Problèmes de valeurs propres pour des opérateurs $\overrightarrow{\rho}$-multivoques

Houssam CHRAYTEH

Sous la direction de J.-M. RAKOTOSON
Laboratoire de Mathématiques et Applications - Université de Poitiers

Jeudi 8 Mars 2012

JURY:
V. Rădulescu, M. Pašić, A. El Soufi, C. Amrouche,
A. Miranville, M. Petcu, A. El Hamidi et J.-M. Rakotoson

Plan de l'exposé

Origine du problème

Soit f une fonction sur un espace produit $\Omega \times \mathbb{R}$. Considérons l'équation semilinéaire:

$$-\Delta u = f(x,u). \tag{1}$$

Cette équation peut s'écrire aussi sous la forme d'une divergence:

$$-\mathrm{div}\, \nabla u = f(x,u). \tag{2}$$

L'équation (2) a été généralisée de la manière suivante:

$$-\mathrm{div}\, \varphi(x, \nabla u) = f(x,u). \tag{3}$$

Lors de la résolution de (3), on est amené à considérer l'équation d'Euler associée:

$$E(v) = \int_\Omega \Phi(x, \nabla v(x))\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x, v(x))\mathrm{d}x, \quad v \in \mathbf{V}. \tag{4}$$

Un exemple de Φ utilisé en traitement d'image:

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{q(x)}|t|^{q(x)} & \text{si} \quad |t| \leqslant 1, \\ \\ \dfrac{1}{m}|t|^{m} + \left(\dfrac{1}{q(x)} - \dfrac{1}{m}\right) & \text{si} \quad |t| > 1, \end{cases} \qquad 1 < q(x) \leqslant 2 \text{ et } m \geqslant 1.$$

$\Phi(x,\cdot)$ est Fréchet-différentiable $\rightsquigarrow$ Le problème de minimisation reste dans le cadre "univoque".

- Peut-on considérer des fonctions $\Phi(x,\cdot)$ non différentiables au sens classique?
- Peut-on résoudre le problème

$$-\mathrm{div}\,\varphi(x,\nabla u) = f(x,u).$$

lorsque la fonction $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \varphi(x,\xi)$ est discontinue?

Présentation du problème

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réflexif. On note $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ le produit de dualité. Étant donné

- un espace de fonction de Banach-Sobolev $\mathbf{V}$ de dual $\mathbf{V}^*$,
- un opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque $A : \mathbf{V} \to 2^{\mathbf{V}^*} \doteq \mathcal{P}(\mathbf{V}^*)$,
- une fonction localement Lipschitzienne $j : X \to \mathbb{R}$ (sous-différentiable au sens de Clarke),

on va s'intéresser au problème de valeurs propres suivant:

Problème: Trouver $u \in \mathbf{V}, u \not\equiv 0$, $\lambda > 0$ tels que $0 \in Au - \lambda\partial j(u)$.

En exemple ici, on considérera

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \left\{ v \in L(\Omega, \rho_0) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L(\Omega, \rho_i),\ i = 1, \dots, N \text{ et } \gamma_0 v = 0 \right\}. \\ &\doteq W_0^{1,\rho_0,\dots,\rho_N}(\Omega) \hookrightarrow X. \quad \gamma_0 \text{ Opérateur de trace.}\end{aligned}$$

Nous distinguons deux cas:

- Si $\mathbf{V} \hookrightarrow\hookrightarrow X$ est une injection compacte, on dit que le problème est sous-critique.
- Si l'injection $\mathbf{V} \hookrightarrow X$ n'est plus compacte, on parlera de problème critique.

Définition [J.-M. Rakotoson: DCDS(2010), Chrayteh & Rakotoson: NA(2010)]

Sous de bonnes conditions sur les normes de fonction ρ_i et les fonctions Φ_i, on peut alors définir l'opérateur $A : \mathbf{V} \to 2^{\mathbf{V}^*}$ par:

$$Au = -\mathrm{div}_{\overrightarrow{\rho}}\left(\partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right), \quad \overrightarrow{\rho} = (\rho_0, \ldots, \rho_N).$$

L'espace dual de $\mathbf{V}$, noté $\mathbf{V}^*$ est donné par [J.-M. Rakotoson: DCDS(2010)]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^* &= \left(W_0^{1,\rho_0,\ldots,\rho_N}(\Omega)\right)^* \\
&= \Bigg\{ T : \exists\ f_0,\ldots,f_N \text{ où } f_i \in L(\Omega,\rho_i')(\text{espace dual de } L(\Omega,\rho_i)) \text{ t.q.} \\
&\qquad \langle T, v\rangle = \int_\Omega f_0(x)v(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x\,, \forall\, v\in\mathbf{V}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Et pour tout point $u\in\mathbf{V}$, l'opérateur $A:\mathbf{V}\to 2^{\mathbf{V}^*}$ est donné par:

$$\begin{aligned}
Au &\doteq \Bigg\{ T\in\mathbf{V}^* : \exists\ w_0^*(x)\in\partial\Phi_0(x,u(x)) \text{ et } w_i^*(x)\in\partial\Phi_i\left(x,\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \text{ t.q.} \\
&\qquad \langle T, v\rangle = \int_\Omega w_0^*(x)v(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^N \int_\Omega w_i^*(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x\,, \forall\, v\in\mathbf{V}\Bigg\}
\end{aligned}$$

Alors $Au \;=\; -\mathrm{div}_{\vec{\rho}}\left(\partial\Phi_i\left(x,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)$ sera noté $w_0^* - \sum_{i=1}^N \frac{\partial w_i^*}{\partial x_i}$.

