u$ converge fortement dans $L^{q_2}(\Omega)$ (car $q_2 < p^*$). En plus, d'après (4.59), $\forall\; n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $\xi_n^* \in L^{q_2'}(\Omega)$ (où q_2' est le conjugué de q_2) telle que

$$\xi_n^* = -w_n^* + J'(u_n) - j_1'(u_n) \in \lambda\partial j_0(u_n). \tag{4.61}$$

La suite $(\xi_n^*)_n$ est bornée dans l'espace dual $L^{q_2'}(\Omega)$, alors il existe une sous-suite (aussi notée $(\xi_n^*)_n$) et une fonction ξ^* telles que $\xi_n^* \rightharpoonup \xi^*$ faiblement dans $L^{q_2'}(\Omega)$. La Proposition 2.64 implique que

$$\xi^* \in \lambda\partial j_0(u).$$

Puisque $w_n^* \to 0$ fortement dans $\mathbf{V}^*$ alors, $\forall\; v \in \mathbf{V}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle w_n^*; v\rangle = 0$. Par suite, d'après (4.57) et (4.58), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle -w_n^* + J'(u_n) - j_1'(u_n); v\rangle \; = \langle J'(u) - j_1'(u); v\rangle .$$

Par conséquent, d'après (4.61), on déduit que

$$J'(u) - j_1'(u) = \xi^* \in \lambda\partial j_0(u),$$

c'est-à-dire

$$0 \in \partial\Phi(u).$$

Finalement, les hypothèses **(H1')**, **(H2')** et **(H3')** sont vérifiées dans **(iii)**, **(i)** et **(ii)** respectivement, alors il existe une solution $u \in W_0^{1,p_1,\dots,p_N}(\Omega)$ non nulle, du problème (4.47). Ayant $\Phi(u) = \Phi(|u|)$, on peut choisir $u \geqslant 0$. ■

Remarque 4.14. *Le Théorème 4.13 nous permet de recouvrir des autres résultats, en particulier, si λj_0 est petit, on peut retrouver le Théorème* 1 *de [5].*

4.6 Exposant critique avec un poids de type Hardy dans un domaine non borné (Cas différentiable)

Dans le Théorème 4.19 ci-dessous, on montre sous l'hypothèse $1 < q < p$ et en appliquant le Théorème 4.8, l'existence d'une solution d'un problème de valeurs propres dans un domaine non borné avec un poids de type Hardy. Ensuite, dans le Théorème 4.21 et sous l'hypothèse $p < q < p_\alpha^*$, on montre l'existence d'une solution du même problème mais en appliquant la même preuve utilisée dans [29].

Tout d'abord, on commence par donner quelques résultats préliminaires :

Le théorème suivant est dû à V. Maz'ja (voir [55]).

Théorème 4.15. *(Voir [55, page 92]) Pour toute fonction u dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ à support compact et pour tout $\alpha \in [0,1]$, on a*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{\frac{N-\alpha}{N-1}} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha}\right)^{\frac{N-1}{N-\alpha}} \leqslant (N-\alpha)^{\frac{1-N}{N-\alpha}}\, \omega_N^{\frac{\alpha-1}{N-\alpha}}\, \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

où ω_N est la mesure de Lebesgue de la boule unité dans $\mathbb{R}^N$.

D'après ce dernier théorème, on montre le corollaire suivant :

Corollaire 4.16. *(Voir [16]) Soient $\alpha \in [0,1]$, $p \geqslant 1$ et $p_\alpha^* = \dfrac{(N-\alpha)p}{(N-\alpha)-(1-\alpha)p}$ tels que*

$$(N-\alpha) > (1-\alpha)p.$$

Alors, $\forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ à support compact, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_\alpha^*} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha}\right)^{\frac{1}{p_\alpha^*}} \leqslant c_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p |x|^{\alpha(p-1)} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.62}$$

où $c_N = t(N-\alpha)^{\frac{1-N}{N-\alpha}}\, \omega_N^{\frac{\alpha-1}{N-\alpha}}$ et $t = \dfrac{N-1}{N-\alpha} p_\alpha^*$.

Preuve:
Soit $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ une fonction à support compact. Alors, pour tout $1 \leqslant t \leqslant p$, on a $|u|^t \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ et à support compact. Par conséquent, on applique le Théorème 4.15 à $|u|^t$, on obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{t\frac{N-\alpha}{N-1}} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha}\right)^{\frac{N-1}{N-\alpha}} \leqslant c_N \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{t-1} |\nabla u(x)| \mathrm{d}x, \tag{4.63}$$

où $c_N = t(N-\alpha)^{\frac{1-N}{N-\alpha}}\, \omega_N^{\frac{\alpha-1}{N-\alpha}}$.

D'autre part, on introduit le poids $|x|^{-\alpha}$ dans le second membre de l'inégalité comme suit :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{t-1}|\nabla u(x)|\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|u(x)|^{t-1}|x|^{-\frac{\alpha}{p'}}\right]\left[|\nabla u(x)|\ |x|^{\frac{\alpha}{p'}}\right]\mathrm{d}x. \tag{4.64}$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de Hölder, on déduit pour $t = \dfrac{N-1}{N-\alpha}p_\alpha^*$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p_\alpha^*}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha}\right)^{\frac{t}{p_\alpha^*}} \leqslant c_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{(t-1)p'}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p|x|^{\alpha(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.65}$$

En plus, d'après le choix de t et par un simple calcul, on trouve

$$\frac{t}{p_\alpha^*} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p_\alpha^*}, \tag{4.66}$$

ce qui implique

$$(t-1)p' = p_\alpha^*. \tag{4.67}$$

La relation (4.67) nous permet d'écrire (4.65) comme suit :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p_\alpha^*}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha}\right)^{\frac{t}{p_\alpha^*}} \leqslant c_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p_\alpha^*}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p|x|^{\alpha(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.68}$$

Par conséquent,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p_\alpha^*}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha}\right)^{\frac{t}{p_\alpha^*}-\frac{1}{p'}} \leqslant c_N \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p|x|^{\alpha(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.69}$$

La relation (4.66) achève la démonstration. ■

Remarque 4.17. **(1)** *Si $\alpha = 0$, alors $p_\alpha^* = \dfrac{Np}{N-p}$ est l'exposant critique classique et dans ce cas on retrouve d'après* (4.62)*, l'injection de Sobolev usuelle.*
(2) *Si $\alpha = 1$, alors $p_\alpha^* = p$.*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On considère la norme suivante

$$\|v\| = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^p|x|^{\alpha(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall\ v \in C_c^\infty(\Omega).$$

On note l'espace $\mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ munie de la norme ci-dessus. Alors, comme au Corollaire 4.16, on a le lemme suivant :

Lemme 4.18. *(Voir [16]) $\forall\ u \in \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)$, on a*

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^{p_\alpha^*}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha}\right)^{\frac{1}{p_\alpha^*}} \leqslant c_N \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p|x|^{\alpha(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

4.6.1 Cas $1 < q < p$

Nous sommes prêts à résoudre le problème de valeurs propres suivant :

Théorème 4.19. *(Voir [16]) Soient un réel* $1 < q < p$ *et* $a \in L^m_+\left(\Omega, |x|^{\frac{\alpha q}{p^*_\alpha - q}}\right)$ *une fonction tels que* $m = \dfrac{p^*_\alpha}{p^*_\alpha - q}$. *Alors, il existe* $\lambda^* > 0$ *tel que* $\forall\ \lambda \in]0, \lambda^*[$, *il existe une fonction* $u \geqslant 0,\ u \not\equiv 0,\ u \in \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega)$ *solution du problème*

$$-\mathrm{div}\left(|x|^{\alpha(p-1)}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \lambda a(x) u^{q-1} + \frac{u^{p^*_\alpha - 1}}{|x|^\alpha} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.70}$$

Remarque 4.20. *Soit* $a \in L^m_+\left(\Omega, |x|^{\frac{\alpha q}{p^*_\alpha - q}}\right)$, *on définit la fonction* j_0 *telle que*

$$\begin{array}{rcl} j_0 : \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longrightarrow & \dfrac{1}{q}\displaystyle\int_\Omega a(x)|u(x)|^q \mathrm{d}x. \end{array}$$

D'après la condition d'intégrabilité sur la fonction a, *on a*

⊛ j_0 *est bien définie (voir l'étape* ***(ii)*** *de la preuve ci-dessous).*

⊛ j_0 *est faiblement continue c'est-à-dire si* $(u_n)_n$ *est une suite bornée dans* $\mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega)$, *on sait qu'il existe une fonction* $u \in \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega)$ *et une sous-suite aussi notée* (u_n) *telle que* $u_n(x) \underset{n}{\to} u(x)$ *p.p.* $x \in \Omega$ *et* $u_n \rightharpoonup u$ *faiblement dans* $\mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega)$. *En plus, la propriété de "continuité faible" de la fonction implique que*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x)|u_n - u|^q \mathrm{d}x = 0.$$

Pour la preuve, voir [7].

Preuve:
L'idée de la preuve du Théorème 4.19 est la même que celle qu'on a utilisée dans la démonstration du Théorème 4.13 c'est-à-dire on vérifie les hypothèses **(H1')-(H3')**, puis on applique le Théorème 4.8 :

(i) On définit les deux fonctions $J(u)$ et $j(u) = \lambda j_0(u) + j_1(u)$ telles que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p |x|^{\alpha(p-1)} \mathrm{d}x, \\ j_1(u) &= \frac{1}{p^*_\alpha}\int_\Omega |u|^{p^*_\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha}, \\ j_0(u) &= \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)|u(x)|^q \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
\partial J(u) &= \Big\{ -\operatorname{div}\Big(|x|^{\alpha(p-1)}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)\Big\},\\
\partial j_1(u) &= \left\{ \frac{|u|^{p_\alpha^*-2}u}{|x|^\alpha} \right\},\\
\partial j_0(u) &= \Big\{ a(x)|u|^{q-2}u \Big\}.
\end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $a \in L_+^m\Big(\Omega, |x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^*-q}}\Big)$, alors $\displaystyle\int_\Omega a(x)|u|^q \mathrm{d}x \geqslant 0$.
Par conséquent,

$$\langle \partial j(u), u\rangle \geqslant \int_\Omega |u|^{p_\alpha^*}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha} \geqslant p_\alpha^*\ j_1(u). \tag{4.71}$$

En plus, on a

$$\langle J'(u), u\rangle = pJ(u). \tag{4.72}$$

Alors, la constante $\beta > 0$ de la condition **(H2')** peut être choisie telle que

$$p < \beta < p_\alpha^*.$$

D'après la Remarque 4.20, **(H2')** est vérifiée.

(ii) On a $\Phi(0) \doteq (J-j)(0) = 0 = J(0) = j(0)$.
Ayant $p < p_\alpha^*$, alors il existe $\eta > 0$ telle que

$$\eta_1 \doteq \eta^{p-q} - c_N^{p_\alpha^*}\eta^{p_\alpha^*-q} > 0,$$

où c_N est la constante de Sobolev donnée dans le Lemme 4.18.
Donc, pour tout $v \in \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)$ tel que $\|v\| = \eta$, on a

$$\begin{aligned}
J(v) - j_1(v) &= \frac{1}{p}\|v\|^p - \frac{1}{p_\alpha^*}\int_\Omega |u|^{p_\alpha^*}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha}\\
&\geqslant \frac{1}{p}\|v\|^p - \frac{1}{p_\alpha^*}c_N^{p_\alpha^*}\|v\|^{p_\alpha^*}\\
&\geqslant \frac{1}{p_\alpha^*}\Big[\eta^p - c_N^{p_\alpha^*}\eta^{p_\alpha^*}\Big]\\
&= \frac{1}{p_\alpha^*}\eta^q\eta_1.
\end{aligned}$$

Soit $\lambda^* > 0$ telle que

$$\lambda^* \sup_{\|v\|=\eta} j_0(v) < \frac{1}{p_\alpha^*}\eta_1\eta^q.$$

Par suite, $\forall\ v \in \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)$ tel que $\|v\| = \eta$ et $\forall\ \lambda \in]0, \lambda^*[$, on a

$$\Phi(v) = J(v) - j_1(v) - \lambda j_0(v) > 0.$$

Ensuite, on considère une fonction $u_0 \in C_c^\infty(\Omega)$ telle qu'au moins un des deux ensembles F et G suivants a une mesure non nulle où

$$F \doteq \Big\{ \operatorname{supp}(a) \cap \big\{ |u_0| \geqslant 1 \big\} \Big\} \text{ et } G \doteq \Big\{ \operatorname{supp}(a) \cap \big\{ |u_0| \leqslant 1 \big\} \Big\}.$$

($\operatorname{supp}(a)$ désigne le support de la fonction a).

Sous ces conditions, on obtient $\displaystyle\int_\Omega a(x)|u_0|^q \mathrm{d}x > 0$.

Soit $0 < t < 1$, alors

$$\begin{aligned}
\Phi(tu_0) &= \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla u_0|^p |x|^{\alpha(p-1)}\mathrm{d}x - \frac{t^{p_\alpha^*}}{p_\alpha^*}\int_\Omega |u_0|^{p_\alpha^*}\frac{\mathrm{d}x}{|x|^\alpha} - \frac{\lambda t^q}{q}\int_\Omega a(x)|u_0|^q\mathrm{d}x \\
&\leqslant t^p\Big(A_1 - A_2 t^{p_\alpha^* - p} - A_3 t^{q-p}\Big).
\end{aligned}$$

Etant donné que $q < p < p_\alpha^*$ et $A_3 = \dfrac{\lambda}{q}\displaystyle\int_\Omega a(x)|u_0|^q\mathrm{d}x > 0$, alors pour t suffisamment petit, on déduit que $\Phi(tu_0) < 0$ et $\|tu_0\| < \eta$.

D'autre part, on a d'après le Lemme 4.18,

$$j_1(v) \leqslant C_1\|v\|^{p_\alpha^*}, \qquad \text{où } C_1 = \frac{c_N^{p_\alpha^*}}{p_\alpha^*}.$$

En plus, d'après la condition d'intégrabilité sur la fonction a, on a

$$j_0(v) \leqslant C_2\|v\|^q, \qquad \text{où } C_2 = \frac{c_N^q}{q}\|a\|_{L^m\left(\Omega, |x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^* - q}}\right)} < +\infty.$$

En effet, en utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x)|v|^q\mathrm{d}x &= \int_\Omega \Big[a(x)|x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^*}}\Big]\Big[|v|^q|x|^{-\frac{\alpha q}{p_\alpha^*}}\Big]\mathrm{d}x \\
&\leqslant \left(\int_\Omega \Big[a(x)|x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^*}}\Big]^{\frac{p_\alpha^*}{p_\alpha^*-q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_\alpha^*-q}{p_\alpha^*}} \left(\int_\Omega \Big[|v|^q|x|^{-\frac{\alpha q}{p_\alpha^*}}\Big]^{\frac{p_\alpha^*}{q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p_\alpha^*}} \\
&= \left(\int_\Omega a(x)^{\frac{p_\alpha^*}{p_\alpha^*-q}}|x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^*-q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_\alpha^*-q}{p_\alpha^*}} \left(\int_\Omega |v|^{p_\alpha^*}|x|^{-\alpha}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p_\alpha^*}} \\
&\leqslant \left(\int_\Omega a(x)^{\frac{p_\alpha^*}{p_\alpha^*-q}}|x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^*-q}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_\alpha^*-q}{p_\alpha^*}} c_N^q\|v\|^q \\
&= \|a\|_{L^m\left(\Omega, |x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^*-q}}\right)} c_N^q\|v\|^q.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\Phi(v) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p|x|^{\alpha(p-1)}\mathrm{d}x - j_1(v) - \lambda j_0(v) \\
&\geqslant \frac{1}{p}\|v\|^p - C_1\|v\|^{p_\alpha^*} - \lambda C_2\|v\|^q.
\end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\inf\Big\{\Phi(v) : \|v\| \leqslant \eta\Big\} > -\infty.$$

D'où l'hypothèse **(H3')** est vérifiée.

(iii) Dans cette dernière étape, nous montrerons que le graphe de la sous différentielle de Φ : $\partial\Phi(\cdot) = J'(\cdot) - j'(\cdot)$ vérifie l'hypothèse **(H1')**, c'est-à-dire pour toute suite $(u_n, w_n^*)_{n\geqslant 0}$ telle que $w_n^* = J'(u_n) - j'(u_n)$, on a

$$\left.\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) \\ \text{et} & \\ w_n^* \longrightarrow 0 & \text{fortement dans } \Big(\mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega)\Big)^* \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 = J'(u) - j'(u).$$

Comme dans la preuve précédente, on utilise le Théorème 2.81 :
En effet, soit $(u_n)_n$ une suite dans $\mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega)$ telle que

⊛ $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $\mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega)$.

⊛ $u_n(x) \longrightarrow u(x)$ p.p. dans Ω.

Considérons l'opérateur

$$\widehat{a}(x, v, \nabla v) = |x|^{\alpha(p-1)}|\nabla v|^{p-2}\nabla v. \tag{4.74}$$

$\widehat{a}$ vérifie les hypothèses **(L1)**-**(L4)** du Théorème 2.81 (voir [26]).
Soient $0 < \varepsilon < 1$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ tels que

$$S_\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } |\sigma| \leqslant \varepsilon \\ \varepsilon \operatorname{sign}(\sigma) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $\sigma^k = S_k(\sigma)$, $\forall\ k \geqslant 1$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Par suite, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\Theta^n_{j_0'} &\doteq |\big\langle j_0'(u_n); \varphi S_\varepsilon(u_n - u^k)\big\rangle| \leqslant \varepsilon \int_\Omega a(x)|u_n|^{q-1}|\varphi|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \varepsilon \left(\int_\Omega \Big[a(x)|x|^{\frac{\alpha q}{p^*_\alpha}}\Big]^{\frac{p^*_\alpha}{p^*_\alpha - q}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p^*_\alpha - q}{p^*_\alpha}} \left(\int_\Omega \left[\frac{|u_n|^{q-1}|\varphi|}{|x|^{\frac{\alpha q}{p^*_\alpha}}}\right]^{\frac{p^*_\alpha}{q}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p^*_\alpha}} \\
&= \varepsilon\, \|a\|_{L^m\left(\Omega, |x|^{\frac{\alpha q}{p^*_\alpha - q}}\right)} \left(\int_\Omega \left[\frac{|u_n|^{\frac{q-1}{q}p^*_\alpha}}{|x|^{\frac{\alpha}{q'}}}\right] \left[\frac{|\varphi|^{\frac{p^*_\alpha}{q}}}{|x|^{\frac{\alpha}{q}}}\right] \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p^*_\alpha}} \\
&\leqslant \varepsilon\, \|a\|_{L^m\left(\Omega, |x|^{\frac{\alpha q}{p^*_\alpha - q}}\right)} \left(\int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*_\alpha}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q'}\frac{q}{p^*_\alpha}} \left(\int_\Omega \frac{|\varphi|^{p^*_\alpha}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}\frac{q}{p^*_\alpha}} \\
&\leqslant \varepsilon\, C_3\|u_n\|^{q-1}.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\Theta^n_{j_1'} &\doteq \left| \left\langle j_1'(u_n); \varphi S_\varepsilon(u_n - u^k) \right\rangle \right| \leqslant \varepsilon \int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*_\alpha - 1}|\varphi|}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \\
&\leqslant \varepsilon \left(\int_\Omega \left[\frac{|u_n|^{p^*_\alpha-1}}{|x|^{\alpha \frac{p^*_\alpha - 1}{p^*_\alpha}}} \right]^{\frac{p^*_\alpha}{p^*_\alpha - 1}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p^*_\alpha - 1}{p^*_\alpha}} \left(\int_\Omega \left[\frac{|\varphi|}{|x|^{\frac{\alpha}{p^*_\alpha}}} \right]^{p^*_\alpha} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p^*_\alpha}} \\
&\leqslant \varepsilon \left(\int_\Omega \frac{|u_n|^{p^*_\alpha}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \right)^{\frac{p^*_\alpha - 1}{p^*_\alpha}} \left(\int_\Omega \frac{|\varphi|^{p^*_\alpha}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p^*_\alpha}} \\
&\leqslant \varepsilon\, C_4 \|u_n\|^{p^*_\alpha - 1}.
\end{aligned}$$

On sait que $J'(u_n) = \Phi'(u_n) + j_1'(u_n) + \lambda j_0'(u_n)$. Par suite, on a

$$\int_\Omega |x|^{\alpha(p-1)} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Big(\varphi S_\varepsilon \big(u_n - u^k \big) \Big) \mathrm{d}x \leqslant C_5 \Big(\varepsilon + \|w_n^*\|_* \Big), \quad C_5 > 0.$$

En utilisant le fait que $w_n^* \to 0$ fortement dans $\Big(\mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) \Big)^*$, on obtient

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_\Omega |x|^{\alpha(p-1)} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla \Big(\varphi S_\varepsilon \big(u_n - u^k \big) \Big) \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\, C_5.$$

D'après le Théorème 2.81, on déduit l'existence d'une sous-suite de (u_n) telle que

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x) \ \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Alors, $\forall v \in \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega)$, on a

$$\langle J'(u_n), v \rangle \longrightarrow \langle J'(u), v \rangle, \tag{4.75}$$

et

$$\langle j_1'(u_n), v \rangle \longrightarrow \langle j_1'(u), v \rangle. \tag{4.76}$$

La continuité faible de j_0, (4.75) et (4.76) impliquent

$$0 = J'(u) - j'(u) \text{ dans } \Big(\mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) \Big)^*.$$

Alors, l'hypothèse **(H1')** est vérifiée.

Les hypothèses **(H1')**, **(H2')** et **(H3')** du Théorème 4.8 sont vérifiées, alors il existe $u \in \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega)$, $u \not\equiv 0$ et $u \geqslant 0$ solution du problème (4.70).

4.6.2 Cas $p < q < p_\alpha^*$

Théorème 4.21. *(Voir [16]) Soient un réel $q > 0$ tel que $p < q < p_\alpha^*$ et une fonction $a \not\equiv 0$, $a \in L_+^m\left(\Omega, |x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^* - q}}\right)$ tels que $m = \dfrac{p_\alpha^*}{p_\alpha^* - q}$. Alors, il existe $\lambda^* > 0$ tel que $\forall\ \lambda > \lambda^*$, il existe une fonction $u \geqslant 0,\ u \not\equiv 0,\ u \in \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)$ solution du problème*

$$-\mathrm{div}\left(|x|^{\alpha(p-1)}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = \lambda a(x)u^{q-1} + \frac{u^{p_\alpha^*-1}}{|x|^\alpha} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{4.77}$$

Preuve:
Dans cette preuve, on suit les mêmes étapes de la démonstration donnée par A. El Hamidi et J.-M. Rakotoson dans [29] en ajustant certains calculs, à savoir :

(i) On considère la fonctionnelle d'Euler-Lagrange J_λ associée au problème (4.77) définie par :

$$J_\lambda(u) \doteq \frac{1}{p}\int_\Omega |x|^{\alpha(p-1)}|\nabla u|^p \mathrm{d}x - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega a(x)|u|^q \mathrm{d}x - \frac{1}{p_\alpha^*}\int_\Omega \frac{|u|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x. \tag{4.78}$$

On a $J_\lambda \in C^1(\mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ (voir l'inégalité (4.73)). Les solutions de notre problème peuvent se voir comme les points critiques de J_λ.

(ii) On cherche les solutions du problème de valeurs propres (4.77) sur la variété de Nehari (qui contient tous les points critiques de J_λ) définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{J_\lambda} &\doteq \left\{v \in \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \langle J_\lambda'(v); v\rangle = 0\right\} \\ &= \left\{t\varphi : t \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ et } \varphi \in \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\} : \frac{d}{dt}J_\lambda(t\varphi) = 0\right\}.\end{aligned}$$

Pour cela, on introduit la fonction à deux variables $\widetilde{J_\lambda}$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)$ par :

$$\widetilde{J_\lambda}(t,u) \doteq J_\lambda(tu)$$

Comme $J_\lambda(tu) = J_\lambda(-tu)$, alors on peut supposer, dans ce qui suit, que $t > 0$.

(iii) On commence par énoncer les lemmes suivants qui se démontrent de la même manière que dans [29] :

Lemme 4.22. *(Voir [29]) Soit $p < q < p_\alpha^*$. Alors, $\forall\ \lambda \geqslant 0$ et $u \in \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}$, il existe un réel $t(\lambda, u) > 0$ unique tel que :*

(a) $t(\lambda,u)u \in \mathcal{N}_{J_\lambda}$.

(b) *L'application* $(\lambda, u) \mapsto t(\lambda, u)$ *est* $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}, \mathbb{R})$.

(c) *Pour tout* $\gamma > 0$, *on a* $t(\lambda, \gamma u) = \dfrac{1}{\gamma}t(\lambda, u)$.

(d) $t(\lambda, |u|) = t(\lambda, u)$.

Lemme 4.23. *(Voir [29]) Soit* $u \in \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) \setminus \{0\}$.

(a) *Si* $\displaystyle\int_\Omega a(x)|u|^q \mathrm{d}x > 0$, *alors l'application* $\lambda \in \mathbb{R}_+ \mapsto t(\lambda, u)$ *est décroissante.*

(b) *Si* $\displaystyle\int_\Omega a(x)|u|^q \mathrm{d}x = 0$, *alors l'application* $\lambda \in \mathbb{R}_+ \mapsto t(\lambda, u)$ *est une constante et dans ce cas* $t(\lambda, u) = t(0, u)$, $\forall\, \lambda > 0$.

D'après le Lemme 4.22, on déduit que $\forall\ \lambda \geqslant 0$, la variété de Nehari s'écrit plus précisément comme :

$$\mathcal{N}_{J_\lambda} = \Big\{ \pm\, t(\lambda, u)u : \ u \in \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) \setminus \{0\} \Big\}.$$

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, on définit la quantité suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &\doteq \inf_{u \in \mathcal{N}_{J_\lambda}} J_\lambda(u) \\ &= \inf_{u \in \mathbb{S}} J_\lambda(t(\lambda, u)u), \end{aligned} \tag{4.79}$$

où $\mathbb{S} \doteq \Big\{ u \in \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega |x|^{\alpha(p-1)} |\nabla u|^p \mathrm{d}x = 1 \Big\}$.

(iv) De la même façon que dans [29], on montre le lemme suivant :

Lemme 4.24. *(Voir [29]) Soit* $u \in \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) \setminus \{0\}$ *et on considère l'ensemble*

$$I(u) \doteq \Big\{ \lambda \geqslant 0 : t(\lambda, u) \leqslant 1 \Big\}.$$

Alors,

$$I(u) = \begin{cases} \text{un intervalle de la forme }]\lambda_{\min}(u); +\infty[& \text{si} \displaystyle\int_\Omega a(x)|u|^q \mathrm{d}x > 0, \\ \\ \text{ensemble vide } \varnothing \text{ ou } \mathbb{R}_+ & \text{si} \displaystyle\int_\Omega a(x)|u|^q \mathrm{d}x = 0. \end{cases}$$

Ensuite, on définit la fonction $\widetilde{J}_0$ sur $\mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega)$ par

$$\widetilde{J}_0(u) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*_\alpha} \right) \int_\Omega |x|^{\alpha(p-1)} |\nabla u|^p \mathrm{d}x.$$

Sous ces notations, on montre que $\forall\ u \in \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) \setminus \{0\}$ et $\forall\ \lambda \geqslant 0$, on a

$$J_\lambda\big(t(\lambda, u)u\big) = \widetilde{J}_0\big(t(\lambda, u)u\big) - \lambda \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p^*_\alpha} \right) t(\lambda, u)^q \int_\Omega a(x)|u|^q \mathrm{d}x. \tag{4.80}$$

Existence d'une suite de Palais-Smale sur la variété de Nehari $\mathcal{N}_{J_\lambda}$

(v) Comme dans [29], on montre que :

Lemme 4.25. *(Voir [29]) Soit $\lambda \geqslant 0$. Alors,*

(a) *toute suite minimisante $(u_n)_n \subset \mathbb{S}$ de $\alpha(\lambda)$ vérifie*

$$0 < \liminf_{n\to+\infty} t(\lambda, u_n) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} t(\lambda, u_n) < +\infty, \tag{4.81}$$

(b) *il existe une suite minimisante $(u_n)_n \subset \mathbb{S}$ de $\alpha(\lambda)$ et positive telle que $\big(t(\lambda, u_n)u_n\big)_n$ est une suite de Palais-Smale bornée de J_λ.*

On introduit le niveau critique c^* défini par $\inf\limits_{u\in\mathbb{S}} J_0(t(0,u)u)$ et on montre que :

$$c^* \doteq \inf_{u\in\mathbb{S}} J_0(t(0,u)u) = \inf_{u\in\mathbb{S}_0} \widetilde{J}_0(u) = \inf_{u\in\mathbb{S}_1} \widetilde{J}_0(u), \tag{4.82}$$

où

$$\mathbb{S}_0 \doteq \Big\{u \in \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) \setminus \{0\} : \int_\Omega |x|^{\alpha(p-1)}|\nabla u|^p \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|u|^{p^*_\alpha}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\Big\},$$

et

$$\mathbb{S}_1 \doteq \Big\{u \in \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) \setminus \{0\} : \int_\Omega |x|^{\alpha(p-1)}|\nabla u|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega \frac{|u|^{p^*_\alpha}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\Big\}.$$

Existence de solutions

(vi) En appliquant le Théorème 2.81, on montre le lemme suivant :

Lemme 4.26. *(Voir [29]) Soit $p < q < p^*_\alpha$ et $\lambda \geqslant 0$. Supposons que $(u_n)_n$ est une suite de Palais-Smale bornée de J_λ et u est sa limite faible dans $\mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega)$. Alors, il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ telle que*

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \qquad p.p.\ dans\ \Omega.$$

Preuve:
Comme dans l'**Exemple 3** de [26] où le poids $\rho(x) = |x|^{\alpha(p-1)}$, posons

$$\Omega' = \Omega \setminus \{0\}.$$

Ensuite, $(u_n)_n$ est une suite bornée dans $W^{1,p}_{loc}(\Omega')$. Alors, il existe une sous-suite telle que $u_n(x) \to u(x)$ p.p. dans Ω lorsque n tend vers l'infini.
Par hypothèse, $(u_n)_n$ est une suite de Palais-Smale de J_λ c'est-à-dire

$$J'_\lambda(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ dans } \left(\mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega)\right)^*.$$

Considérons l'opérateur $\widehat{a}$ donné par (4.74) et soient $0 < \varepsilon < 1$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ tels que

$$S_\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } |\sigma| \leqslant \varepsilon \\ \varepsilon \operatorname{sign}(\sigma) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $\sigma^k = S_k(\sigma)$, $\forall\, k \geqslant 1$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega')$. Par suite, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega'} a(x)|u_n|^{q-2}u_n \cdot \varphi S_\varepsilon(u_n - u^k)\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon \int_{\Omega'} a(x)|u_n|^{q-1}|\varphi|\mathrm{d}x \\
\leqslant\ & \varepsilon \left(\int_{\Omega'} \left[a(x)|x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^*}}\right]^{\frac{p_\alpha^*}{p_\alpha^*-q}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p_\alpha^*-q}{p_\alpha^*}} \left(\int_{\Omega'} \left[\frac{|u_n|^{q-1}|\varphi|}{|x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^*}}}\right]^{\frac{p_\alpha^*}{q}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p_\alpha^*}} \\
=\ & \varepsilon\, \|a\|_{L^m\left(\Omega', |x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^*-q}}\right)} \left(\int_{\Omega'} \left[\frac{|u_n|^{\frac{q-1}{q}p_\alpha^*}}{|x|^{\frac{\alpha}{q'}}}\right] \left[\frac{|\varphi|^{\frac{p_\alpha^*}{q}}}{|x|^{\frac{\alpha}{q}}}\right] \mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p_\alpha^*}} \\
\leqslant\ & \varepsilon\, \|a\|_{L^m\left(\Omega', |x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^*-q}}\right)} \left(\int_{\Omega'} \frac{|u_n|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q'}\frac{q}{p_\alpha^*}} \left(\int_{\Omega'} \frac{|\varphi|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}\frac{q}{p_\alpha^*}} \\
\leqslant\ & \varepsilon\, C_1 \|u_n\|^{q-1}.
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega'} \frac{|u_n|^{p_\alpha^*-2}u_n}{|x|^\alpha} \cdot \varphi S_\varepsilon(u_n - u^k)\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon \int_{\Omega'} \frac{|u_n|^{p_\alpha^*-1}|\varphi|}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x \\
\leqslant\ & \varepsilon \left(\int_{\Omega'} \left[\frac{|u_n|^{p_\alpha^*-1}}{|x|^{\alpha\frac{p_\alpha^*-1}{p_\alpha^*}}}\right]^{\frac{p_\alpha^*}{p_\alpha^*-1}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p_\alpha^*-1}{p_\alpha^*}} \left(\int_{\Omega'} \left[\frac{|\varphi|}{|x|^{\frac{\alpha}{p_\alpha^*}}}\right]^{p_\alpha^*} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_\alpha^*}} \\
\leqslant\ & \varepsilon \left(\int_{\Omega'} \frac{|u_n|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_\alpha^*-1}{p_\alpha^*}} \left(\int_{\Omega'} \frac{|\varphi|^{p_\alpha^*}}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_\alpha^*}} \\
\leqslant\ & \varepsilon\, C_2 \|u_n\|^{p_\alpha^*-1}.
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, il en découle que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\Omega'} |x|^{\alpha(p-1)}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\Big(\varphi S_\varepsilon\big(u_n - u^k\big)\Big)\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\, C_3.$$

Le Théorème 2.81 achève la démonstration. ■

(vii) D'après le même raisonnement fait dans [29], on montre que :

Lemme 4.27. *(Voir [29]) La fonction α qu'on a déjà définie dans* (4.79), *vérifie :*

(a) $\alpha(0) > 0$.