Exemples concrets

Exemple 1: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné régulier. Supposons que

$$1 < q < 2 < q_M < p_M < 2^* = \frac{2N}{N-2}.$$

On considère $\mathbf{V} = H_0^1(\Omega)$ et $X = L^{p_M}(\Omega)$, $\qquad$ ($\mathbf{V} \hookrightarrow\hookrightarrow X$ compacte).

$$J(v) \doteq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} \int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leqslant 1\right\}} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{q} \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{N} \int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| > 1\right\}} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{2} \mathrm{d}x\right).$$

$$j(v) \doteq \frac{1}{p_M}\left(\int_{\{|v| \leqslant 1\}} |v|^{q_M} \mathrm{d}x + \int_{\{|v| > 1\}} |v|^{p_M} \mathrm{d}x\right).$$

Alors, $\quad \forall\, \lambda > 0,\ \exists\, u \in \mathbf{V},\ u \not\equiv 0$ et $u \geqslant 0$ telle que

$$0 \in \partial J(u) - \lambda \partial j(u),$$

i.e. u est solution du problème: $0 \in Au - \lambda \partial j(u)$, $\quad$ où $u \xrightarrow{A} \partial J(u)$.

En d'autres termes, si on définit

$$\Phi_i(x,t) \doteq \begin{cases} |t|^{q} & \text{si } |t| \leqslant 1, \\ |t|^{2} & \text{si } |t| > 1, \end{cases} \qquad \Phi_M(x,t) \doteq \begin{cases} |t|^{q_M} & \text{si } |t| \leqslant 1, \\ |t|^{p_M} & \text{si } |t| > 1, \end{cases}$$

alors il existe $w_i^*(x)$ pour $i = 1, \ldots, N$ et $w_M^*(x)$ tels que on a

$$2\ w_i^*(x) \in \partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) \text{ p.p.} \quad ; \quad p_M\ w_M^*(x) \in \partial\Phi_M\left(x, u(x)\right) \text{ p.p.}$$

et

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega w_i^*(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega w_M^*(x) v(x) \mathrm{d}x, \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Ce que nous définissons comme

$$-\mathrm{div}_{\overrightarrow{\rho}} \left(\partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)\right) \doteq -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w_i^*}{\partial x_i} = \lambda\ w_M^*(x).$$

$\boxed{\text{Exemple 2:}}$ Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné régulier. Supposons que

$$1 < q_M < p_M < 2^* \quad \text{et} \quad q_M < 2.$$

On considère $\mathbf{V} = H_0^1(\Omega)$ et $X = L^{2^*}(\Omega)$, $\qquad$ ($\mathbf{V} \hookrightarrow X$ n'est plus compacte).

$$J(v) \doteq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \mathrm{d}x.$$

$$j(v) \doteq \int_{\{|v| \leqslant 1\}} |v|^{q_M} \, \mathrm{d}x + \int_{\{|v|>1\}} |v|^{p_M} \, \mathrm{d}x.$$

Alors, il existe $\lambda^* > 0$ tel que $\forall\, \lambda \in]0, \lambda^*[$, $\quad \exists\, u \in \mathbf{V}$, $u \not\equiv 0$ et $u \geqslant 0$ solution de

$$|u|^{2^*-2} u \in -\Delta u - \lambda \partial j(u).$$

Remarque: Revenons à la fonctionnelle J de l'Exemple 1:

$$J(v) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\leqslant 1\right\}}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{q}\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{N}\int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|>1\right\}}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{2}\mathrm{d}x\right).$$

Si $q = 2$, alors $\partial J(u) = \{-\Delta u\}$: L'opérateur principal est alors "univoque" et ces cas ont été déjà abordé par différents auteurs comme L. Gasinski, S. Hu, N.S. Papageorgiou, F. Papalina,...
Mais on s'intéresse surtout aux opérateurs à coefficients discontinus.

Revenons au Problème général

- Quelles sont les **conditions sur l'opérateur principal** A?
- Faut-il imposer des **conditions sur** j?
- Par quelle **méthode variationnelle** on résout le problème?

Norme de Fonction de Banach

Soit $L^0_+(\Omega) \doteq \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable et positive}\right\}$.

Définition [voir C. Bennett & R. Sharpley 1988]

$\rho : L^0_+(\Omega) \to [0; +\infty]$ est dite norme de fonction de Banach si $\forall f$, g et f_n dans $L^0_+(\Omega)$ et $\forall\ E \subset \Omega$ mesurable, on a

N1. $\rho(f) = 0 \iff f = 0$ p.p.

N2. $\rho(\lambda f) = \lambda \rho(f)$, $\forall\ \lambda > 0$.

N3. $\rho(f + g) \leqslant \rho(f) + \rho(g)$.

N4. $f \leqslant g$ p.p. $\Longrightarrow \rho(f) \leqslant \rho(g)$.

N5. $f_n \nearrow f$ p.p. $\Longrightarrow \rho(f_n) \longrightarrow \rho(f)$.

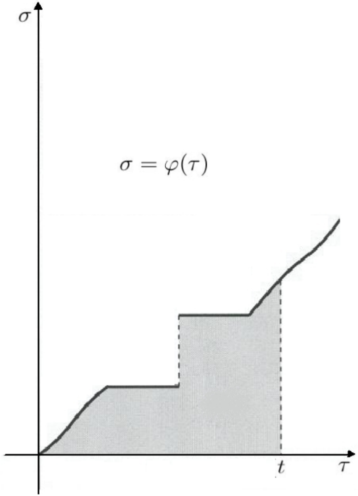
N6. $|E| < +\infty \Longrightarrow \rho(\chi_E) < +\infty$.