(b) *Pour tout $\lambda > 0$, on a $\alpha(\lambda) \geqslant 0$.*

Ainsi, on prouve que

Lemme 4.28. *(Voir [29]) Soit $p < q < p_\alpha^*$ et $\lambda \geqslant 0$. Supposons que $(u_n)_n$ est une suite de Palais-Smale de J_λ au niveau c (c'est-à-dire $J_\lambda(u_n) \to c$). Si $c < c^*$, alors il existe une sous-suite qui converge fortement dans $\mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)$.*

(viii) On définit l'ensemble M^* comme suit :

$$M^* \doteq \Big\{u \in \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \int_\Omega a(x)|u|^q \mathrm{d}x > 0 \text{ et } \widetilde{J}_0(u) = c^*\Big\}.$$

D'après le Lemme 4.27, on a $c^* \doteq \alpha(0) > 0$, alors l'ensemble M^* est non vide. On considère la valeur λ^* telle que

$$\lambda^* = \inf\big\{\lambda_{\min}(u) : u \in M^*\big\}.$$

Lemme 4.29. *(Voir [29]) Si $\lambda > \lambda^* \geqslant 0$, alors $\alpha(\lambda) < c^*$.*

D'après ce dernier lemme, on énonce le résultat principal qui se démontre de la même façon de [29] :

Théorème 4.30. *Pour tout $\lambda > \lambda^*$, il existe une solution positive du problème de valeurs propres* (4.77)*.*

(ix) D'après ce qui précède, on déduit qu'il existe $\lambda^* > 0$ tel que $\forall\ \lambda > \lambda^*$, il existe une fonction $u \geqslant 0,\ u \not\equiv 0,\ u \in \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)$ solution du problème

$$-\mathrm{div}\Big(|x|^{\alpha(p-1)}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big) = \lambda a(x)u^{q-1} + \frac{u^{p_\alpha^*-1}}{|x|^\alpha} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

■

4.7 Exposant critique avec un poids de type Hardy (Cas non-différentiable)

Plus généralement, dans ce paragraphe, on remplace la fonction j_0 du Théorème 4.19 par une fonction j_a non-différentiable et on prouve l'existence d'une solution positive pour le problème (4.83) dans un domaine non borné.

Théorème 4.31. *(Voir [16]) Soient q_1 et q_2 deux nombres réels tels que $1 < q_1 < q_2 < p$ et $a \in L_+^{m_i}\Big(\Omega, |x|^{\frac{\alpha q_i}{p_\alpha^*-q_i}}\Big)$, où $m_i = \dfrac{p_\alpha^*}{p_\alpha^* - q_i}$, pour $i = 1, 2$. Alors, il existe $\lambda^* > 0$ tel que $\forall\ \lambda \in]0, \lambda^*[$, il existe $u \geqslant 0,\ u \not\equiv 0,\ u \in \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)$ solution du problème suivant :*

$$-\mathrm{div}\Big(|x|^{\alpha(p-1)}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big) - \frac{u^{p_\alpha^*-1}}{|x|^\alpha} \in \lambda \partial j_a(u), \tag{4.83}$$

où la fonction j_a est définie par

$$j_a(u) = \int_{\{|u| \leqslant 1\}} a(x)|u(x)|^{q_1}\mathrm{d}x + \int_{\{|u|>1\}} a(x)|u(x)|^{q_2}\mathrm{d}x. \tag{4.84}$$

Preuve:
Vérifions les hypothèses du Théorème 4.8, en suivant textuellement les mêmes étapes de la preuve du Théorème 4.19, avec quelques petites modifications :
On définit les fonctions $J(u)$ et $j(u) = j_1(u) + \lambda j_a(u)$ telle que J et j_1 sont données dans le Théorème 4.19.

(i) On a $\langle \partial j_a(u), u\rangle \geqslant 0$, alors identiquement à (4.71), on déduit que

$$\langle \partial j(u), u\rangle \geqslant p_\alpha^*\, j_1(u).$$

En plus, la fonction $j_a : \big(\mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega),\ \text{Topologie faible}\big) \longrightarrow \mathbb{R}$ est faiblement continue. Par suite, on choisit la même constante $\beta > 0$ prise dans la preuve du Théorème 4.19 et l'hypothèse **(H2')** sera vérifiée.

(ii) Sous les hypothèses du Théorème 4.31, il existe $\eta > 0$ telle que

$$\eta_1 = \eta^{p-q_2} - c_N^{p_\alpha^*}\eta^{p_\alpha^*-q_2} > 0,$$

où c_N est la constante de Sobolev donnée dans le Lemme 4.18.
Soit $\lambda^* > 0$ telle que

$$\lambda^* \sup_{\|v\|=\eta} j_a(v) < \eta_1 \frac{\eta^{q_2}}{p_\alpha^*}.$$

Par conséquent, comme dans la preuve du Théorème 4.19, l'hypothèse **(H3')** est vérifiée.

(iii) D'après la condition d'intégrabilité sur la fonction a, l'opérateur

$$u \in \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) \mapsto \partial j(u)$$

est borné, alors le Théorème 2.81 peut-être appliqué, pour obtenir **(H1')**.

Ce qui achève la démonstration. ■

⁂ – ⁂ – ⁂ – ⁂ – ⁂ – ⁂ – ⁂

Chapitre 5

Cas de Résonance

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'existence de solutions pour un problème de minimisation avec des contraintes, afin d'exploiter le théorème de Multiplicateur de Lagrange généralisé pour montrer l'existence pour des problèmes plus généraux. Nous traiterons également un autre problème dans un cas de résonance au voisinage de l'origine (le potentiel possède la même croissance que celle de l'opérateur au voisinage de zéro).

5.1 Fonction distance

Dans cette section, on définit la fonction distance d_C par rapport à un certain ensemble non vide C. Notons que d_C n'est pas différentiable au sens classique ; Cependant, elle est globalement Lipschitzienne. Par conséquent, on peut calculer sa dérivée directionnelle généralisée au sens de la Définition 2.56. Cette dernière nous permettra de définir la notion de cônes tangents et cônes normaux pour un ensemble arbitraire C (n'est pas nécessairement fermé).

Soit C un ensemble non vide de X. On considère la fonction distance $d_C : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$d_C(u) = \inf \Big\{ \|u - c\| : c \in C \Big\}.$$

Si C est fermé, alors $u \in C \iff d_C(u) = 0$.

Proposition 5.1. *(Voir [18, page 50]) La fonction distance d_C est une fonction globalement Lipschitzienne sur X :*

$$|d_C(u) - d_C(v)| \leqslant \|u - v\|_X.$$

C'est une conséquence de l'inégalité triangulaire et de la définition.

Définition 5.2. *(Voir [18, page 51]) Soit $c \in C$. Un vecteur $v \in X$ est dit tangent à C au point c si la dérivée directionnelle généralisée de la fonction distance d_C au* *point c vérifie $d_C^0(c;v) = 0$. L'ensemble de tous les vecteurs $v \in X$ tangents à C au point c est noté $T_C(c)$ c'est-à-dire*

$$T_C(c) = \Big\{ v \in X : d_C^0(c;v) = 0 \Big\}.$$

D'après la Proposition 2.58, $T_C(c)$ est un cône convexe fermé dans X, en particulier $0 \in T_C(c)$.

Définition 5.3. *(Voir [18, page 51]) Soit $c \in C$. On définit le cône normal à C au point c par*

$$N_C(c) = \Big\{ \xi^* \in X^* : \langle \xi^*; v \rangle \leqslant 0, \quad \forall\, v \in T_C(c) \Big\}.$$

Exemple 5.4. *On donne six exemples de cônes tangents et normaux dans la figure 5.1 :*

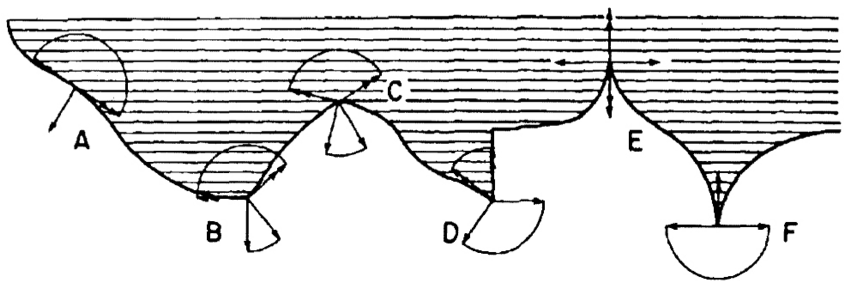


FIGURE 5.1 – Flèches doubles : Cône tangent & Flèches simples : Cône normal.

5.2 Multiplicateur de Lagrange généralisé

En utilisant le principe ε-variationnel d'Ekeland (voir Lemme 4.5), F.H. Clarke a étendu dans [19], le théorème de Multiplicateur de Lagrange pour des fonctions localement Lipschitziennes (voir aussi [18, Chapitre 6]). L'idée générale de ce théorème est de minimiser une fonction (non différentiable) donnée f sur un espace de Banach X sous les trois types de contraintes suivantes :

(i) Contraintes des inégalités : $g_i(x) \leqslant 0$, pour $i = 1, \ldots, n$ où $g_i : X \to \mathbb{R}$ sont n fonctions réelles.

(ii) Contraintes des égalités : $h_j(x) = 0$, pour $j = 1, \ldots, m$ où $h_j : X \to \mathbb{R}$ sont m fonctions réelles.

(iii) Contraintes abstraites : $x \in C$ où $C \subset X$ est un sous-ensemble donné de X.

Remarque 5.5. *On remarque que les contraintes de types **(i)** et **(ii)** peuvent être toujours écrites comme une contrainte de type **(iii)** avec un ensemble C bien convenable, mais le but c'est d'exploiter l'effet explicite de **(i)** et **(ii)**.*

On énonce ce résultat dans le théorème suivant :

Théorème 5.6. *(Voir [18, page 228]) Soit X un espace de Banach. On suppose que les fonctions $f : X \to \mathbb{R}$, $g_i : X \to \mathbb{R}$ et $h_j : X \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$ sont toutes localement Lipschitziennes au voisinage de tout point de C où C est un sous-ensemble fermé de X.*
On considère le problème de minimisation suivant :

$$(P)\begin{cases} \textit{Trouver } \min\{f(x)\} & \textit{tel que} \\ g_i(x) \leqslant 0, & \textit{pour } i = 1, \dots, n, \\ h_j(x) = 0, & \textit{pour } j = 1, \dots, m, \\ x \in C. \end{cases}$$

Pour tout y une solution du problème (P), il existe t, r_i et s_j pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$ non tous nuls et $\xi^* \in X^*$ tels que

(a) $t \geqslant 0$ *et* $r_i \geqslant 0$.

(b) $r_i \, g_i(y) = 0$.

(c) $\xi^* \in t\, \partial f(y) + \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \, \partial g_i(y) + \sum\limits_{j=1}^{m} s_j \, \partial h_j(y)$.

(d) $-\xi^* \in N_C(y)$ *(voir Définition 5.3).*

Pour la preuve du Théorème 5.6 voir [19] et [18, Chapitre 6].

Remarque 5.7. **(i)** *Les deux entiers n et m doivent être supérieurs ou égales à 1, mais dans le cas où la contrainte de type **(i)** (ou **(ii)**) n'apparaît pas, on peut supposer que $n = 0$ (ou $m = 0$).*

(ii) ***(b)*** *est équivalent à dire que $r_i = 0$ lorsque $g_i(y) < 0$.*

(iii) *Plus précisément, $-\xi^* \in \partial d_C(y)$ dans **(d)** où $d_C : X \to \mathbb{R}$ désigne la fonction distance définie par (voir le paragraphe 5.1) :*

$$d_C(u) = \inf \Big\{ \|u - c\| : c \in C \Big\}.$$

En particulier, si $C = X$, alors la fonction distance d_C est identiquement nulle.

(iv) *La conclusion du Théorème 5.6 reste vraie si on remplace l'ensemble C par $C \cap \{\overline{B}(y, \varepsilon)\}$, $\forall \varepsilon > 0$.*

Corollaire 5.8. *Sous les hypothèses du Théorème 5.6, si $y \in \overset{\circ}{int}\{C\}$, alors $\xi^* = 0$*

Preuve du Corollaire 5.8 :
Si $y \in \overset{\circ}{int}\{C\}$, alors d'après la définition du cône $N_C(y)$ normal à C au point y, on déduit que

$$N_C(y) = \{0\}.$$

■

5.3 Problème de minimisation avec des contraintes

Dans cette section, on montre pour tout $\gamma > 0$ un réel positif l'existence d'une fonction u_γ qui résout le problème de minimisation avec la contrainte suivante :

$$\inf \Big\{ J(u) : u \in \mathbf{V}_0 \text{ et } j(u) = \gamma \Big\}. \tag{5.1}$$

De plus, en utilisant le théorème de Multiplicateur de Lagrange généralisé de Clarke (c'est-à-dire la version des fonctions non différentiables), on montre que u_γ est une solution faible d'un certain problème de valeur propre. Plus précisément, il existe $\lambda_\gamma > 0$ tel que

$$0 \in \partial J(u_\gamma) - \lambda_\gamma \partial j(u_\gamma).$$

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, à bord $\partial\Omega$ Lipschitzien.

Soit $\varphi_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, N$ une fonction borélienne telle que φ_i vérifie les conditions **(C1)**, **(C2)**, **(C3)** et **(C4)** de la Section 3.3. On définit la $\mathcal{N}$-fonction Φ_i par :

$$\Phi_i(x,t) = \int_0^{|t|} \varphi_i(x,s)\, ds, \quad \forall\, x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

On considère la fonctionnelle J sur l'espace $\mathbf{V}_0 = W_0^{1,\rho_1,\ldots,\rho_N}(\Omega, \mu_1, \ldots, \mu_N)$ (voir la page 56) par :

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i.$$

Sous ces hypothèses, on montre le théorème suivant :

Théorème 5.9. *(Voir [17]) Soient X un espace de Banach, J la fonction définie ci-dessus et $j : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, paire telle que $j(0) = 0$. On suppose qu'on a une des deux conditions suivantes :*

(A1) *la fonction j est continue et l'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X$ est compacte.*

ou

(A2) *la fonction j est faiblement continue et l'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow X$ est seulement continue.*

Alors, il existe $u_\gamma \in \mathbf{V}_0$, $u_\gamma \geqslant 0$, $u_\gamma \not\equiv 0$ et $\lambda_\gamma > 0$ tels que

$$0 \in \partial J(u_\gamma) - \lambda_\gamma \partial j(u_\gamma). \tag{5.2}$$

Corollaire 5.10. *Si la mesure μ_i est la mesure de Lebesgue pour $i = 1, \ldots, N$ et si les fonctions φ_i et Φ_i ne dépendent pas de $x \in \Omega$, c'est-à-dire si $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Phi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et sous les hypothèses du Théorème 5.9, on considère $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $j(v) = \displaystyle\int_\Omega \Phi_{i_0}(v(x))\, \mathrm{d}x$ et $X = L^{\Phi_{i_0}}(\Omega)$, alors il existe $\lambda_{min} > 0$ telle que si $\lambda < \lambda_{min}$, alors il n'y a pas de solutions non triviales pour le problème*

$$0 \in \partial J(u) - \lambda \partial j(u). \tag{5.3}$$

Remarque 5.11. *Si l'opérateur $A : u \mapsto \partial J(u)$ est homogène, comme par exemple dans le cas du p-Laplacien, on montre que la valeur propre λ_γ trouvée ci-dessus est exactement la première. Mais ce n'est pas le cas ici.*

Avant de démontrer le Théorème 5.9, on a besoin du lemme suivant qui donne une relation entre l'intégrale (fonction modulaire) $\displaystyle\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i$ et la norme $\left\|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}$ dans un espace d'Orlicz :

Lemme 5.12. *(Voir [60]) Soit $u \in \mathbf{V}_0$. Sous les hypothèses du Théorème 5.9, on a*

(a) *Si $\left\|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i} \geqslant 1$, alors*

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}^{\underline{\alpha}} \leqslant \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i \leqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}^{\overline{\alpha}}. \tag{5.4}$$

(b) *Si $\left\|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i} < 1$, alors*

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}^{\overline{\alpha}} \leqslant \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i \leqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}^{\underline{\alpha}}, \tag{5.5}$$

*où $\underline{\alpha}$ et $\overline{\alpha}$ sont les constantes données dans l'hypothèse **(C4)**.*

Preuve:
D'après **(ii)** de la Remarque 3.20, on rappelle qu'on a pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$, pour tout $t > 0$ et tout $\sigma > 1$:

$$\sigma^{\underline{\alpha}}\, \Phi_i(x,t) \leqslant \Phi_i(x, \sigma t) \leqslant \sigma^{\overline{\alpha}}\, \Phi_i(x,t). \tag{5.6}$$

$\boxed{\text{Si } \left\|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i} \geqslant 1 :}$

(i) Commençons par montrer la deuxième inégalité de (5.4) :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i &= \int_\Omega \Phi_i\left(x, \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i} \cdot \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}}\right) d\mu_i && (5.7)\\
&\leqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}^{\overline{\alpha}} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}}\right) d\mu_i && (5.8)\\
&\leqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}^{\overline{\alpha}}. && (5.9)
\end{aligned}$$

On a (5.8) d'après (5.6), et on a (5.9) d'après la Proposition 2.31.

(ii) Pour la première inégalité, soit $1 < \beta < \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}$. D'après la définition de la norme $\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}$ et ayant $\beta < \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}$, on a alors

$$\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\beta}\right)\, d\mu_i > 1.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i &= \int_\Omega \Phi_i\left(x, \beta \cdot \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\beta}\right)\, d\mu_i && (5.10)\\
&\geqslant \beta^{\underline{\alpha}} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\beta}\right)\, d\mu_i && (5.11)\\
&\geqslant \beta^{\underline{\alpha}}. && (5.12)
\end{aligned}$$

Si on fait tendre $\beta \nearrow \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}$, on déduit que

$$\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i \geqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}^{\underline{\alpha}}. \tag{5.13}$$

$\boxed{\text{Si } \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i} < 1 :}$

Si $0 < \xi < 1$, alors $\frac{1}{\xi} > 1$, par suite, l'équation (5.6) s'écrit : pour μ_i-presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $t > 0$:

$$\xi^{\overline{\alpha}}\, \Phi_i(x, \frac{t}{\xi}) \leqslant \Phi_i(x,t) \leqslant \xi^{\underline{\alpha}}\, \Phi_i(x, \frac{t}{\xi}). \tag{5.14}$$

(iii) De même, commençons par la deuxième inégalité de (5.5) :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i &= \int_\Omega \Phi_i\left(x, \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i} \cdot \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}}\right)\, d\mu_i && (5.15)\\
&\leqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}^{\underline{\alpha}} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}}\right)\, d\mu_i && (5.16)\\
&\leqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\Phi_i}^{\underline{\alpha}}. && (5.17)
\end{aligned}$$

On a (5.16) d'après (5.14) et on a (5.17) d'après la Proposition 2.31.

(iv) Pour la première inégalité, soit $0 < \beta < \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\Phi_i}$. D'après (5.14), on a

$$\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i \geqslant \beta^{\overline{\alpha}} \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\beta}\right)\, d\mu_i. \tag{5.18}$$

Etant donné que $0 < \beta < \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\Phi_i}$, alors on a $\left\| \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\beta} \right\|_{\Phi_i} > 1$. Ensuite, la relation (5.13) appliquée à $\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\beta}$ nous donne

$$\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\beta}\right)\, d\mu_i \geqslant \left\| \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\beta} \right\|_{\Phi_i}^{\alpha} > 1. \tag{5.19}$$

Les relations (5.18) et (5.19) impliquent

$$\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i \geqslant \beta^{\overline{\alpha}}. \tag{5.20}$$

Si on fait tendre $\beta \nearrow \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\Phi_i}$, on déduit

$$\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\, d\mu_i \geqslant \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\Phi_i}^{\overline{\alpha}}. \tag{5.21}$$

■

D'après le Lemme 5.12, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 5.13. *(Voir [17]) Soit $u \in \mathbf{V}_0$. Sous les hypothèses du Théorème 5.9, on a*

(a) *Si $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\Phi_i} \geqslant 1$, alors*

$$\frac{1}{N^{\underline{\alpha}}} \cdot \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{\underline{\alpha}} \leqslant J(u) \leqslant N \cdot \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{\overline{\alpha}}. \tag{5.22}$$

(b) *Si $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\Phi_i} < 1$, alors*

$$\frac{1}{N^{\overline{\alpha}}} \cdot \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{\overline{\alpha}} \leqslant J(u) \leqslant N \cdot \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{\underline{\alpha}}. \tag{5.23}$$

PREUVE DU THÉORÈME 5.9.
Soit $\gamma > 0$ un réel donné. Montrons tout d'abord, qu'il existe $u_\gamma \in \mathbf{V}_0$, $u_\gamma \geqslant 0$ et $u_\gamma \not\equiv 0$ telle que

$$J(u_\gamma) = \inf\Big\{J(v) : j(v) = \gamma\Big\} \geqslant 0.$$

On note le réel m et l'ensemble S comme suit :

$$m \doteq \inf\Big\{J(v) : j(v) = \gamma\Big\} \quad \text{et} \quad S \doteq \Big\{u \in \mathbf{V}_0 : j(u) = \gamma\Big\}.$$

On cherche à ce que la valeur m soit atteinte par un élément $u_\gamma \in S \subset \mathbf{V}_0$.
Pour cela, on considère une suite minimisante (v_n) dans S telle que

$$J(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} m. \tag{5.24}$$

Alors, d'après (5.24) et le Corollaire 5.13, la suite $(v_n) \subset S$ est bornée dans l'espace $\mathbf{V}_0$ qui est réflexif. Par la suite, on peut extraire une sous-suite (v_n) telle que $v_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $\mathbf{V}_0$.

D'après les hypothèses **(C1)-(C4)**, la fonctionnelle $J : \mathbf{V}_0 \to \mathbb{R}$ est convexe et continue. En outre, d'après la Proposition A.2, il découle que J est semi-continue inférieurement pour la topologie faible. Par conséquent,

$$J(u) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} J(v_n) = m. \tag{5.25}$$

Supposons **(A1)** :

L'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X$ est compacte, alors on peut extraire une sous-suite (v_n) telle que $v_n \to u$ converge fortement dans X. En plus, $j : X \to \mathbb{R}$ est continue. Il s'ensuit avec ce qui précède que $j(v_n) = \gamma \xrightarrow[n\to+\infty]{} j(u) = \gamma$. Par suite, $u \in S$. Or, par la définition de m, on a $m \leqslant J(u)$. Donc d'après (5.25), on déduit que

$$J(u) = m. \tag{5.26}$$

Supposons **(A2)** :

La fonction $j : X \to \mathbb{R}$ est faiblement continue et l'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow X$ est continue. Comme $v_n \rightharpoonup u$ converge faiblement dans $\mathbf{V}_0$, alors $j(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} j(u)$. Par suite, $u \in S$. Donc on retrouve (5.26).

Par hypothèse, la fonction j est paire, alors on peut choisir notre solution $u_\gamma = |u| \geqslant 0$ (c'est-à-dire de sorte qu'elle soit positive).

En appliquant le Théorème 5.6, on déduit qu'il existe deux réels $(t, s) \neq (0, 0)$ tels que $t \geqslant 0$ et

$$0 \in t\, \partial J(u_\gamma) + s\, \partial j(u_\gamma). \tag{5.27}$$

On a $t \neq 0$. En effet, si $t = 0$, alors on a

$$0 \in s\,\partial j(u_\gamma) \text{ et } s \neq 0.$$

Par suite,

$$0 \in \partial j(u_\gamma). \tag{5.28}$$

Ce qui est impossible car $\langle \partial j(u_\gamma); u_\gamma \rangle \geqslant \gamma > 0$ (voir la définition de $\partial j(u_\gamma)$).
Par conséquent, on a $t > 0$ et

$$0 \in \partial J(u_\gamma) - \lambda_\gamma\, \partial j(u_\gamma) \text{ où } \lambda_\gamma = -\frac{s}{t}. \tag{5.29}$$

Alors, il existe $w_J^* \in \partial J(u_\gamma)$ et $w_j^* \in \partial j(u_\gamma)$ tels que

$$w_J^* = \lambda_\gamma\, w_j^*. \tag{5.30}$$

On applique (5.30) à $u_\gamma \in S \subset \mathbf{V}_0$, on obtient

$$\lambda_\gamma = \frac{\langle w_J^*; u_\gamma \rangle}{\left\langle w_j^*; u_\gamma \right\rangle} > 0. \tag{5.31}$$

En effet, d'un côté, on a déjà vu que $\left\langle w_j^*; u_\gamma \right\rangle \geqslant \gamma > 0$.
De l'autre côté, il existe $w_i^*(x) \in \partial \Phi_i \left(x, \dfrac{\partial u_\gamma}{\partial x_i}(x) \right)$ μ_i-p.p. $x \in \Omega$, pour $i = 1, \ldots, N$ (voir Lemme 3.15) telle que

$$\begin{aligned} \langle w_J^*; u_\gamma \rangle &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega w_i^*(x) \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i}(x)\, d\mu_i \\ &\geqslant \underline{\alpha} \sum_{i=1}^N \int_\Omega \Phi_i \left(x, \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i}(x) \right) d\mu_i \\ &\geqslant \underline{\alpha}\; J(u_\gamma) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Si $\lambda_\gamma = 0$, alors $J(u_\gamma) = 0$. D'après le Corollaire 5.13 et ce qui précède, on déduit que $\|u_\gamma\|_{\mathbf{V}_0} = 0$. Ce qui est contradictoire car $u_\gamma \in S$. Ce qui implique

$$\lambda_\gamma > 0.$$

■

Preuve du Corollaire 5.10.
D'après (5.31), il existe $w_i^*(x) \in \partial \Phi_i \left(\dfrac{\partial u_\gamma}{\partial x_i}(x) \right)$ p.p., pour $i = 1, \ldots, N$ et $w_j^*(x) \in$

$\partial\Phi_{i_0}(u_\gamma(x))$ p.p. tels que

$$\begin{aligned}
\lambda_\gamma &= \frac{\langle w_J^*; u_\gamma\rangle}{\langle w_j^*; u_\gamma\rangle} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega w_i^*(x)\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_\Omega w_j^*(x)u_\gamma(x)\,\mathrm{d}x} \\
&\geqslant \frac{\underline{\alpha}\displaystyle\sum_{i=1}^N \int_\Omega \Phi_i\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_i}(x)\right)\,\mathrm{d}x}{\overline{\alpha}\displaystyle\int_\Omega \Phi_{i_0}(u_\gamma(x))\,\mathrm{d}x} \\
&\geqslant \frac{\underline{\alpha}\displaystyle\int_\Omega \Phi_{i_0}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_{i_0}}(x)\right)\,\mathrm{d}x}{\overline{\alpha}\displaystyle\int_\Omega \Phi_{i_0}(u_\gamma(x))\,\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de type Poincaré pour les $\mathcal{N}$-fonctions (voir [38, Lemme 2.], [37] et [34]), on a

$$\int_\Omega \Phi_{i_0}(u_\gamma(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega \Phi_{i_0}\left(2d\,\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_{i_0}}(x)\right)\,\mathrm{d}x, \tag{5.32}$$

où d est le diamètre du domaine Ω. On déduit alors que

$$\lambda_\gamma \geqslant \frac{\underline{\alpha}\displaystyle\int_\Omega \Phi_{i_0}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_{i_0}}(x)\right)\,\mathrm{d}x}{\overline{\alpha}\displaystyle\int_\Omega \Phi_{i_0}\left(2d\,\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_{i_0}}(x)\right)\,\mathrm{d}x}. \tag{5.33}$$

Par conséquent,

(a) si $2d \leqslant 1$ (c'est-à-dire lorsque le domaine Ω admet un petit diamètre), alors $\lambda_\gamma \geqslant \dfrac{\underline{\alpha}}{\overline{\alpha}}$,

(b) si $2d > 1$, alors en utilisant (3.35), on a $\lambda_\gamma \geqslant \dfrac{\underline{\alpha}}{\overline{\alpha}\cdot(2d)^{\overline{\alpha}}}$.

Par suite, puisque la borne inférieure obtenue est minorée, on considère

$$\varLambda \doteq \Big\{\lambda > 0 :\ \exists\, u_\lambda \in \mathbf{V}_0,\ u_\lambda \not\equiv 0 \text{ et } 0 \in \partial J(u_\lambda) - \lambda\partial j(u_\lambda)\Big\}, \tag{5.34}$$

et

$$\lambda_{min} \doteq \inf \varLambda. \tag{5.35}$$

D'après ce choix de λ_{min}, on déduit que pour $\lambda < \lambda_{min}$, le problème (5.3) n'a pas de solutions non triviales.

5.3.1 Exemple d'application cas (A1)

Soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$, N nombres réels positifs, $q_i : \Omega \to \mathbb{R}$ et $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$, pour $i = 1, \ldots, N$, $2N$ fonctions mesurables et bornées sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. On note (de même pour q_i) :

$$\begin{aligned} p_{i+} &\doteq \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} p_i(x), \\ p_{i-} &\doteq \inf_{x\in\Omega} \operatorname{ess} p_i(x), \\ p_+^+ &\doteq \max\left\{p_{1+}, \ldots, p_{N+}\right\}, \\ p_-^- &\doteq \min\left\{p_{1-}, \ldots, p_{N-}\right\}, \\ p_-^+ &\doteq \max\left\{p_{1-}, \ldots, p_{N-}\right\}. \end{aligned}$$

On suppose que

$$2 \leqslant q_{i-} \leqslant q_i(x) \leqslant q_{i+} < p_{i-} \leqslant p_i(x) \leqslant p_{i+} < +\infty.$$

De plus, on suppose que

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_{i-}} > 1 \text{ et on définit } p_-^* \doteq \frac{N}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_{i-}} - 1}. \tag{5.36}$$

On définit la fonctionnelle $J : W_0^{1,p_1(\cdot),\ldots,p_N(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$J(v) \doteq \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leqslant \delta_i\right\}} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{q_i(x)} \frac{\alpha_i(x)\mathrm{d}x}{p_i(x)} + \int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| > \delta_i\right\}} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i(x)} \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} \right),$$

où $\alpha_i(x) = (\delta_i)^{p_i(x) - q_i(x)}$.

Soient $\delta_M > 0$ un réel positif, $q_M(x)$ et $p_M(x)$ deux fonctions mesurables et bornées sur Ω telles que

$$2 < \inf_{\Omega} \operatorname{ess} q_M(x) \leqslant \sup_{\Omega} \operatorname{ess} q_M(x) < \inf_{\Omega} \operatorname{ess} p_M(x).$$

On définit la fonction $j : L^{p_M(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$j(v) = \int_{\Omega} \Phi_M\big(x, v(x)\big) \frac{\mathrm{d}x}{p_M(x)},$$

telle que

$$\Phi_M\big(x, u(x)\big) = \begin{cases} |u(x)|^{p_M(x)} & \text{si } \ |u(x)| > \delta_M, \\ \alpha_M(x)|u(x)|^{q_M(x)} & \text{si } \ |u(x)| \leqslant \delta_M, \end{cases} \text{ où } \alpha_M(x) = (\delta_M)^{(p_M - q_M)(x)}.$$

On suppose que

$$p_M(x) < \max\left\{p_-^+, p_-^*\right\} \text{ p.p.} \tag{5.37}$$

Sous les hypothèses ci-dessus, on montre le théorème suivant :

Théorème 5.14. *Il existe* $u_1 \in W_0^{1,p_1(\cdot),\ldots,p_N(\cdot)}(\Omega)$*,* $u_1 \geqslant 0$*, non triviale et* $\lambda_1 > 0$ *tels que*

$$0 \in \partial J(u_1) - \lambda_1 \partial j(u_1).$$

Preuve:
On vérifie les hypothèses du Théorème 5.9 :

(i) Nous avons déjà vu, dans la section 4.1, que les hypothèses **(C1)-(C4)** sont vérifiées.

(ii) La fonction $j : L^{p_M(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, convexe, paire et $j(0) = 0$.

(iii) D'après (5.36) et (5.37), l'injection $W_0^{1,p_1(\cdot),\ldots,p_N(\cdot)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_M(\cdot)}(\Omega)$ est compacte (voir [57]).

Le Théorème 5.9 achève la démonstration. ■

5.3.2 Exemple d'application cas (A2)

Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$, $\alpha \in [0,1]$, $p \geqslant 1$ et

$$p_\alpha^* \doteq \frac{(N-\alpha)p}{(N-\alpha)-(1-\alpha)p} \quad \text{tels que} \quad (N-\alpha) > (1-\alpha)p.$$

Considérons la fonction poids $a \in L_+^m\left(\Omega, |x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^* - q}}\right)$, où $m = \dfrac{p_\alpha^*}{p_\alpha^* - q}$ et les deux fonctions $J : \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $j : L^{p_\alpha^*}(\Omega, |x|^{-\alpha}) \to \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p |x|^{\alpha(p-1)} \mathrm{d}x, \\ j(u) &= \frac{1}{q}\int_\Omega a(x)|u(x)|^q \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \partial J(u) &= \Big\{ -\operatorname{div}\Big(|x|^{\alpha(p-1)}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\Big)\Big\}, \\ \partial j(u) &= \Big\{ a(x)|u|^{q-2}u \Big\}. \end{aligned}$$

Sous les notations déjà introduites, on a le théorème suivant :

Théorème 5.15. *Il existe* $u_1 \in \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)$*,* $u_1 \geqslant 0$ *non triviale et* $\lambda_1 > 0$ *tels que*

$$-\operatorname{div}\Big(|x|^{\alpha(p-1)}|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\Big) = \lambda_1\, a(x) u_1^{q-1}.$$

Preuve:
On vérifie les hypothèses du Théorème 5.9 :

(i) La fonction $j : \mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une fonction faiblement continue, convexe, paire et $j(0) = 0$.