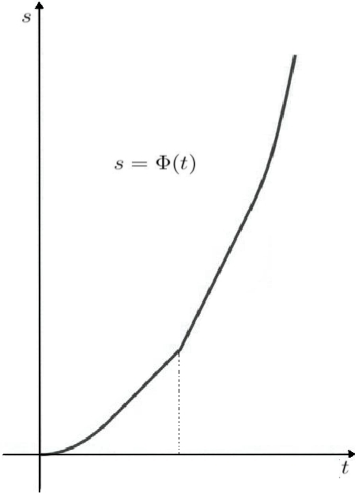
N7. $|E| < +\infty \Longrightarrow \displaystyle\int_E f\,\mathrm{d}x \leqslant c\ \rho(f)$, où $0 < c(E, \rho) < +\infty$ est une constante indépendante de f.

Quelques exemples de norme de fonction de Banach:

1. $\rho(u) = \|u\|_{L^p(\Omega)}$ pour $1 < p < +\infty$. (Espace de Lebesgue classique).
2. $\rho(u) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leqslant 1 \right\}$ pour $p \in L^\infty(\Omega)$ et $\operatorname*{inf\,ess}_{x\in\Omega} p(x) > 1$. (Espace de Lebesgue à exposant variable).
3. $\rho(u) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \Phi\left(x, \frac{u(x)}{\lambda}\right) dx \leqslant 1 \right\}$ où Φ est une N-fonction (Espace d'Orlicz). Il existe $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. on a p.p.
   - $\varphi(x, 0) = 0$, $\varphi(x, t) > 0$ si $t > 0$, $\lim_{t\to\infty} \operatorname*{inf\,ess}_{x\in\Omega} \varphi(x, t) = +\infty$.
   - $\varphi(x, \cdot)$ est croissante sur $[0; +\infty[$
   - $\varphi(x, \cdot)$ est continue à droite sur $[0; +\infty[$.
   - $\Phi(x, t) = \int_0^{|t|} \varphi(x, s)\, ds$, [voir R. Adams 1975].

$\boxed{\text{Remarque:}}$ La norme dans les deux derniers cas est dite "norme de Luxemburg" ou "norme modulaire".


σ
$\sigma = \varphi(\tau)$
t
τ


s
$s = \Phi(t)$
t

Sous-différentielle des fonctions convexes

Soit $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espace de Banach réflexif et $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ le produit de dualité (exemple: $Y = L(\Omega, \rho)$ un espace de fonction de Banach).

Définitions [voir I. Ekeland & R. Temam 1999]

- Soit $\Phi : Y \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. La sous-différentielle de Φ en x est l'ensemble défini par
$\partial\Phi(x) = \Big\{x^* \in Y^* : \langle x^*, y - x \rangle_Y \leqslant \Phi(y) - \Phi(x),\ \forall y \in Y\Big\}.$
- Ceci définit une fonction multivoque $\partial\Phi : Y \to \mathcal{P}(Y^*)$.
- Tout élément x^* de $\partial\Phi(x)$ est dit sous-gradient de Φ en x.

F.H. Clarke a étendu la notion de la sous-différentielle à des fonctions localement Lipschitziennes non nécessairement convexes (ni même différentiables).

Sous-différentielle de Clarke

Définitions [voir F.H. Clarke 1975]

- $\Phi : Y \to \mathbb{R}$ est dite localement Lipschitzienne si $\forall\, v \in Y$, $\exists\, \mathcal{U}(v)$ voisinage de v et une constante $K(v) > 0$ tels que

$$|\Phi(u) - \Phi(w)| \leqslant K(v)\, \|u - w\|_Y \ , \ \forall\, u, w \in \mathcal{U}(v).$$

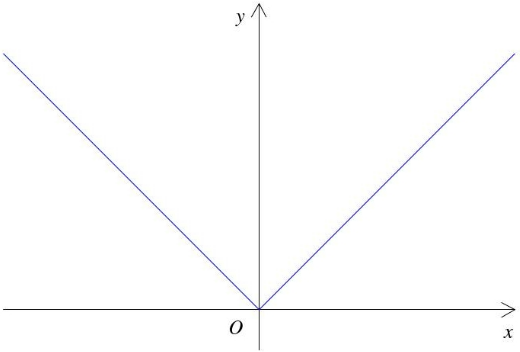
- La dérivée directionnelle généralisée de Φ en $u \in Y$ dans la direction $v \in Y$ est donnée par

$$\Phi^0(u; v) = \limsup_{\lambda \searrow 0,\ h \to 0} \frac{\Phi(u + h + \lambda v) - \Phi(u + h)}{\lambda}.$$

- La sous-différentielle généralisée de Clarke de Φ en $u \in Y$ est l'ensemble défini par

$$\partial\Phi(u) = \Big\{\xi^* \in Y^* : \langle \xi^*, v\rangle_Y \leqslant \Phi^0(u; v), \forall v \in Y\Big\}.$$

$$f : x \mapsto |x|$$



$$\partial f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Proposition [voir F.H. Clarke 1990]

Si $\Phi : Y \to \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne et $K_u > 0$ est la constante de Lipschitz au voisinage de $u \in Y$, **alors** on a