(ii) $J(u) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p |x|^{\alpha(p-1)} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{p}\|u\|^p$.

(iii) D'après le Lemme 4.18, l'injection $\mathcal{D}^{1,p}_{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*_\alpha}(\Omega, |x|^{-\alpha})$ est continue.

Pour finir, on applique le Théorème 5.9. ■

5.4 Problème de résonance au voisinage de l'origine

Dans la présente section, nous traitons l'existence de solution d'un problème de valeurs propres associé à un opérateur $\overrightarrow{p}$-multivoque, dans ce problème la fonction g (non différentiable au sens classique) vérifie une condition de résonance au voisinage de l'origine c'est-à-dire le potentiel possède la même croissance que celle de l'opérateur au voisinage de zéro (voir **(j4)** ci-dessous). La méthode variationnelle utilisée est le "Mountain Pass" pour les fonctions non différentiables.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, à bord $\partial\Omega$ Lipschitzien.
On considère $\varphi_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, N$ et $\varphi_M : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes qui vérifient les hypothèses **(C1)**, **(C2)** et **(C3)** de la Section 3.3.

On définit la $\mathcal{N}$-fonction suivante :

$$\Phi_i(x,t) = \int_0^{|t|} \varphi_i(x,s)\, ds, \quad \forall\, x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R} \text{ pour } i = 1, \ldots, N \text{ et } M.$$

On suppose que Φ_i vérifie la condition **(C4)** c'est-à-dire :
Il existe quatre nombres réels : $\underline{\alpha} > 1$, $\overline{\alpha} > 1$, $\underline{\beta} > 1$ et $\overline{\beta} > 1$ tels que pour presque tout $x \in \Omega$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ et $\forall\, w_i^*(x,t) \in \partial\Phi_i(x,t)$, on a

$$\underline{\alpha}\ \Phi_i(x,t) \leqslant t\, w_i^*(x,t) \leqslant \overline{\alpha}\ \Phi_i(x,t), \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant N.$$

et $\forall\, w_M^*(x,t) \in \partial\Phi_M(x,t)$, on a

$$\underline{\beta}\ \Phi_M(x,t) \leqslant t\, w_M^*(x,t) \leqslant \overline{\beta}\ \Phi_M(x,t).$$

On considère $\mathbf{V}_0$ l'espace de Sobolev anisotrope suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &\doteq W_0^{1,\Phi_1,\ldots,\Phi_N}(\Omega) \\ &= \left\{ v \in W_0^{1,1}(\Omega) : \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right) \mathrm{d}x \right) < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

On munit cet espace de la norme suivante :

$$\|v\|_{\mathbf{V}_0} = \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{\Phi_i}.$$

On définit la fonctionnelle $J : \mathbf{V}_0 \to \mathbb{R}$ par

$$J(v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i \left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right) \mathrm{d}x.$$

Théorème 5.16. *(Voir [17]) Soit $j : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie les hypothèses suivantes*

(j1) *$x \mapsto j(x,\xi)$ est une fonction mesurable pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.*

$\xi \mapsto j(x,\xi)$ est une fonction localement Lipschitzienne pour presque tout $x \in \Omega$.

(j2) *Il existe une constante $a_1 > 0$ telle que*

$$|j(x,\xi)| \leqslant a_1 \Big(|\xi| + \Phi_M(x,\xi) \Big), \qquad p.p.\ x \in \Omega \text{ et pour tout } \xi \in \mathbb{R}.$$

(j3) *Il existe $M > 0$, $\beta > 0$ et $k_1 > 0$ tels que*

$$k_1 |\xi|^\beta \leqslant j(x,\xi), \qquad \forall\ |\xi| \geqslant M.$$

(j4) *Il existe une constante $0 < c^* < \dfrac{1}{N^{\overline{\alpha}} \cdot (S_2)^{\overline{\alpha}}}$ telle que*

$$j(x,\xi) \leqslant c^* |\xi|^{\overline{\alpha}}, \qquad \text{dans un petit voisinage de } \xi = 0,$$

où $S_2 > 0$ est la constante de Sobolev de l'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow L^{\overline{\alpha}}(\Omega)$.

(j5) *On a les conditions de croissance suivantes :*

(1) $\exists\, c_0 \geqslant 0$:

$$\beta g(u) \leqslant \inf_{v^* \in \partial g(u)} \langle v^*; u \rangle + c_0 \beta, \quad \forall\, u \in L^{\Phi_M}(\Omega),$$

où $g(u) = \displaystyle\int_\Omega j(x,u(x)) \mathrm{d}x$.

(2) *Il existe deux constantes $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$:*

$$\frac{1}{\beta} \sup_{w^* \in \partial J(u)} \langle w^*; u \rangle - c_2 + c_1 \|u\|_V \leqslant J(u), \quad \forall\, u \in \mathbf{V}_0.$$

On suppose de plus que l'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\Phi_M}(\Omega)$ est compacte.

Si $\overline{\alpha} < \beta < \underline{\beta}$, alors sous les hypothèses et les notations déjà introduites, il existe une fonction $u \in \mathbf{V}_0$ non triviale telle que

$$0 \in \partial J(u) - \partial g(u).$$

La preuve de ce théorème se fait sur plusieurs lemmes :

Lemme 5.17. *(Voir [17]) Sous les hypothèses* ***(j1)***, ***(j2)*** *et* ***(j4)*** *il existe $\eta > 0$ et $\alpha > 0$ telle que*

$$\Phi(u) \doteq J(u) - g(u) \geqslant \alpha \text{ pour tout } u \in \mathbf{V}_0 \text{ et } \|u\|_{\mathbf{V}_0} = \eta.$$

Preuve:
D'après **(j4)**, il existe $0 < \delta << 1$ tel que

$$j(x,\xi) \leqslant c^*|\xi|^{\overline{\alpha}}, \qquad \text{pour tout } |\xi| \leqslant \delta. \tag{5.38}$$

Et d'après **(j2)**, on a pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $|\xi| > \delta$ et $\forall\, w_M^*(x,\xi) \in \partial\Phi_M(x,\xi)$:

$$\begin{aligned}
|j(x,\xi)| &\leqslant a_1\Big(|\xi| + \Phi_M(x,\xi)\Big) \\
&\leqslant a_1\Big(\frac{|\xi|}{\Phi_M(x,\xi)} + 1\Big)\Phi_M(x,\xi) \\
&\leqslant a_1\Big(\frac{\overline{\beta}}{w_M^*(x,|\xi|)} + 1\Big)\Phi_M(x,\xi) \\
&\leqslant a_1\Big(\frac{\overline{\beta}}{w_M^*(x,\delta)} + 1\Big)\Phi_M(x,\xi).
\end{aligned}$$

Alors, d'après ce qui précède, on déduit que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$j(x,\xi) \leqslant c^*|\xi|^{\overline{\alpha}} + c(\delta)\Phi_M(x,\xi), \tag{5.39}$$

où $c(\delta) > 0$ est indépendante de ξ.
On rappelle qu'on a les injections suivantes :

$$\mathbf{V}_0 \hookrightarrow L^{\Phi_M}(\Omega) \hookrightarrow L^{\underline{\beta}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\overline{\alpha}}(\Omega). \tag{5.40}$$

Alors, il existe $S_0 > 0$, $S_1 > 0$ et $S_2 > 0$ telles que

$$\|v\|_{\Phi_M} \leqslant S_0\|v\|_{\mathbf{V}_0}, \qquad \text{pour tout } v \in \mathbf{V}_0. \tag{5.41}$$

$$\|v\|_{L^{\underline{\beta}}} \leqslant S_1\|v\|_{\mathbf{V}_0}, \qquad \text{pour tout } v \in \mathbf{V}_0. \tag{5.42}$$

$$\|v\|_{L^{\overline{\alpha}}} \leqslant S_2\|v\|_{\mathbf{V}_0}, \qquad \text{pour tout } v \in \mathbf{V}_0. \tag{5.43}$$

Prenons $0 < \eta < \min\Big\{1; \dfrac{1}{S_0}\Big\}$, alors d'après le Corollaire 5.13, on a

$$J(u) \geqslant \frac{1}{N^{\overline{\alpha}}} \cdot \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{\overline{\alpha}} \qquad \text{pour tout } \|u\|_{\mathbf{V}_0} = \eta.$$

Par conséquent, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $\|u\|_{\mathbf{V}_0} = \eta$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= J(u) - g(u) \\
&\geqslant \frac{1}{N^{\overline{\alpha}}} \cdot \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{\overline{\alpha}} - c^* \|u\|_{L^{\overline{\alpha}}}^{\overline{\alpha}} - \delta_1 \int_\Omega \Phi_M(x, u(x)) \mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{1}{N^{\overline{\alpha}}} \cdot \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{\overline{\alpha}} - c^* (S_2)^{\overline{\alpha}} \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{\overline{\alpha}} - \delta_1 \|u\|_{\Phi_M}^{\underline{\beta}} \\
&\geqslant \left(\frac{1}{N^{\overline{\alpha}}} - c^* (S_2)^{\overline{\alpha}} \right) \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{\overline{\alpha}} - \delta_1 (S_0)^{\underline{\beta}} \|u\|_{\mathbf{V}_0}^{\underline{\beta}}.
\end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $c^* < \dfrac{1}{N^{\overline{\alpha}} \cdot (S_2)^{\overline{\alpha}}}$ et $\overline{\alpha} < \underline{\beta}$, alors pour un choix de $\eta > 0$ assez petit, on déduit que $\Phi(u) \geqslant \alpha > 0$ pour tout $\|u\|_{\mathbf{V}_0} = \eta$. ■

Lemme 5.18. *(Voir [17]) Sous les hypothèses **(j1)**, **(j2)** et **(j3)** il existe $u_0 \in \mathbf{V}_0$ tel que*

$$\Phi(u_0) < \alpha \quad \text{et} \quad \|u_0\|_{\mathbf{V}_0} > \eta.$$

Preuve:
D'après **(j3)**, il existe $k_1 > 0$ tel que

$$k_1 |\xi|^\beta \leqslant j(x, \xi), \qquad \forall\ |\xi| \geqslant M.$$

Soit $u \in \mathbf{V}_0$ un élément non nul, alors il existe $k_2 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
k_1 \int_\Omega |u|^\beta \mathrm{d}x &= k_1 \int_{\{|u| \geqslant M\}} |u|^\beta \mathrm{d}x + k_1 \int_{\{|u| < M\}} |u|^\beta \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{\{|u| \geqslant M\}} j(x, u(x)) \mathrm{d}x + k_2.
\end{aligned}$$

De l'autre côté, d'après **(j2)**, il existe $k_3 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
-g(u) &= -\int_{\{|u| \geqslant M\}} j(x, u(x)) \mathrm{d}x - \int_{\{|u| < M\}} j(x, u(x)) \mathrm{d}x \\
&\leqslant -\int_{\{|u| \geqslant M\}} j(x, u(x)) \mathrm{d}x + \int_{\{|u| < M\}} |j(x, u(x))| \mathrm{d}x \\
&\leqslant -k_1 \int_\Omega |u|^\beta \mathrm{d}x + k_2 + k_3 \\
&= -k_1 \|u\|_{L^\beta}^\beta + k_4.
\end{aligned}$$

Soit $t > 1$, d'après la Remarque 3.20 et ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(tu) &= J(tu) - g(tu) \\
&\leqslant t^{\overline{\alpha}} J(u) - k_1 \cdot t^\beta \|u\|_{L^\beta}^\beta + k_4.
\end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $\overline{\alpha} < \beta$, alors lorsqu'on fait tendre t vers l'infini, on déduit que

$$\Phi(tu) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty.$$

Par conséquent, on choisit $t_0 > 1$ suffisamment grand et $u_0 = t_0 u \in \mathbf{V}_0$ de sorte que

$$\Phi(u_0) < \alpha \quad \text{ et } \quad \|u_0\|_{\mathbf{V}_0} > \eta.$$

■

D'après les deux lemmes précédents et en appliquant le Théorème 2.79, on déduit qu'il existe une suite de Palais-Smale $(u_n) \subset \mathbf{V}_0$ telle que

$$\begin{cases} \Phi(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma, \\ \text{et} \\ \lambda^{\Phi}(u_n) = \inf\Big\{\|w_n^*\|_{\mathbf{V}_0^*} : w_n^* \in \partial\Phi(u_n)\Big\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \end{cases} \tag{5.44}$$

où

$$\gamma = \min_{p\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi\big(p(t)\big),$$

et

$$\Gamma = \Big\{p \in C\left([0,1];V\right) : p(0) = 0,\ p(1) = u_0\Big\}.$$

Lemme 5.19. *(Voir [17]) La suite de Palais-Smale $(u_n) \subset \mathbf{V}_0$ trouvée dans (5.44) est bornée.*

Preuve:
On vérifie les hypothèses du Lemme 3.5 :

(0) Par hypothèse, l'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{\Phi_M}(\Omega)$ est compacte.

(1) D'après le Théorème 3.24 et sous les hypothèses qu'on a mises sur Φ_i pour $i = 1, \ldots, N$, on déduit que l'opérateur $\begin{array}{rrcl} A: & \mathbf{V}_0 & \longrightarrow & 2^{\mathbf{V}_0^*} \\ & u & \longrightarrow & \partial J(u) \end{array}$ est fortement monotone.

(2) Les hypothèses de croissance dans **(H2)** du Lemme 3.5 sont les mêmes que dans **(j5)**.

En suivant les mêmes lignes de la démonstration du Lemme 3.5, on montre que $(u_n) \subset \mathbf{V}_0$ est bornée. ■

PREUVE DU THÉORÈME 5.16.
D'après ce dernier lemme, il existe $u \in \mathbf{V}_0$ et une sous-suite aussi notée (u_n) tels que

(i) $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $\mathbf{V}_0$,

(ii) $u_n \to u$ fortement dans $L^{\Phi_M}(\Omega)$.

De plus, d'après la même démonstration (du Lemme 3.5), on déduit que la forte monotonie dans **(1)** implique que $u_n \to u$ fortement dans $\mathbf{V}_0$, ce qui achève la démonstration du Théorème 5.16. ∎

5.4.1 Exemple d'application

Soient Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ à bord régulier et $q_i,\ p_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, N$, $2N$ réels positifs tels que

$$2 \leqslant q_i < p_i < +\infty.$$

On note (analogue pour q_i) :

$$\begin{aligned} p^+ &= \max\{p_1, \ldots, p_N\}, \\ p^- &= \min\{p_1, \ldots, p_N\}. \end{aligned}$$

Considérons la fonction $\Phi_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi_i(x,t) = \begin{cases} |t|^{q_i} & \text{si } |t| \leqslant 1, \\ |t|^{p_i} & \text{si } |t| > 1. \end{cases}$$

On peut choisir la fonction $\varphi_i(x,t)$ comme suit :

$$\varphi_i(x,t) = \begin{cases} q_i|t|^{q_i-2}t & \text{si } |t| < 1, \\ p_i|t|^{p_i-2}t & \text{si } |t| > 1, \\ p_i & \text{si } t = 1, \\ -p_i & \text{si } t = -1. \end{cases}$$

Les fonctions φ_i et Φ_i vérifient les hypothèses **(C1)-(C4)** du Théorème 3.24, avec $\underline{\alpha} = q^- > 1$ et $\overline{\alpha} = p^+ > 1$.
La fonction $\Phi_i(x, \cdot)$ est localement Lipschitzienne, convexe et sa sous-différentielle est donnée par

$$\partial\Phi_i(x,t) = \begin{cases} \varphi_i(x,t) & \text{si } |t| > 1 \text{ ou } |t| < 1, \\ \text{sign(t)}\big[q_i, p_i\big] & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère $\mathbf{V}_0$ l'espace de Sobolev anisotrope suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &\doteq W_0^{1,\Phi_1,\ldots,\Phi_N}(\Omega) \\ &= \left\{ v \in W_0^{1,1}(\Omega) : \sum_{i=1}^{N} \left(\int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right) \mathrm{d}x \right) < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

On munit cet espace de la norme suivante :

$$\|v\|_{\mathbf{V}_0} = \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{\Phi_i}.$$

On définit la fonctionnelle $J : \mathbf{V}_0 \to \mathbb{R}$ par

$$J(v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i \left(x, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right) \frac{\mathrm{d}x}{p_i}.$$

Ensuite, on définit la fonction $\Phi_M : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi_M(x,t) = |t|^q.$$

On considère

$$j(x,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{c^*}{p^+}|\sigma|^{p^+} & \text{si } |\sigma| < 1, \\ \\ \dfrac{1}{\beta}|\sigma|^\beta - |\sigma| + \dfrac{c^*}{p^+} + \dfrac{\beta - 1}{\beta} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $0 < c^* < \dfrac{1}{N^{p^+} \cdot (S)^{p^+}}$ et $S > 0$ est la constante de Sobolev de l'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow L^{p^+}(\Omega)$.