- $\partial\Phi(u) \neq \emptyset$, convexe et faiblement*-compact dans Y^*.
- $\forall \xi^* \in \partial\Phi(u)$, $\|\xi^*\|_{Y^*} \leqslant K_u$, où $\|\cdot\|_{Y^*}$ est la norme dans Y^*.
- $\forall v \in Y$, $\Phi^0(u; v) = \max\Big\{ \langle \xi^*; v\rangle_Y : \xi^* \in \partial\Phi(u)\Big\}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\partial(\lambda\Phi)(u) = \lambda\partial\Phi(u)$.
- Si u est un extremum local (maximum ou minimum) de Φ, alors $0 \in \partial\Phi(u)$ (u est dit point critique de Φ).
- Si $\Phi \in C^1(Y;\mathbb{R})$, alors $\partial\Phi(u)$ se réduit à un singleton: $\partial\Phi(u) = \{\Phi'(u)\}$.
- Si $\Phi_i : Y \to \mathbb{R}$ loc. Lip. alors $\partial\left(\sum_{i=1}^{N} \Phi_i\right)(u) \subseteq \sum_{i=1}^{N} \partial\Phi_i(u)$.

Soit $(\mathbf{V}, \|\cdot\|_{\mathbf{V}})$ un espace de Banach réflexif, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbf{V}}$ le produit de dualité, (exemple: $\mathbf{V} = W_0^{1,\rho_0,\ldots,\rho_N}(\Omega)$ un espace de fonction de Banach-Sobolev).

Définitions

- Un opérateur multivoque $A : \mathbf{V} \to \mathcal{P}(\mathbf{V}^*)$ est dit monotone si $\forall u_1 \in \mathbf{V}$, $\forall u_2 \in \mathbf{V}$, $\forall w_1^* \in Au_1$ et $\forall w_2^* \in Au_2$, on a

$$\langle w_1^* - w_2^* \,;\, u_1 - u_2\rangle_{\mathbf{V}} \geqslant 0 \quad \text{[voir H. Brézis 1973].}$$

- Un opérateur monotone $A : \mathbf{V} \to \mathcal{P}(\mathbf{V}^*)$ est dit fortement monotone si
  1. $\forall\, (u_n)_n$ suite dans $\mathbf{V}$ qui converge faiblement vers u, et
  2. $\lim_{n\to+\infty} \langle w_n^* - w^* \,;\, u_n - u\rangle_{\mathbf{V}} = 0$, pour un certain $w_n^* \in Au_n$ et pour un certain $w^* \in Au$,

  on a alors u_n converge vers u fortement dans $\mathbf{V}$ [J.-M. Rakotoson 2010].

$\boxed{\text{Remarque:}}$ Pour le cas univoque, on utilise la notion d'opérateurs pseudo-monotones, de type $(S)_+, \ldots$ [L. Gasinski & N.S. Papageorgiou 2005].

Soient $(\mathbf{V}, \|\cdot\|_{\mathbf{V}})$ et $(X, \|\cdot\|_X)$ deux espaces de Banach réflexifs.

Lemme (voir J.-M. Rakotoson: DCDS(2010))

Si $J : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ et $j : X \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions localement Lipschitziennes et si

(H1) $\mathbf{V} \hookrightarrow\hookrightarrow X$ est une injection compacte.

(H2) $A : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & 2^{V^*} \\ u & \longrightarrow & \partial J(u) \end{array}$ est fortement monotone.

(H3) $\exists\, \beta > 0,\ \exists\, c_0 \geqslant 0$ t.q. $\forall\, u \in X$, on a

$$\beta j(u) \leqslant \inf_{v^* \in \partial j(u)} \langle v^*; u\rangle_X + c_0\beta.$$

(H4) $\exists\, c_1 > 0,\ c_2 \geqslant 0$ t.q. $\forall\, u \in \mathbf{V}$, on a

$$\frac{1}{\beta} \sup_{w^* \in \partial J(u)} \langle w^*; u\rangle_{\mathbf{V}} - c_2 + c_1\|u\|_{\mathbf{V}} \leqslant J(u).$$

où $J^0(u; u) = \sup\limits_{w^* \in \partial J(u)} \langle w^*; u\rangle_{\mathbf{V}}$ et $-j^0(u; -u) = \inf\limits_{v^* \in \partial j(u)} \langle v^*; u\rangle_X$.

Alors, $F(u) \doteq J(u) - j(u),\ u \in \mathbf{V}$ vérifie la condition de Palais-Smale.

Plus précisément, pour toute suite $(u_n)_n \subset \mathbf{V}$ telle que:

$$\left.\begin{array}{l} F(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta, \\ \lambda^F(u_n) \doteq \inf\left\{\|w_n^*\|_{\mathbf{V}^*} : w_n^* \in \partial F(u_n)\right\} \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\exists\ (u_{n_k})_k$ sous-suite qui converge fortement dans $\mathbf{V}$.

De plus, on impose les conditions suivantes pour que F vérifie la géométrie de "Mountain-Pass".