Théorème 5.20. *(Voir [17]) Sous les hypothèses et les notations introduites ci-dessus, si on choisit $p^+ < \beta < q < p^*$ (p^* est l'exposant critique), alors toutes les hypothèses du Théorème 5.16 sont satisfaites. Par suite, il existe une fonction $u \in \mathbf{V}_0$ non triviale telle que*

$$0 \in \partial J(u) - \partial g(u).$$

⁕ – ⁕ – ⁕ – ⁕ – ⁕ – ⁕ – ⁕

Chapitre 6

Propriétés qualitatives des fonctions propres liées aux opérateurs $\overline{\rho}^{>}$-multivoques

Après avoir étudié, dans les chapitres précédents, l'existence de solutions pour des problèmes de valeurs propres liées aux opérateurs $\overline{\rho}^{>}$-multivoques, nous allons attaquer, dans ce chapitre et en utilisant le réarrangement relatif, les propriétés qualitatives des fonctions propres obtenues. Par suite, nous étudierons ces mêmes propriétés d'une façon directe pour la première fonction propre du p-Laplacien.

6.1 Rappel : Réarrangement relatif

On commence par rappeler quelques outils sur le réarrangement relatif qui est un instrument d'estimations dans les problèmes aux limites (pour plus de détails voir [84]).

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$.

Définition 6.1. *(Voir [84, page 8]) Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On appelle réarrangement décroissant de u, la fonction $u_* : \Omega_* \doteq]0, |\Omega|[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$u_*(s) = \inf\big\{t \in \mathbb{R} : |u > t| \leqslant s\big\}.$$

Si $s = 0$, $u_*(0) = \sup\limits_{\Omega} \operatorname{ess} u$, $s = |\Omega|$, $u_*(|\Omega|) = \inf\limits_{\Omega} \operatorname{ess} u$.

Proposition 6.2. *(Voir [84, page 9]) Le réarrangement décroissant de u vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *(équimesurabilité) $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $|u > t| = |u_* > t|$. De plus,*
$|u \leqslant t| = |u_* \leqslant t|$ *et* $|u \geqslant t| = |u_* \geqslant t|$.

(ii) $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u_*\|_{L^p(\Omega_*)}$, *pour* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

(iii) $\left(|u|^p\right)_* = \left(|u|_*\right)^p$ *p.p., pour* $1 \leqslant p < +\infty$.

Théorème 6.3. *(Voir [84, page 32]) Soient* $u, v \in L^1(\Omega)$ *et* $w : \overline{\Omega_*} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$w(s) = \int_{\{u>u_*(s)\}} v(x)\mathrm{d}x + \int_0^{s-|u>u_*(s)|} \left(v|_{\{u=u_*(s)\}}\right)_*(\sigma)d\sigma,$$

où $v|_{\{u=u_*(s)\}}$ *désigne la restriction de* v *à l'ensemble* $\{u = u_*(s)\}$ *et* $\left(v|_{\{u=u_*(s)\}}\right)_*$ *son réarrangement décroissant.*
Si $v \in L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *alors*

(a) $w \in W^{1,p}(\Omega_*)$.

(b) $\dfrac{(u+\lambda v)_* - u_*}{\lambda} \rightharpoonup_{\lambda\to 0} \dfrac{dw}{ds} \begin{cases} \text{dans } L^p(\Omega_*)\text{-faible} & \text{si } 1 \leqslant p < +\infty, \\ \text{dans } L^\infty(\Omega_*)\text{-faible-}* & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$

Définition 6.4. *(Voir [84, page 41]) Sous les mêmes conditions que le théorème ci-dessus, on appelle le réarrangement relatif de* v *par rapport à* u, *la fonction*

$$v_{*u} = \frac{dw}{ds} \in L^p(\Omega_*).$$

Proposition 6.5. *(Voir [84, page 42]) Soient* $u \in L^1(\Omega)$ *et* $v \in L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, *le réarrangement relatif de* v *par rapport à* u *vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\|v_{*u}\|_{L^p(\Omega_*)} \leqslant \|v\|_{L^p(\Omega)}$.

(ii) $\displaystyle\int_{\Omega_*} v_{*u}(s)ds = \int_\Omega v(x)\mathrm{d}x$.

(iii) *Si* $v_1 \leqslant v_2$ *p.p. et* $v_i \in L^p(\Omega)$, *alors* $v_{1*u} \leqslant v_{2*u}$ *p.p.*

(iv) *Si* $\alpha > 0$, *alors* $(\alpha v)_{*u} = \alpha v_{*u}$.

Théorème 6.6. *(Inégalité de Poincaré-Sobolev pour le réarrangement relatif, voir [84, Théorème 4.1.1, page 85]) Soit* $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, $u \geqslant 0$, *alors* $u_* \in W_{loc}^{1,1}(\Omega_*)$, *et*

$$-u_*'(s) \leqslant \frac{s^{\frac{1}{N}-1}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}} |\nabla u|_{*u}(s), \quad \text{p.p. dans } \Omega_*. \tag{6.1}$$

Lemme 6.7. *(Voir [84, page 116]) Soient* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $v \in L^p(\Omega)$ *tel que* $v_* \in W_{loc}^{1,1}(\Omega_*)$, *alors* $\forall g \in L^{p'}(\Omega)$, *la fonction* $G(s) = \displaystyle\int_\Omega g \cdot \left(v - v_*(s)\right)_+ \mathrm{d}x \in W_{loc}^{1,1}(\Omega_*)$.
De plus, on a p.p. $s \in \Omega_*$ *:*

$$G'(s) = -v_*'(s) \int_{\{u>u_*(s)\}} g(x)\mathrm{d}x = -v_*'(s) \int_0^s g_{*v}(\sigma)d\sigma. \tag{6.2}$$

6.1.1 Régularité L^∞ des fonctions propres liées aux opérateurs $\overline{\rho}^{>}$-multivoques

Soient $\Phi_i : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$ et $\Phi_M : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $N+1$ fonctions boréliennes telles que les hypothèses **(C1)-(C4)** de la Section 3.3 sont satisfaites. On considère l'espace d'Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\Phi_1,\ldots,\Phi_N}(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,\Phi_1,\ldots,\Phi_N}(\Omega) \hookrightarrow L^{\Phi_M}(\Omega)$, $u \geqslant 0$ solution du problème de valeurs propres suivant :

$$-\mathrm{div}\left(\partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) = \lambda w_M^*, \tag{6.3}$$

où

$$w_M^*(x) \in \partial\Phi_M(x, u(x)) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Que peut-on dire sur la régularité de la solution u ? C'est le sujet de la suite de cette section.

Théorème 6.8. *(Voir [17]) Soient τ et α deux réels tels que $1 < \tau < \alpha < +\infty$. Considérons la fonction $\Phi_i : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\Phi_i(x,t) = \begin{cases} |t|^\tau & si \;\; |t| \leqslant 1, \\ |t|^\alpha & si \;\; |t| > 1. \end{cases}$$

Alors, il existe $\lambda_1 > 0$, $u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ et $u \geqslant 0$ solution du problème

$$-\mathrm{div}\left(\partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) = \lambda_1 u^{\alpha-1}. \tag{6.4}$$

De plus, si

(i) $1 \leqslant N \leqslant 5$,

ou

(ii) $N \geqslant 6$ *et* $\begin{cases} 1 < \alpha < \alpha_N^-, & où \; \alpha_N^- = \dfrac{N+1-\sqrt{(N-3)^2-8}}{4}, \\ ou & \\ \alpha_N^+ < \alpha < N, & où \; \alpha_N^+ = \dfrac{N+1+\sqrt{(N-3)^2-8}}{4}, \end{cases}$

alors $u \in L^\infty(\Omega)$.

La preuve du Théorème 6.8 se fait en plusieurs étapes :

Lemme 6.9. *(Voir [17]) Sous les hypothèses du Théorème 6.8, il existe $\lambda_1 > 0$, $u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ et $u \geqslant 0$ solution du problème* (6.4).

Preuve:
La fonction $j : L^\alpha(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $j(v) = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_\Omega |v|^\alpha \mathrm{d}x$ est continue, convexe, paire et $j(0) = 0$. L'injection $W_0^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^\alpha(\Omega)$ est compacte, alors le Théorème 5.9 achève la démonstration. ∎

Lemme 6.10. *(Voir [17]) Toute solution u de (6.4) vérifie l'inéquation différentielle suivante*

$$\big(|\nabla u|^{\alpha}\big)_{*u}(s) \leqslant \lambda_{1N}\left(-\frac{du_*}{ds}(s)\right)\int_0^s u_*^{\alpha-1}(t)dt + c_2, \tag{6.5}$$

où λ_{1N} et c_2 sont deux constantes positives.

Preuve:
Comme u est solution du problème (6.4), alors il existe

$$w_i^*(x) \in \partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \text{ p.p.,} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, N, \text{ telles que}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega} w_i^*(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x = \lambda_1\int_{\Omega} u^{\alpha-1}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,\alpha}(\Omega). \tag{6.6}$$

Soit la fonction test $\varphi(x) = \big(u(x) - u_*(s)\big)_+ \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. D'après (6.6), on déduit

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u>u_*(s)\}} w_i^*(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x = \lambda_1\int_{\Omega} u^{\alpha-1}(x)\big(u(x) - u_*(s)\big)_+\mathrm{d}x. \tag{6.7}$$

Or, si on pose

$$E_{\leqslant 1} \doteq \{u > u_*(s)\} \cap \left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqslant 1\right\} \quad \text{et} \quad E_{>1} \doteq \{u > u_*(s)\} \cap \left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| > 1\right\},$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u>u_*(s)\}} w_i^*(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x &\geqslant \tau\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u>u_*(s)\}} \Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \tau\sum_{i=1}^{N}\int_{E_{\leqslant 1}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\tau}(x)\mathrm{d}x + \tau\sum_{i=1}^{N}\int_{E_{>1}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha}\mathrm{d}x \\
&\geqslant \tau\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u>u_*(s)\}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha}\mathrm{d}x - \tau\sum_{i=1}^{N}\int_{E_{\leqslant 1}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha}\mathrm{d}x \\
&\geqslant \tau\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u>u_*(s)\}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha}(x)\mathrm{d}x - c_1,
\end{aligned}$$

où $c_1 = N \cdot \tau \cdot |\Omega|$ est une constante positive qui ne dépend pas de u.
De plus, il existe une constante $c_2 = c_2(N, \alpha)$ positive qui dépend de N et α telle que

$$\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\alpha} \geqslant c_2\left(\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} = c_2|\nabla u|^{\alpha}. \tag{6.8}$$

D'après ce qui précède, on déduit que

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\{u>u_*(s)\}} w_i^*(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x \geqslant \tau\cdot c_2\int_{\{u>u_*(s)\}}|\nabla u|^{\alpha}\mathrm{d}x - c_1. \tag{6.9}$$

Par suite, les relations (6.9) et (6.7) impliquent que

$$\tau\cdot c_2\int_{\{u>u_*(s)\}}|\nabla u|^{\alpha}\mathrm{d}x \leqslant \lambda_1\int_{\Omega}u^{\alpha-1}(x)\big(u(x)-u_*(s)\big)_+\mathrm{d}x + c_1. \tag{6.10}$$

Comme $u\in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ et $u\geqslant 0$, alors $u_*\in W_{loc}^{1,1}(\Omega_*)$. Alors, en utilisant le Lemme 6.7, on déduit de (6.10) que

$$\begin{aligned}\Big(|\nabla u|^{\alpha}\Big)_{*u}(s) &\leqslant \lambda_2\Big(-u_*'(s)\Big)\int_0^s\big(u^{\alpha-1}\big)_{*u}(\sigma)d\sigma\\ &\leqslant \lambda_2\Big(-u_*'(s)\Big)\int_0^s\big(u^{\alpha-1}\big)_{*}(\sigma)d\sigma\\ &\leqslant \lambda_2\Big(-u_*'(s)\Big)\int_0^s\big(u_*\big)^{\alpha-1}(\sigma)d\sigma,\end{aligned}$$

où $\lambda_2=\dfrac{\lambda_1}{\tau\cdot c_2}$. ■

Proposition 6.11. *(Voir [17]) Soit $u\in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, $u\geqslant 0$ une solution de l'inéquation différentielle* (6.5)*, alors il existe $c_6>0$ et $c_7>0$ deux constantes telles que pour presque tout $s\in\Omega_*=]0,|\Omega|[$, on a*

$$|\nabla u|_{*u}(s)\leqslant c_6 s^{-\frac{N-1}{N(\alpha-1)}}\left(\int_0^s u_*^{\alpha-1}(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}+c_7. \tag{6.11}$$

Preuve:
Comme

$$-u_*'(s)\leqslant\frac{s^{\frac{1}{N}-1}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}|\nabla u|_{*u}(s),\qquad \text{(voir [84, page 119])} \tag{6.12}$$

et l'inégalité de Hölder pour le réarrangement relatif conduit :

$$\Big[|\nabla u|_{*u}\Big]^{\alpha}(s)\leqslant\big(|\nabla u|^{\alpha}\big)_{*u}(s),\quad p.p.\ \text{en } s,\qquad \text{(voir [84, page 119])} \tag{6.13}$$

on déduit que

$$\begin{aligned}\Big[|\nabla u|_{*u}\Big]^{\alpha}(s) &\leqslant \lambda_{1N}\left(-\frac{du_*}{ds}(s)\right)\int_0^s u_*^{\alpha-1}(t)dt+c_2\\ &\leqslant \frac{\lambda_{1N}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}\ s^{\frac{1}{N}-1}\int_0^s u_*^{\alpha-1}(t)dt\cdot|\nabla u|_{*u}(s)+c_2.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Young, on déduit que

$$\Big[|\nabla u|_{*u}\Big]^{\alpha}(s) \leqslant c_3 s^{\alpha'(\frac{1}{N}-1)}\left(\int_0^s u_*^{\alpha-1}(t)dt\right)^{\alpha'} + \frac{1}{\alpha}\Big[|\nabla u|_{*u}\Big]^{\alpha}(s) + c_2, \tag{6.14}$$

où $c_3 = \dfrac{\left(\frac{\lambda_{1N}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}\right)^{\alpha'}}{\alpha'}$ et $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha'}=1$.
Par conséquent,

$$\Big[|\nabla u|_{*u}\Big]^{\alpha}(s) \leqslant c_4 s^{\alpha'(\frac{1}{N}-1)}\left(\int_0^s u_*^{\alpha-1}(t)dt\right)^{\alpha'} + c_5, \tag{6.15}$$

où $c_4 = \dfrac{c_3}{1-\frac{1}{\alpha}}$ et $c_5 = \dfrac{c_2}{1-\frac{1}{\alpha}}$.
D'après la Proposition A.3, on déduit que

$$|\nabla u|_{*u}(s) \leqslant c_6 s^{\frac{\alpha'}{\alpha}(\frac{1}{N}-1)}\left(\int_0^s u_*^{\alpha-1}(t)dt\right)^{\frac{\alpha'}{\alpha}} + c_7. \tag{6.16}$$

Par la suite,

$$|\nabla u|_{*u}(s) \leqslant c_6 s^{\frac{1}{\alpha-1}(\frac{1}{N}-1)}\left(\int_0^s u_*^{\alpha-1}(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + c_7. \tag{6.17}$$

■

Proposition 6.12. *(Voir [17]) Sous les hypothèses de la Proposition 6.11, si $u \in L^r(\Omega)$, $r > \dfrac{N}{\alpha'}$ et $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha'}=1$, alors $u \in L^{\infty}(\Omega)$.*

Preuve:
D'après l'inégalité de Hölder, on a pour $\beta = \dfrac{r}{r-\alpha+1}$ et $\beta' = \dfrac{r}{\alpha-1}$:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^s u_*^{\alpha-1}(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} &\leqslant \left[s^{\frac{1}{\beta}} \cdot \left(\int_0^{|\Omega|} u_*^{(\alpha-1)\beta'}(t)dt\right)^{\frac{1}{\beta'}}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \\
&\leqslant s^{\left(1-\frac{\alpha-1}{r}\right)\frac{1}{\alpha-1}} \cdot \left(\int_0^{|\Omega|} u_*^{(\alpha-1)\frac{r}{\alpha-1}}(t)dt\right)^{\frac{\alpha-1}{r}\cdot\frac{1}{\alpha-1}} \\
&\leqslant s^{\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_0^{|\Omega|} u_*^{r}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

D'après l'équimesurabilité (voir [84, page 9]), on déduit que

$$\left(\int_0^s u_*^{\alpha-1}(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \leqslant s^{\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{r}} \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)}. \tag{6.18}$$

D'après (6.12) et (6.17) de la Proposition 6.11, on a

$$-u_*'(s) \leqslant \frac{s^{\frac{1}{N}-1}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}\left[c_6 s^{\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{N}-1\right)}\left(\int_0^s u_*^{\alpha-1}(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + c_7\right]. \tag{6.19}$$

En utilisant (6.18), on obtient

$$\begin{aligned}
-u_*'(s) &\leqslant \frac{s^{\frac{1}{N}-1}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}\left[c_6 s^{\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{N}-1\right)} \cdot s^{\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{r}} \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)} + c_7\right] \\
&\leqslant c_8 s^{\frac{1}{N}-1} \cdot s^{\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{N}-1\right)} \cdot s^{\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{r}} \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)} + c_9 s^{\frac{1}{N}-1} \\
&= c_8 s^{\left(\frac{1}{N}-1\right)\left[1+\frac{1}{\alpha-1}\right]+\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{r}} \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)} + c_9 s^{\frac{1}{N}-1}.
\end{aligned}$$

L'exposant γ doit vérifier

$$\begin{aligned}
\gamma + 1 > 0 &\iff \gamma \doteq \left(\frac{1}{N}-1\right)\left[1+\frac{1}{\alpha-1}\right] + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{r} > -1 \\
&\iff r > \frac{N}{\alpha'}.
\end{aligned}$$

Pour tous $\sigma, t \in \Omega_*$, on a

$$\begin{aligned}
|u_*(\sigma) - u_*(t)| &\leqslant c_8 \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)} \int_0^{|\Omega|} s^\gamma ds + c_9 \int_0^{|\Omega|} s^{\frac{1}{N}-1} ds \\
&\leqslant c_8 \frac{|\Omega|^{\gamma+1}}{\gamma+1} \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)} + c_9 \frac{|\Omega|^{\frac{1}{N}}}{\frac{1}{N}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\operatorname*{osc}_{\Omega} u \leqslant c_{10}|\Omega|^{\gamma+1} \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)} + c_{11}|\Omega|^{\frac{1}{N}} < +\infty. \tag{6.20}$$

De plus, $u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ et $u \geqslant 0$, on déduit que $u_*(|\Omega|) = 0$.
En particulier, pour tout $\sigma \in \Omega_*$, on a

$$|u_*(\sigma)| \leqslant c_{10}|\Omega|^{\gamma+1} \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)} + c_{11}|\Omega|^{\frac{1}{N}}. \tag{6.21}$$

Par conséquent,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c_{12} \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)} + c_{13}. \tag{6.22}$$

■

On considère $1 < \alpha < N$ et $\alpha^* = \dfrac{N\alpha}{N-\alpha}$ l'exposant de Sobolev. On veut trouver des conditions pour que $\alpha^* > \dfrac{N}{\alpha'}$. En effet,

$$\begin{aligned}\alpha^* = \frac{N\alpha}{N-\alpha} > \frac{N}{\alpha'} &\iff \frac{\alpha}{N-\alpha} > \frac{(\alpha-1)}{\alpha} \\ &\iff \alpha^2 > (N-\alpha)(\alpha-1) \\ &\iff 2\alpha^2 - (N+1)\alpha + N > 0.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Pour cette équation de second degré, on a

$$\Delta_N = (N+1)^2 - 8N = N^2 - 6N + 1 = (N-3)^2 - 8.$$

Si $\Delta_N > 0$, alors les deux racines simples sont

$$\alpha_N^- = \frac{N+1-\sqrt{\Delta_N}}{4} \qquad \text{et} \qquad \alpha_N^+ = \frac{N+1+\sqrt{\Delta_N}}{4}. \tag{6.24}$$

Proposition 6.13. *(Voir [17]) Si $1 \leqslant N \leqslant 5$, alors $\alpha^* > \dfrac{N}{\alpha'}$ et $u \in L^\infty(\Omega)$.*

Preuve:
Si $1 \leqslant N \leqslant 5$, alors $\Delta_N < 0$. D'après (6.23), on a $\alpha^* > \dfrac{N}{\alpha'}$ et par suite il existe une constante $r > 0$ telle que $\alpha^* > r > \dfrac{N}{\alpha'}$.
D'après l'injection de Sobolev, on a

$$W_0^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha^*}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

D'après la Proposition 6.12, $u \in L^\infty(\Omega)$. ■

Proposition 6.14. *(Voir [17]) Si $N \geqslant 6$, alors il existe deux racines simples α_N^- et α_N^+ telles que*

$$1 < \alpha_N^- < \alpha_N^+ < N.$$

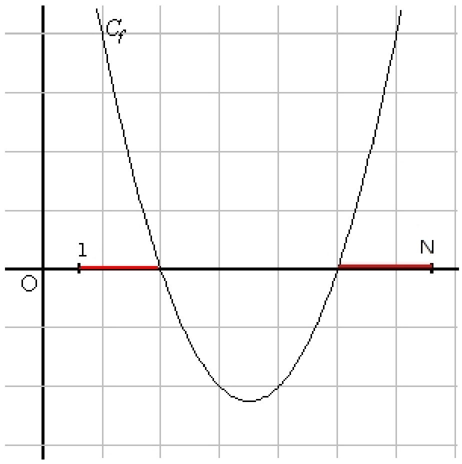
Preuve:
Si $N \geqslant 6$, alors $\Delta_N > 0$ et dans ce cas il existe deux racines simples données par (6.24).
De plus, on a

$$\begin{aligned}1 < \alpha_N^- &\iff 4 < N+1-\sqrt{(N-3)^2-8} \\ &\iff \sqrt{(N-3)^2-8} < N-3 \\ &\iff -8 < 0,\end{aligned}$$

ce qui est vraie. Et

$$\begin{aligned} \alpha_N^+ < N &\iff N + 1 + \sqrt{(N-3)^2 - 8} < 4N \\ &\iff \sqrt{(N-3)^2 - 8} < 3N - 1 \\ &\iff (N-3)^2 - 8 < (3N-1)^2 \\ &\iff N^2 - 6N + 1 < 9N^2 - 6N + 1 \\ &\iff 0 < 8N^2, \end{aligned}$$

ce qui est vraie aussi. ■



Proposition 6.15. *(Voir [17]) Soit $N \geqslant 6$.*
Si $\alpha_N^+ < \alpha < N$, alors $u \in L^r(\Omega)$ tel que $r > \dfrac{N}{\alpha'}$ et $u \in L^\infty(\Omega)$.
Si $1 < \alpha < \alpha_N^-$, on a de même $u \in L^\infty(\Omega)$.

Preuve:
D'après la Proposition 6.14, il existe deux racines α_N^- et α_N^+ telles que

$$1 < \alpha_N^- < \alpha_N^+ < N.$$

Si $\alpha_N^+ < \alpha < N$, alors $\alpha^* = \dfrac{N\alpha}{N-\alpha} > \dfrac{N}{\alpha'}$, par suite par le même argument de la preuve de la Proposition 6.13, on obtient $u \in L^\infty(\Omega)$.
Si $1 < \alpha < \alpha_N^-$, le même raisonnement implique que $u \in L^r(\Omega)$ où $r > \dfrac{N}{\alpha'}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$. ■

6.2 Fonction propre du p-Laplacien

Dans le cas univoque, on peut affiner les calculs et donner des précisions sur les constantes. La méthode utilisée dans cette section est basée sur l'inégalité de Poincaré-Sobolev et une inégalité d'interpolation.

Théorème 6.16. *(Voir [17]) Soient λ_1 la première valeur propre et u_1 la première fonction propre liées au p-Laplacien :*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 = \lambda_1 u_1^{p-1} > 0, & \textit{pour} \quad 1 < p < N, \\ \displaystyle\int_\Omega u_1^p \mathrm{d}x = 1, & \textit{et} \;\; u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{6.25}$$

Alors,

$$\max_{\overline{\Omega}} u_1 \leqslant \left(\frac{B_{p^*}^{\frac{1}{p^*}}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}} \right)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \left(\frac{\lambda_1}{p} \right)^{\frac{\theta}{p(\theta-1)}},$$

où $\theta = \dfrac{p^*}{p}$, $\lambda_1 = \inf \left\{ \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^p \mathrm{d}x : \int_\Omega v^p \mathrm{d}x = 1 \right\}$, $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ est l'exposant de Sobolev, B_{p^*} est la constante de Bliss (voir [84, page 99]) et ω_N est la mesure de Lebesgue de la boule unité dans $\mathbb{R}^N$.

Preuve:
Soit J tel que

$$\begin{aligned} J &= \int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \cdot \nabla (u_1^{m+1}) \mathrm{d}x \\ &= (m+1) \int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \cdot (\nabla u_1 \; u_1^m) \mathrm{d}x \\ &= (m+1) \int_\Omega |\nabla u_1|^p \cdot u_1^m \mathrm{d}x \\ &= (m+1) \int_\Omega \left| \nabla u_1 \cdot u_1^{\frac{m}{p}} \right|^p \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Comme on a

$$\nabla u_1^{\frac{m+p}{p}} = \frac{m+p}{p} \nabla u_1 \cdot u_1^{\frac{m}{p}},$$

ainsi

$$J = \frac{p(m+1)}{m+p} \int_\Omega \left| \nabla u_1^{\frac{m+p}{p}} \right|^p \mathrm{d}x. \tag{6.26}$$

D'après (6.25), J est tel que

$$\begin{aligned} J &= \lambda_1 \int_\Omega u_1^{p-1} \cdot u_1^{m+1} \mathrm{d}x \\ &= \lambda_1 \int_\Omega u_1^{m+p} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

L'inégalité de Poincaré-Sobolev nous donne (voir [84, page 98]) :

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega u_1^{\frac{p^*(m+p)}{p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p^*}} &\leqslant \frac{B_{p^*}^{\frac{1}{p^*}}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}\left(\int_\Omega \left|\nabla u_1^{\frac{m+p}{p}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{B_{p^*}^{\frac{1}{p^*}}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}\left(\lambda_1\frac{m+p}{p(m+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega u_1^{m+p}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\|u_1\|_{L^{\theta(m+p)}(\Omega)}^{\frac{m+p}{p}} \leqslant \frac{B_{p^*}^{\frac{1}{p^*}}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}\left(\lambda_1\frac{m+p}{p(m+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\|u_1\|_{L^{m+p}(\Omega)}^{\frac{m+p}{p}}. \tag{6.27}$$

Par conséquent, on a

$$\|u_1\|_{L^{\theta(m+p)}(\Omega)} \leqslant \left(\frac{B_{p^*}^{\frac{1}{p^*}}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}\right)^{\frac{p}{m+p}}\left(\lambda_1\frac{m+p}{p(m+1)}\right)^{\frac{1}{m+p}}\|u_1\|_{L^{m+p}(\Omega)}. \tag{6.28}$$

Or, pour $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, on a l'inégalité d'interpolation suivante (voir [10, page 57])

$$\|u_1\|_{L^{m+p}(\Omega)} \leqslant \|u_1\|_{L^p}^{1-\eta}\cdot\|u_1\|_{L^{\theta(m+p)}}^{\eta} \quad \text{où } \frac{1}{m+p} = \frac{1-\eta}{p} + \frac{\eta}{\theta(m+p)}. \tag{6.29}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\frac{1}{m+p} &= \frac{1-\eta}{p} + \frac{\eta}{\theta(m+p)} \\ &= \frac{1}{p} + \eta\left[\frac{p-\theta(m+p)}{\theta(m+p)p}\right].\end{aligned}$$

Alors,

$$\frac{1}{m+p} - \frac{1}{p} = \eta\left[\frac{p-\theta(m+p)}{\theta(m+p)p}\right] \Longrightarrow \eta\left[\frac{p-\theta(m+p)}{\theta}\right] = -m. \tag{6.30}$$

Par la suite,

$$\eta = \frac{\theta m}{\theta(m+p)-p}, \tag{6.31}$$

et

$$1-\eta = \frac{p(\theta-1)}{\theta(m+p)-p}. \tag{6.32}$$

Les deux relations (6.28) et (6.29) impliquent

$$\|u_1\|_{L^{\theta(m+p)}} \leqslant \left(\frac{B_{p^*}^{\frac{1}{p^*}}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}\right)^{\frac{p}{m+p}}\left(\lambda_1\frac{m+p}{p(m+1)}\right)^{\frac{1}{m+p}}\|u_1\|_{L^p}^{1-\eta}\cdot\|u_1\|_{L^{\theta(m+p)}}^{\eta}. \tag{6.33}$$

Ce qui entraîne que

$$\|u_1\|^{1-\eta}_{L^{\theta(m+p)}} \leqslant \left(\frac{B_{p^*}^{\frac{1}{p^*}}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}\right)^{\frac{p}{m+p}} \left(\lambda_1 \frac{m+p}{p(m+1)}\right)^{\frac{1}{m+p}} \|u_1\|^{1-\eta}_{L^p}. \tag{6.34}$$

Alors,

$$\|u_1\|_{L^{\theta(m+p)}} \leqslant \left(\frac{B_{p^*}^{\frac{1}{p^*}}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}\right)^{\frac{p}{m+p}\cdot\frac{1}{1-\eta}} \left(\lambda_1 \frac{m+p}{p(m+1)}\right)^{\frac{1}{m+p}\cdot\frac{1}{1-\eta}} \|u_1\|_{L^p}. \tag{6.35}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{1}{m+p}\cdot\frac{1}{1-\eta} &= \frac{1}{m+p}\cdot\frac{\theta(m+p)-p}{p(\theta-1)} \\ &= \frac{1}{p(\theta-1)}\cdot\frac{\theta(m+p)-p}{m+p} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \frac{\theta}{p(\theta-1)}.\end{aligned}$$

Lorsque $m \to +\infty$, on déduit que

$$\|u_1\|_{L^\infty} \leqslant \left(\frac{B_{p^*}^{\frac{1}{p^*}}}{N\omega_N^{\frac{1}{N}}}\right)^{\frac{\theta}{\theta-1}} \left(\frac{\lambda_1}{p}\right)^{\frac{\theta}{p(\theta-1)}}. \tag{6.36}$$

■

Remarque 6.17. *La régularité L^∞ des fonctions propres du p-Laplacien est déjà connue voir par exemple [48].*

⁎ − ⁎ − ⁎ − ⁎ − ⁎ − ⁎ − ⁎

Annexe A

Fonction semi-continue inférieurement

Définition A.1. *(Voir [25]) Soit X un espace topologique. Une fonction $\varphi : X \to]-\infty; +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement en $a \in X$ si $\forall\, \varepsilon > 0$, il existe un voisinage $U(a)$ de a dans X tel que*

$$\varphi(a) - \varepsilon \leqslant \varphi(x), \qquad \forall\, x \in U(a).$$

Proposition A.2. *(Voir [10]) Soit $\varphi : X \to]-\infty; +\infty]$, une fonction convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie forte. Alors, φ est s.c.i. pour la topologie faible $\sigma(X, X^*)$. En particulier, si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(X, X^*)$, alors*

$$\varphi(x) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \varphi(x_n).$$

Equivalence des normes

Proposition A.3. *(Voir [13]) Soient $1 \leqslant s < +\infty$, $a_i \in \mathbb{R}$ et $a_i \geqslant 0$ pour $i = 1, \ldots, N$, alors on a l'inégalité suivante :*

$$\sum_{i=1}^{N} (a_i)^s \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{N} a_i \Big)^s \leqslant N^{s-1} \sum_{i=1}^{N} (a_i)^s.$$

Proposition A.4. *[Inégalité de Young, voir [10]] Pour tout $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, on a*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \text{où } \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Lemme de Brézis-Lieb

Lemme A.5. *[Brézis-Lieb, voir [11]] Soit $1 < p < +\infty$. On suppose que*

$\circledast$ $u_n(x) \to u(x)$ *p.p.* $x \in \Omega$.

$\circledast$ $\|u_n\|_p \leqslant C < +\infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p\right) = \|u\|_p^p.$$

Opérateur de trace

Théorème A.6. *(Voir [10], [81]) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné à bord $\partial\Omega$ Lipschitzien, $N \geqslant 1$ et $1 \leqslant p < +\infty$. Alors, il existe un unique opérateur linéaire continu (dit opérateur de trace)*

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tel que

(i) *Si $u \in C^1(\overline{\Omega})$, alors $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$.*

(ii) *Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $\gamma(u) = 0$ dans $L^p(\partial\Omega)$ si et seulement si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Opérateur adjoint

Définition A.7. *(Voir [87]) Soient X, Y deux espaces de Banach et $T : X \to Y$ un opérateur linéaire continue. L'opérateur T^* adjoint de T est l'opérateur linéaire continu donné par $T^* : Y^* \to X^*$ tel que*

$$\langle T^* y^*; x\rangle = \langle y^*; Tx\rangle\,, \quad \forall x \in X,\ \forall y^* \in Y^*.$$

⁂ – ⁂ – ⁂ – ⁂ – ⁂ – ⁂ – ⁂

Bibliographie

[1] Emilio **Acerbi** and Giuseppe **Mingione**. Gradient estimates for the $p(x)$-Laplacean system. *J. Reine Angew. Math.*, 584 :117–148, 2005.

[2] Robert A. **Adams**. *Sobolev spaces.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[3] Luis **Alvarez**, Frédéric **Guichard**, Pierre-Louis **Lions**, and Jean-Michel **Morel**. Axioms and fundamental equations of image processing. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 123(3) :199–257, 1993.

[4] Claudianor O. **Alves** and Marco A. S. **Souto**. Existence of solutions for a class of problems in $\mathbb{R}^N$ involving the $p(x)$-Laplacian. In *Contributions to nonlinear analysis*, volume 66 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 17–32. Birkhäuser, Basel, 2006.

[5] Claudianor Oliveira **Alves** and Abdallah **El Hamidi**. Existence of solution for a anisotropic equation with critical exponent. *Differential Integral Equations*, 21(1-2) :25–40, 2008.