Théorème (voir J.-M. Rakotoson: DCDS(2010))

Sous les hypothèses (H1)-(H4). **Si** on suppose de plus que

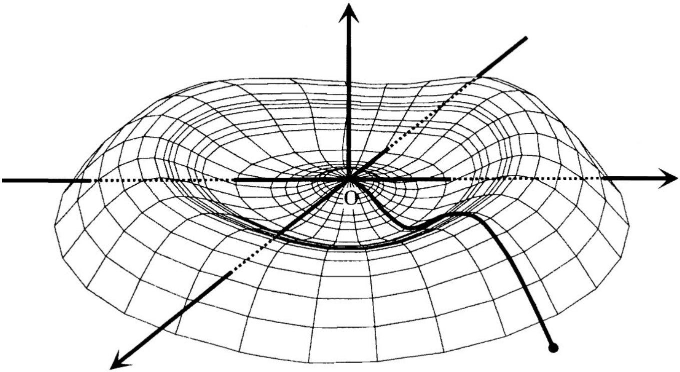
(H5) $F(0) = 0$ et $\exists\ r_0 > 0,\ R_0 > 0$ tels que

$$\inf_{\|u\|_{\mathbf{V}}=r} J(u) > 0 \quad \text{si } 0 < r < r_0 \quad \text{et} \quad J(u) > 0 \quad \text{si } \|u\|_{\mathbf{V}} > R_0.$$

(H6) $$\lim_{\|u\|_{\mathbf{V}}\to 0} \frac{j(u)}{J(u)} = 0 \quad \text{et} \quad \exists\ u_0 \neq 0 \text{ t.q. } \limsup_{t\to+\infty} \frac{j(tu_0)}{J(tu_0)} > 1.$$

Alors, $\exists\ u \in \mathbf{V}$, $u \neq 0$ tel que $0 \in \partial F(u)$, $F(u) = \beta > 0$.

Les hypothèses (H5) et (H6) montrent que la fonctionnelle $F(u) \doteq J(u) - j(u)$ vérifie la géométrie de "Mountain-Pass":



Proposition (voir R. Adams 1975)

Soit $\Phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une N-fonction. Alors, on a p.p.

- $\Phi(x,\cdot)$ est positive, paire, continue et $\Phi(x,0) = 0$.
- $\Phi(x,\cdot)$ est convexe et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Définitions (voir J. Musielak 1983)

- $\overline{\Phi}(x,t) \doteq \max\limits_{s \geqslant 0}(ts - \Phi(x,s))$ est la N-fonction complémentaire de Φ.
- On dit que Φ vérifie la condition $(\triangle_2)$ si $\exists\, K > 0$ t.q. $\forall\, t \geqslant 0$, on a $\Phi(x,2t) \leqslant K\Phi(x,t)$ p.p.
- On définit l'espace d'Orlicz
$$L^{\Phi}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : \int_{\Omega} \Phi\Big(x, u(x)\Big)\mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

$L^{\Phi}(\Omega)$ muni de la norme de Luxemburg est un espace de Banach.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ borné régulier. On considère $\varphi_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, N$ telle que [voir Chrayteh & Rakotoson: NA(2010)]:

(C1) p.p. $x \in \Omega$, la fonction $\varphi_i(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire, strictement croissante et $\varphi_i(x, 0) = 0$.

(C2) $\varphi_i(x, \cdot) : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue à droite et $\lim\limits_{t \to +\infty} \operatorname*{inf\,ess}\limits_{\Omega} \varphi_i(x, t) = +\infty$.

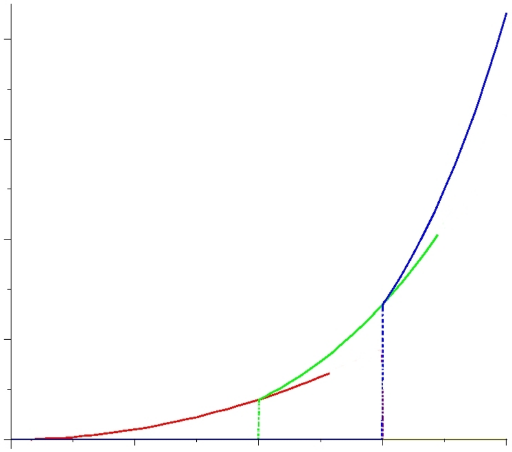
(C3) Il existe $2m$ nombres réels (points de discontinuité) : $\delta_1^i < \ldots < \delta_{2m}^i$ de sorte que p.p. $x \in \Omega$, $\varphi_i(x, \cdot) : \mathbb{R} \setminus \left\{\delta_1^i, \ldots, \delta_{2m}^i\right\} \to \mathbb{R}$ soit une fonction continue.

Sous ces hypothèses, on définit la fonction suivante:

$$\Phi_i(x, t) = \int_0^{|t|} \varphi_i(x, s)\, ds, \quad \forall\, x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}.$$

On montre que

- p.p. $x \in \Omega$, $\Phi_i\,(x, \cdot)$ est une N-fonction.
- $\Phi_i\,(x, \cdot)$ est continue, convexe, paire, positive.



Un exemple de $\Phi_i\,(x,\cdot)$.

Vu l'importance de la condition (Δ_2) dans la manipulation des espaces d'Orlicz (définition de l'espace, réflexivité...), on suppose de plus que:

(C4) $\exists\ \underline{\alpha} > 1$, $\exists \overline{\alpha} > 1$, t.q. p.p., $\forall\ t \in \mathbb{R}$ et $\forall\ w_i(x,t) \in \partial\Phi_i(x,t)$, on a

$$\underline{\alpha}\ \Phi_i(x,t) \leqslant t\ w_i(x,t) \leqslant \overline{\alpha}\ \Phi_i(x,t).$$

Proposition (voir M.A. Krasnosel'skii & Y.B. Rutickii 1961)

Sous l'hypothèse (C4), on a

$$\sigma^{\underline{\alpha}}\ \Phi_i(x,t) \leqslant \Phi_i(x,\sigma t) \leqslant \sigma^{\overline{\alpha}}\ \Phi_i(x,t), \quad \forall\ t > 0,\ \forall\ \sigma > 1.$$

On considère l'espace d'Orlicz-Sobolev associé à $(\Phi_1, \ldots, \Phi_N)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= W_0^{1,\Phi_1,\ldots,\Phi_N}(\Omega) \\ &= \left\{ v \in L^1(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^{\Phi_i}(\Omega),\ i = 1,\ldots,N,\ \gamma_0 v = 0 \right\}. \end{aligned}$$

$L^{\Phi_i}(\Omega)$ muni de la norme $\|u\|_{\Phi_i} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \Phi_i\left(x, \frac{u(x)}{\lambda}\right) \mathrm{d}x \leqslant 1 \right\}$.

On définit $J : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ telle que $J(u) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i \left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) \mathrm{d}x.$

Théorème (voir Chrayteh & Rakotoson: NA(2010))

Sous les hypothèses (C1)-(C4), l'opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque de Leray-Lions défini par:

$$Au = -\mathrm{div}_{\overrightarrow{\rho}} \left(\partial \Phi_i \left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) \right)$$

est fortement monotone sur $\mathbf{V}$.

i.e. **Si** $(u_n)_n$ une suite bornée dans $\mathbf{V}$ telle que

- $u_n \rightharpoonup u$ faiblement et si de plus
- $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left(w_{ni}^*(x) - w_i^*(x) \right) \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) \mathrm{d}x = 0$, pour un certain $w_{ni}^*(x) \in \partial \Phi_i \left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \right)$ et certain $w_i^*(x) \in \partial \Phi_i \left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)$,

on a alors $u_n \to u$ fortement dans $\mathbf{V}$.

Cas sous-critique

Comme application, on considère un problème de valeurs propres aux exposants variables avec un opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque et fortement monotone:

Soient $\delta_i > 0$ N réels, q_i, $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$ $2N$ fonctions mesurables bornées sur $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ borné. On note (analogue pour q_i):

$$p_{i_+} = \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} p_i(x), \qquad p_{i_-} = \inf_{x\in\Omega} \operatorname{ess} p_i(x),$$

$$p_+^+ = \max\left\{p_{1_+}, \ldots, p_{N_+}\right\}, \qquad p_-^- = \min\left\{p_{1_-}, \ldots, p_{N_-}\right\}.$$

On suppose que

$$2 \leqslant q_{i_-} \leqslant q_i(x) \leqslant q_{i_+} < p_{i_-} \leqslant p_i(x) \leqslant p_{i_+} < +\infty.$$

Considérons la fonction $\Phi_i : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi_i(x,t) = \begin{cases} \alpha_i(x)|t|^{q_i(x)} & \text{si } \ |t| \leqslant \delta_i, \\ |t|^{p_i(x)} & \text{si } \ |t| > \delta_i, \end{cases} \qquad \text{où } \alpha_i(x) = (\delta_i)^{p_i(x)-q_i(x)}.$$

La fonction $\Phi_i(x, \cdot)$ est localement Lipschitzienne (convexe) et sa sous-différentielle est donnée par

$$\partial\Phi_i(x,t) = \begin{cases} q_i(x)\alpha_i(x)|t|^{q_i(x)-2}t & \text{si } \ |t| < \delta_i, \\ p_i(x)|t|^{p_i(x)-2}t & \text{si } \ |t| > \delta_i, \\ \text{sign(t)}\big[q_i(x), p_i(x)\big](\delta_i)^{p_i(x)-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit la fonctionnelle $J : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ par

$$J(v) \doteq \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leqslant \delta_i\right\}} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{q_i(x)} \frac{\alpha_i(x)\mathrm{d}x}{p_i(x)} + \int_{\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| > \delta_i\right\}} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^{p_i(x)} \frac{\mathrm{d}x}{p_i(x)} \right)$$

Toutes les hypothèses (C1)-(C4) sont vérifiées.
Par conséquent, Théorème (Chrayteh & Rakotoson: NA(2010))
$\Downarrow$
L'opérateur $u \xrightarrow{A} \partial J(u)$ est fortement monotone.

Théorème (voir Chrayteh & Rakotoson: NA(2010))

Soient $\delta_M > 0$, $q_M(x)$ et $p_M(x)$ deux fonctions bornées sur Ω telles que

$$2 < (q_M)_- \leqslant q_M(x) \leqslant (q_M)_+ < (p_M)_- \leqslant p_M(x).$$

On définit les fonctions $\Phi_M : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $j : L^{p_M(\cdot)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi_M(x,t) \doteq \begin{cases} \alpha_M(x)|t|^{q_M(x)} & \text{si} \quad |t| \leqslant \delta_M, \\ |t|^{p_M(x)} & \text{si} \quad |t| > \delta_M, \end{cases} \quad \text{où } \alpha_M(x) = (\delta_M)^{(p_M - q_M)(x)}.$$

$$j(v) \doteq \int_{\{|v| \leqslant \delta_M\}} |v|^{q_M(x)} \frac{\alpha_M(x)\mathrm{d}x}{p_M(x)} + \int_{\{|v| > \delta_M\}} |v|^{p_M(x)} \frac{\mathrm{d}x}{p_M(x)}$$

On suppose de plus que

- L'injection $\mathbf{V} \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_M(\cdot)}(\Omega)$ est compacte.
- $(q_M)_- > p_+^+ = \max\left\{p_{1+}, \ldots, p_{N+}\right\}$.