[6] Antonio **Ambrosetti** and Paul H. **Rabinowitz**. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis*, 14 :349–381, 1973.

[7] A. K. **Ben-Naoum**, C. **Troestler**, and M. **Willem**. Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains. *Nonlinear Anal.*, 26(4) :823–833, 1996.

[8] Colin **Bennett** and Robert **Sharpley**. *Interpolation of operators*, volume 129 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[9] P. **Blomgren**, T.F. **Chan**, P. **Mulet**, and C.K. **Wong**. Total variation image restoration : numerical methods and extensions. In *ICIP*, pages 384–387. IEEE, 1997.

[10] Haïm **Brezis**. *Analyse fonctionnelle.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[11] Haïm **Brézis** and Elliott **Lieb**. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88(3) :486–490, 1983.

[12] H. **Brézis** *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).

[13] Siegfried **Carl**, Vy Khoi **Le**, and Dumitru **Motreanu**. *Nonsmooth variational problems and their inequalities.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2007. Comparison principles and applications.

[14] Kung Ching **Chang**. Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 80(1) :102–129, 1981.

[15] Yunmei **Chen**, Stacey **Levine**, and Murali **Rao**. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. *SIAM J. Appl. Math.*, 66(4) :1383–1406 (electronic), 2006.

[16] H. **Chrayteh** and J. M. **Rakotoson**. Eigenvalue problems with fully discontinuous operators and critical exponents. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, 73(7) :2036–2055, 2010.

[17] Houssam **Chrayteh**. Qualitative properties of eigenvectors related to $\overline{\rho}^{>}$-multivalued operators and some existence results. *Submitted in Journal of Optimization Theory and Applications.*

[18] F. H. **Clarke**. *Optimization and nonsmooth analysis*, volume 5 of *Classics in Applied Mathematics.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, second edition, 1990.

[19] Frank H. **Clarke**. A new approach to Lagrange multipliers. *Math. Oper. Res.*, 1(2) :165–174, 1976.

[20] Philippe **Clément**, Ben **de Pagter**, Guido **Sweers**, and François **de Thélin**. Existence of solutions to a semilinear elliptic system through Orlicz-Sobolev spaces. *Mediterr. J. Math.*, 1(3) :241–267, 2004.

[21] Klaus **Deimling**. *Nonlinear functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[22] Simona **Dăbuleanu** and Vicenţiu **Rădulescu**. Multi-valued boundary value problems involving Leray-Lions operators and discontinuous nonlinearities. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 52(1) :57–69, 2003.

[23] I. **Ekeland**. On the variational principle. *J. Math. Anal. Appl.*, 47 :324–353, 1974.

[24] Ivar **Ekeland**. *Convexity methods in Hamiltonian mechanics*, volume 19 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[25] Ivar **Ekeland** and Roger **Têmam**. *Convex analysis and variational problems*, volume 28 of *Classics in Applied Mathematics.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, english edition, 1999. Translated from the French.

[26] A. **El Hamidi** and J. M. **Rakotoson**. Compactness and quasilinear problems with critical exponents. *Differential Integral Equations*, 18(11) :1201–1220, 2005.

[27] A. **El Hamidi** and J. M. **Rakotoson**. Extremal functions for the anisotropic Sobolev inequalities. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 24(5) :741–756, 2007.

[28] Abdallah **El-Hamidi**, Clara **Ghannam**, Gilles **Bailly-Maitre**, and Michel **Ménard**. Nonstandard diffusion in image restoration and decomposition. In *ICIP*, pages 3945–3948. IEEE, 2009.

[29] Abdallah **El Hamidi** and Jean-Michel **Rakotoson**. On a perturbed anisotropic equation with a critical exponent. *Ric. Mat.*, 55(1) :55–69, 2006.

[30] Xianling **Fan** and Dun **Zhao**. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *J. Math. Anal. Appl.*, 263(2) :424–446, 2001.

[31] A. **Fiorenza**, J. M. **Rakotoson**, and L. **Zitouni**. Relative rearrangement method for estimating dual norms. *Indiana Univ. Math. J.*, 58(3) :1127–1149, 2009.

[32] Ilaria **Fragalà**, Filippo **Gazzola**, and Bernd **Kawohl**. Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 21(5) :715–734, 2004.

[33] J. P. **García Azorero** and I. **Peral Alonso**. Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian : nonlinear eigenvalues. *Comm. Partial Differential Equations*, 12(12) :1389–1430, 1987.

[34] M. **García-Huidobro**, V. K. **Le**, R. **Manásevich**, and K. **Schmitt**. On principal eigenvalues for quasilinear elliptic differential operators : an Orlicz-Sobolev space setting. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 6(2) :207–225, 1999.

[35] Leszek **Gasiński** and Nikolaos S. **Papageorgiou**. *Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems*, volume 8 of *Series in Mathematical Analysis and Applications*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.

[36] D. **Goeleven**, D. **Motreanu**, and P. D. **Panagiotopoulos**. Multiple solutions for a class of eigenvalue problems in hemivariational inequalities. *Nonlinear Anal.*, 29(1) :9–26, 1997.

[37] Jean-Pierre **Gossez**. Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 190 :163–205, 1974.

[38] Jean-Pierre **Gossez**. Orlicz-Sobolev spaces and nonlinear elliptic boundary value problems. In *Nonlinear analysis, function spaces and applications (Proc. Spring School, Horni Bradlo, 1978)*, pages 59–94. Teubner, Leipzig, 1979.

[39] Jan **Haškovec** and Christian **Schmeiser**. A note on the anisotropic generalizations of the Sobolev and Morrey embedding theorems. *Monatsh. Math.*, 158(1) :71–79, 2009.

[40] Juha **Heinonen**. *Lectures on Lipschitz analysis*, volume 100 of *Report. University of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics*. University of Jyväskylä, Jyväskylä, 2005.

[41] Shouchuan **Hu** and Nikolaos S. **Papageorgiou**. Solutions and multiple solutions for problems with the p-Laplacian. *Monatsh. Math.*, 150(4) :309–326, 2007.

[42] Shouchuan **Hu** and Nikolas S. **Papageorgiou**. Multiple positive solutions for nonlinear eigenvalue problems with the p-Laplacian. *Nonlinear Anal.*, 69(12) :4286–4300, 2008.

[43] Youssef **Jabri**. *The mountain pass theorem*, volume 95 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. Variants, generalizations and some applications.

[44] Otared **Kavian**. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, volume 13 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Paris, 1993.

[45] Ondrej **Kováčik** and Jiří **Rákosník**. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Math. J.*, 41(116)(4) :592–618, 1991.

[46] M. A. **Krasnosel skiĭ** and Ja. B. **Rutickiĭ**. *Convex functions and Orlicz spaces.* Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[47] O. A. **Ladyzhenskaya** and N. N. **Uraltseva**. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa.* Izdat. "Nauka", Moscow, 1973. Second edition, revised.

[48] An **Lê**. Eigenvalue problems for the p-Laplacian. *Nonlinear Anal.*, 64(5) :1057–1099, 2006.

[49] Jean **Leray** and Jacques-Louis **Lions**. Quelques résulatats de Višik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder. *Bull. Soc. Math. France*, 93 :97–107, 1965.

[50] J.-L. **Lions**. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Dunod, 1969.

[51] P.-L. **Lions**. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(1) :145–201, 1985.

[52] P.-L. **Lions**. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 1(2) :45–121, 1985.

[53] Salvatore A. **Marano** and Nikolaos S. **Papageorgiou**. On some elliptic hemivariational and variational-hemivariational inequalities. *Nonlinear Anal.*, 62(4) :757–774, 2005.

[54] Salvatore A. **Marano** and Nikolaos S. **Papageorgiou**. On a Neumann problem with p-Laplacian and non-smooth potential. *Differential Integral Equations*, 19(11) :1301–1320, 2006.

[55] Vladimir G. **Maz'ja**. *Sobolev spaces.* Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Translated from the Russian by T. O. Shaposhnikova.

[56] Mihai **Mihăilescu**, Gheorghe **Moroşanu**, and Vicenţiu **Rădulescu**. Eigenvalue problems for anisotropic elliptic equations : an Orlicz-Sobolev space setting. *Nonlinear Anal.*, 73(10) :3239–3253, 2010.

[57] Mihai **Mihăilescu**, Patrizia **Pucci**, and Vicenţiu **Rădulescu**. Eigenvalue problems for anisotropic quasilinear elliptic equations with variable exponent. *J. Math. Anal. Appl.*, 340(1) :687–698, 2008.

[58] Mihai **Mihăilescu** and Vicenţiu **Rădulescu**. A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 462(2073) :2625–2641, 2006.

[59] Mihai **Mihăilescu** and Vicenţiu **Rădulescu**. Eigenvalue problems associated with nonhomogeneous differential operators in Orlicz-Sobolev spaces. *Anal. Appl. (Singap.)*, 6(1) :83–98, 2008.

[60] Mihai **Mihăilescu** and Vicenţiu **Rădulescu**. Neumann problems associated to nonhomogeneous differential operators in Orlicz-Sobolev spaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(6) :2087–2111, 2008.

[61] Mihai **Mihăilescu** and Vicenţiu **Rădulescu**. Spectrum in an unbounded interval for a class of nonhomogeneous differential operators. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 40(6) :972–984, 2008.

[62] Mihai **Mihăilescu**, Vicenţiu **Rădulescu**, and Dušan **Repovš**. On a nonhomogeneous eigenvalue problem involving a potential : an Orlicz-Sobolev space setting. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 93(2) :132–148, 2010.

[63] Jean-Jacques **Moreau**. La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 267 :A954–A957, 1968.

[64] D. **Motreanu** and V. **Rădulescu**. *Variational and non-variational methods in nonlinear analysis and boundary value problems*, volume 67 of *Nonconvex Optimization and its Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[65] Julian **Musielak**. *Orlicz spaces and modular spaces*, volume 1034 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[66] Hidegorô **Nakano**. *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces.* Maruzen Co. Ltd., Tokyo, 1950.

[67] Z. **Naniewicz** and P. D. **Panagiotopoulos**. *Mathematical theory of hemivariational inequalities and applications*, volume 188 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker Inc., New York, 1995.

[68] P. D. **Panagiotopoulos**. Nonconvex superpotentials in the sense of F. H. Clarke and applications. *Mech. Res. Comm.*, 8(6) :335–340, 1981.

[69] P. D. **Panagiotopoulos**. Hemivariational inequalities, applications to mechanics and control problems. In *Nonsmooth optimization : methods and applications (Erice, 1991)*, pages 259–280. Gordon and Breach, Montreux, 1992.

[70] P. D. **Panagiotopoulos**. *Hemivariational inequalities*. Springer-Verlag, Berlin, 1993. Applications in mechanics and engineering.

[71] Nikolaos S. **Papageorgiou**, Sandrina Rafaela **Andrade Santos**, and Vasile **Staicu**. Eigenvalue problems for hemivariational inequalities. *Set-Valued Anal.*, 16(7-8) :1061–1087, 2008.

[72] Francesca **Papalini**. Nonlinear eigenvalue Neumann problems with discontinuities. *J. Math. Anal. Appl.*, 273(1) :137–152, 2002.

[73] P. H. **Rabinowitz**. Variational methods for nonlinear eigenvalue problems. In *Eigenvalues of non-linear problems (Centro Internaz. Mat. Estivo (C.I.M.E.), III Ciclo, Varenna, 1974)*, pages 139–195. Edizioni Cremonese, Rome, 1974.

[74] Paul H. **Rabinowitz**. A minimax principle and applications to elliptic partial differential equations. In *Nonlinear partial differential equations and applications (Proc. Special Sem., Indiana Univ., Bloomington, Ind., 1976–1977)*, pages 97–115. Lecture Notes in Math., Vol. 648. Springer, Berlin, 1978.

[75] Paul H. **Rabinowitz**. Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations. In *Nonlinear analysis (collection of papers in honor of Erich H. Rothe)*, pages 161–177. Academic Press, New York, 1978.

[76] Paul H. **Rabinowitz**. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, volume 65 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986.

[77] Jiří **Rákosník**. Some remarks to anisotropic Sobolev spaces. I. *Beiträge Anal.*, (13) :55–68, 1979.

[78] Jiří **Rákosník**. Some remarks to anisotropic Sobolev spaces. II. *Beiträge Anal.*, (15) :127–140 (1981), 1980.

[79] J.-M. **Rakotoson**. A compactness result for quasilinear problems : application to parabolic equations with measures as data. *Appl. Math. Lett.*, 4(3) :31–33, 1991.

[80] J.-M. **Rakotoson**. Generalized solutions in a new type of sets for problems with measures as data. *Differential Integral Equations*, 6(1) :27–36, 1993.

[81] Jean-Émile **Rakotoson** and Jean-Michel **Rakotoson**. *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*. Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, 1999.

[82] Jean-Michel **Rakotoson**. Quasilinear elliptic problems with measures as data. *Differential Integral Equations*, 4(3) :449–457, 1991.

[83] Jean-Michel **Rakotoson**. Équations et inéquations avec des données mesures. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 314(2) :105–107, 1992.

[84] Jean-Michel **Rakotoson**. *Réarrangement relatif*, volume 64 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Berlin, 2008. Un instrument d'estimations dans les problèmes aux limites. [An estimation tool for limit problems].

[85] Jean-Michel **Rakotoson**. Generalized eigenvalue problem for totally discontinuous operators. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 28(1) :343–373, 2010.

[86] M. M. **Rao** and Z. D. **Ren**. *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[87] Michael **Reed** and Barry **Simon**. *Methods of modern mathematical physics. I*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second edition, 1980. Functional analysis.

[88] Vicenţiu **Rădulescu** and Dušan **Repovš**. Existence results for variational-hemivariational problems with lack of convexity. *Nonlinear Anal.*, 73(1) :99–104, 2010.

[89] Michael **Ruzicka**. *Electrorheological fluids : modeling and mathematical theory*, volume 1748 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[90] Shu Zhong **Shi**. Ekeland's variational principle and the mountain pass lemma. *Acta Math. Sinica (N.S.)*, 1(4) :348–355, 1985.

[91] Jacques **Simon**. Régularité de la solution d'une équation non linéaire dans $\mathbf{R}^N$. In *Journées d'Analyse Non Linéaire (Proc. Conf., Besançon, 1977)*, volume 665 of *Lecture Notes in Math.*, pages 205–227. Springer, Berlin, 1978.

[92] Mario **Troisi**. Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi. *Ricerche Mat.*, 18 :3–24, 1969.

[93] Vasiliĭ V. **Zhikov**. On some variational problems. *Russian J. Math. Phys.*, 5(1) :105–116 (1998), 1997.

Thèse de **Houssam CHRAYTEH**

Problèmes de valeurs propres pour des opérateurs $\overrightarrow{p}$-multivoques

Résumé L'objectif de notre recherche est d'étudier l'existence et la régularité des solutions pour des problèmes de valeurs propres faisant intervenir un opérateur $\overrightarrow{p}$-multivoque $A : \mathbf{V} \to \mathcal{P}(\mathbf{V}^*)$ sur un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Par l'intermédiaire des $\mathcal{N}$-fonctions, nous construisons un opérateur $\overrightarrow{p}$-multivoque de Leray-Lions "fortement monotone" sur un espace d'Orlicz-Sobolev anisotrope.
Nous signalons que la formulation théorique des problèmes associés à cet opérateur repose essentiellement sur la notion de sous-différentielle de Clarke, pour cela, nous donnons des nouvelles méthodes variationnelles qui correspondent à la résolution de ces problèmes dans le cas "sous-critique" dans lequel la compacité joue un rôle important puis dans le cas "critique" lorsque nous perdons la compacité.
Différentes applications sont données pour illustrer nos résultats abstraits, par exemple, un opérateur anisotrope aux exposants variables et un opérateur avec un poids de type Hardy.

Mot-clefs Valeurs propres non linéaires, Opérateurs multivoques, Sous-différentielle de Clarke, Points critiques, Théorème de Mountain Pass, Normes de fonction de Banach, Espaces d'Orlicz-Sobolev anisotropes, Réarrangement relatif.

Eigenvalue problems for $\overrightarrow{p}$-multivoque operators

Abstract The aim of our research is to study the existence and regularity of solutions for eigenvalue problems involving a $\overrightarrow{p}$-multivoque operator $A : \mathbf{V} \to \mathcal{P}(\mathbf{V}^*)$ on a smooth domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Through $\mathcal{N}$-functions, we construct a $\overrightarrow{p}$-multivoque Leray-Lions "strongly monotonic" operator on an anisotropic Orlicz-Sobolev space.
We note that the theoretical formulation of problems related to such operator is essentially based on the notion of Clarke subdifferential. For this reason, we introduce new variational methods that match the resolution of these issues in the "subcritical" case where compactness plays an important role and "critical" case when we lose compactness.
Various applications are given to illustrate our abstract results, for example, an anisotropic operator with variable exponents and an operator with a Hardy type weight.

Keywords Nonlinear eigenvalues, Multivoque operators, Clarke subdifferential, Critical points, Mountain Pass theorem, Banach function norms, Anisotropic Orlicz-Sobolev spaces, Relative rearrangement.