Alors, $\forall\ \lambda > 0$, $\exists\ u \in \mathbf{V}$, $u \not\equiv 0$ et $u \geqslant 0$ t.q. $0 \in \partial J(u) - \lambda \partial j(u)$.

Idée de la preuve:

On considère l'équation d'Euler associée au problème: $F_\lambda(u) \doteq J(u) - \lambda j(u)$.

(1) On montre que la fonctionnelle F_λ satisfait (H1)-(H4), par suite F_λ vérifie la condition de Palais-Smale.

(2) On montre que F_λ satisfait (H5) et (H6) i.e. vérifie la géométrie de "Mountain Pass".

(3) En utilisant un résultat de S.Z. Shi, on déduit que $\exists\,(u_n) \subset \mathbf{V}$ une suite telle que

$$\begin{cases} F_\lambda(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta, \\ \lambda^{F_\lambda}(u_n) \doteq \inf\left\{\|w_n^*\|_* : w_n^* \in \partial F_\lambda(u_n)\right\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{cases}$$

$$\beta = \min_{p\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} F_\lambda\big(p(t)\big) \text{ et } \Gamma = \left\{p \in C\left([0,1];\mathbf{V}\right) : p(0) = 0,\ p(1) = u_1\right\}.$$

(4) La condition de Palais-Smale achève la démonstration.

Autres applications:

En changeant les hypothèses sur les exposants, on obtient d'autres résultats:

- En utilisant le principe ε-variationnel d'Ekeland (version non différentiable) [H. Chrayteh "à paraître dans JOTA"].
- En montrant que l'équation d'Euler est coercive et faiblement semi-continue inférieurement [H. Chrayteh "à paraître dans JOTA"].

La généralisation qu'on a faite içi inclut la majorité des cas existants en comportement continu (Δ, Δ_p, $\Delta_{p_1(\cdot),\ldots,p_N(\cdot)}$, $\Delta_{\Phi_1(\cdot),\ldots,\Phi_N(\cdot)}, \ldots$).

[1] M. Mihăilescu, P. Pucci and V. Rădulescu: *Eigenvalue problems for anisotropic quasilinear elliptic equations with variable exponent*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008.

[2] M. Mihăilescu, G. Moroșanu and V. Rădulescu: *Eigenvalue problems for anisotropic elliptic equations: an Orlicz-Sobolev space setting*, Nonlinear Analysis, 2010

Cas critique

On a trouvé des résultats pour des problèmes de valeurs propres avec des exposants critiques (pas de compacité) dans des domaines non bornés.

Théorème (voir Chrayteh & Rakotoson: NA(2010))

On considère $F = J - j$ t.q. $J : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ et $j : X \to \mathbb{R}$ loc. Lip. On suppose que

(H1') $\mathbf{V} \hookrightarrow X$ (n'est pas nécessairement compacte).

(H2') Pour toute suite $\left(u_n, u_n^*\right)_n$ telle que $u_n^* \in \partial F(u_n)$, on a

$$\left.\begin{array}{lll} u_n \rightharpoonup u & & \text{faiblement dans } \mathbf{V} \\ u_n^* \longrightarrow 0 & & \text{fortement dans } \mathbf{V}^* \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \in \partial F(u).$$

(H3') j s'écrit en une somme des fonctions loc. Lip. $j = j_0 + j_1$ t.q.

- $j_0(0) = j_1(0) = 0$.
- $j_0 : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ est faiblement continue (i.e. $v_n \rightharpoonup v$ dans $\mathbf{V} \Rightarrow j_0(v_n) \to j_0(v)$).

$\vdots$

Suite... Théorème (voir Chrayteh & Rakotoson: NA(2010))

- De plus, il existe $\beta > 0$ t.q.

$$\beta j_1(u) \leqslant \inf_{v^* \in \partial j(u)} \langle v^*, u \rangle\,, \quad \forall u \in X \text{ et } \sup_{w^* \in \partial J(u)} \langle w^*, u \rangle \leqslant \beta J(u), \quad \forall u \in \mathbf{V}.$$

(H4') $F(0) = 0$, $\exists\, \nu_0 \in \mathbf{V}$ et une constante $\eta > 0$ telles que

- $\|\nu_0\|_{\mathbf{V}} < \eta$ et $F(\nu_0) < 0$.
- $F(v) > 0$ pour tout $v \in \mathbf{V}$ tel que $\|v\|_{\mathbf{V}} = \eta$.
- $\inf\limits_{v \in \overline{B}(0,\eta)} F(v) > -\infty$.

Sous les hypothèses (H1')-(H4'), il existe une fonction $u \not\equiv 0$ et $u \in \mathbf{V}$ telle que

$$0 \in \partial F(u) \subset \partial J(u) - \partial j(u) \subset \partial J(u) - \partial j_0(u) - \partial j_1(u).$$

Ce théorème recouvre un résultat de:

[3] C. Alves and A. El Hamidi: *Existence of solution for a anisotropic equation with critical exponent*, Differential Integral Equations, 2008.

Problème de minimisation avec des contraintes

Sous les hypothèses (C1)-(C4), on considère $J : \mathbf{V}_0 \doteq W_0^{1,\rho_1,\dots,\rho_N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ t.q.

$$J(u) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Phi_i \left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) \mathrm{d}x.$$

Théorème (H. Chrayteh "à paraître dans JOTA")

Soient X un espace de Banach, J la fonction définie ci-dessus et $j : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, paire telle que $j(0) = 0$. On suppose que

(A1) la fonction j est continue et l'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow X$ est compacte.

ou

(A2) la fonction j est faiblement continue et l'injection $\mathbf{V}_0 \hookrightarrow X$ est seulement continue.

Alors, il existe $u_\gamma \in \mathbf{V}_0,\ u_\gamma \geqslant 0,\ u_\gamma \not\equiv 0$ et $\lambda_\gamma > 0$ tels que

$$0 \in \partial J(u_\gamma) - \lambda_\gamma \partial j(u_\gamma).$$

Idée de la preuve:

1. Soient $\gamma > 0$ et $m \doteq \inf \left\{ J(v) : v \in \mathbf{V}_0 \text{ et } j(v) = \gamma \right\}$.
2. On montre que la valeur m est atteinte par un certain u_γ positif.
3. En utilisant le théorème de multiplicateur de Lagrange (version non différentiable), on montre qu'il existe $\lambda_\gamma > 0$ tel que

$$0 \in \partial J(u_\gamma) - \lambda_\gamma \partial j(u_\gamma).$$

Plusieurs applications sont données dans la thèse. Par exemple,

Théorème (Cas (A2))

Soit $a \in L_+^{\frac{p_\alpha^*}{p_\alpha^* - q}}\left(\Omega, |x|^{\frac{\alpha q}{p_\alpha^* - q}}\right)$. Il existe une fonction propre $u_1 \in \mathcal{D}_{0,\alpha}^{1,p}(\Omega)$ (espace de Sobolev à poids), $u_1 \geqslant 0$ non triviale et $\lambda_1 > 0$ tels que

$$-\mathrm{div}\left(|x|^{\alpha(p-1)}|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\right) = \lambda_1\, a(x) u_1^{q-1}.$$

Régularité L^∞ des fonctions propres

Théorème (H. Chrayteh "à paraître dans JOTA")

Soient τ et α deux réels tels que $1 < \tau < \alpha < +\infty$. Considérons $\Phi_i : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi_i(x,t) = \begin{cases} |t|^\tau & \text{si } |t| \leqslant 1, \\ |t|^\alpha & \text{si } |t| > 1. \end{cases}$

Alors, il existe $\lambda_1 > 0$, $u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ et $u \geqslant 0$ solution du problème

$$-\mathrm{div}\left(\partial\Phi_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) = \lambda_1 u^{\alpha-1}.$$

De plus, si

(i) $1 \leqslant N \leqslant 5$, **ou**

(ii) $N \geqslant 6$ **et** $\begin{cases} 1 < \alpha < \alpha_N^-, & \text{où } \alpha_N^- = \frac{N+1-\sqrt{(N-3)^2-8}}{4}, \textbf{ ou} \\ \alpha_N^+ < \alpha < N, & \text{où } \alpha_N^+ = \frac{N+1+\sqrt{(N-3)^2-8}}{4}, \end{cases}$

alors $u \in L^\infty(\Omega)$.

Idée de la preuve:

Existence de (u, λ_1): La fonction $j(v) = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_\Omega |v|^\alpha \mathrm{d}x$ est continue sur $L^\alpha(\Omega)$, convexe, paire et $j(0) = 0$. L'injection $W_0^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^\alpha(\Omega)$ est compacte.

Régularité L^∞:

- La solution positive u vérifie $\langle A(u), \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$, $\forall\, \varphi \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$.
- On construit une fonction test $\varphi \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ de manière à transformer l'équation précédente en l'équation ponctuelle en s:

$$|\nabla u|_{*u}(s) \leqslant c_1 s^{-\frac{N-1}{N(\alpha-1)}} \left(\int_0^s u_*^{\alpha-1}(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + c_2. \tag{5}$$

- D'après la propriété PSR et l'équimesurabilité, on déduit que

$$-u_*'(s) \leqslant c_3 s^{\gamma(N,\alpha)} \cdot \|u\|_{L^r(\Omega)} + c_4 s^{\frac{1}{N}-1}.$$

- $\forall \sigma, t \in]0, |\Omega|[$, on a $u_*(\sigma) - u_*(t) = -\displaystyle\int_\sigma^t u_*'(s)ds$.

Conclusion

- On a construit un opérateur multivoque qui recouvre la majorité des opérateurs existants en comportement continu ou "univoque" (Δ, Δ_p, $\Delta_{p_1(\cdot),\dots,p_N(\cdot)}$, $\Delta_{\Phi_1(\cdot),\dots,\Phi_N(\cdot)},\dots$).
- On a donné plusieurs méthodes variationnelles dans une version non différentiable qui servent à montrer l'existence de solutions pour de tels opérateurs.
- Comme applications, on a traité des problèmes de valeurs propres dans le cas sous-critique ainsi dans le cas critique.
- En utilisant le théorème de multiplicateur de Lagrange dans une version non différentiable, on a montré l'existence de solutions pour un problème plus général.
- On a montré l'existence de solutions d'un problème de résonance au voisinage de l'origine. [H. Chrayteh "à paraître dans JOTA"]
- En utilisant le réarrangement relatif, on a aboutit à la régularité L^∞ des fonctions propres liées aux opérateurs multivoques.
- On travaille sur d'autres applications ...

Perspectives

- Application en traitement d'image
- Prendre d'autres conditions aux bords (Neumann, périodique, ...)
- Expression explicite des solutions en dimension 1
- Régularité des solutions en dimension 1
- Cas de résonance (Existence d'un spectre discontinu)
- Non existence de solutions

MERCI DE VOTRE ATTENTION