UNIVERSITÉ DE POITIERS

Master 2 de
Mathématiques Fondamentales

Année 2010/2011

Introduction au Programme de Langlands

Devoir Libre

A rendre durant la semaine du 3 janvier 2011

Exercice 1. Soit p un nombre premier et $\mathbb{F}_q$ un corps fini à p^f éléments, f entier $\geqslant 1$. Posons $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$. Rappelons que des représentants des classes de conjugaison dans G sont donnés comme suit :

(a) les éléments dits *elliptiques* qui ne possèdent aucune valeur propre dans $\mathbb{F}_q$;

(b) les éléments dits *scalaires* de la forme λI_2, $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$;

(c) les éléments dits *hyperboliques* possèdant deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{F}_q$;

(d) les autres, dits *paraboliques*, c'est-à-dire ceux de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$.

On rappelle que G agit sur la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$, ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{F}_q^2$. On note V l'ensemble des fonctions complexes définies sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ et V_0 le sous-espaces vectoriels des fonctions constantes. Le groupe G agit linéairement sur V par translation :

$$[\pi(g)(f)](x) = f(g^{-1}.x),\ x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q),\ g \in G,\ f \in V\ .$$

Le sous-espace V_0 est invariant et la représentation de G dans le quotient V/V_0 s'appelle la *représentation de Steinberg de* G et se note $\mathbf{St}_G$.

Le but de cet exercice est de calculer le caractère de $\mathbf{St}_G$ et de montrer que cette représentation est irréductible. Pour cela nous calculerons d'abord le caractère de la représentation (π, V).

1.1. Donner le nombre de classes de conjugaison de type (a) (resp. de type (b), (c) et (d)) dans G et le cardinal de chaque classe.

1.2. Montrer que pour $g \in G$, la valeur $\chi_V(g)$ du caractère de la représentation (π, V) en g est égal au nombre de droites de $\mathbb{F}_q^2$ globalement fixes par g. *On remarquera qu'une base de V est donnée par les fonctions caractéristiques δ_x des singletons $\{x\}$, $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$.*

1.3. Pour $g \in G$ de type (a) (resp. de type (b), (c), (d)) déterminer le nombre de droites de $\mathbb{F}_q^2$ fixes par g.

1.4. En déduire la valeur de χ_V sur chaque type de classe de conjugaison et les valeurs du caractère χ de la représentation de Steinberg $\mathbf{St}_G$.

1.5. Montrer que la représentation $\mathbf{St}_G$ est irréductible.

Exercice 2. Soit F un corps local non archimédien. L'objet de cet exercice est de montrer que toute représentation lisse irréductible de dimension finie de $G = \mathrm{GL}(2, F)$ est de dimension 1.

On fixe (π, V) une telle représentation. On note U (resp. $\bar{U}$) le groupe des matrices unipotentes supérieures (resp. unipotentes inférieures). Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note

$$U_n = \{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ a \in \mathfrak{p}_F^n \ \} \ .$$

Pour $x \in F^\times$, on note $d(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1. En raisonnant sur une base de V, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $U_n \subset \mathrm{Ker}\ \pi$ (*utiliser la lissité de* π).

2.2. Pour $x \in F^\times$ et $n \in U_n$, déterminer $d(x)U_n d(x)^{-1}$ en fonction de n et $v_F(x)$.

2.3. En déduire que $U \subset \mathrm{Ker}\ \pi$, puis que $\bar{U} \subset \mathrm{Ker}\ \pi$ et $\mathrm{SL}(2, F) \subset \ker \pi$.

2.4 Conclure.

Exercice 3. Caractères lisses additifs. Un *caractère lisse additif*, ou plus simplement caractère, ψ d'un corps local non archimédien F est un homomorphisme de groupes $(F, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, .)$ à noyau ouvert, c'est-à-dire trivial sur $\mathfrak{p}_F^n$ pour n assez grand. Le but de cet exercice est de décrire tous ces caractères.

On rappelle que si M est un groupe abélien fini, le groupe $\hat{M}$ de ses caractères a même cardinal que M.

Si ψ est un caractère de $(F, +)$ non trivial, son *conducteur* est le plus petit entier relatif $n = c(\psi)$ tel que ψ soit trivial sur $\mathfrak{p}_F^n$.

3.1. Soient ψ un caractère additif et $a \in F^\times$. On définit un caractère ψ^a par $\psi^a(x) = \psi(ax)$. Montrer que $c(\psi^a) = c(\psi) - v_F(a)$.

3.2. On suppose que $F = F_q((X))$. Montrer que la formule

$$\psi_1(\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i) = a_0$$

définit un caractère de $(F, +)$ de conducteur 1.

3.3. On note $\mathbb{Q}^{(p)}$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ formé des rationnels de la forme a/p^k, $a \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}^{(p)} + \mathbb{Z}_p$ et $\mathbb{Q}^{(p)} \cap \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$.

b. En déduire qu'on a un isomorphisme canonique $\varphi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Q}^{(p)}/\mathbb{Z}$ et que $\psi_0(x) = e^{2i\pi\varphi(x)}$ est un caractère de $\mathbb{Q}_p$ de conducteur 0.

Ainsi le caractère ψ_1 de $\mathbb{Q}_p$ donné par $\psi_1(x) = \psi_0(x/p)$ est de conducteur 1.

3.4. (*Question plus difficile*). Supposons F de caractéristique 0. Montrer que la fonction ψ donnée par $\psi(x) = \psi_1(\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}_p}\ (x))$ est un caractère (lisse) non trivial de $(F, +)$.

On notera à nouveau ψ_1 le choix d'un caractère de conducteur 1 de F (il y a en fait un choix naturel qui utilise la différente de l'extension $F/\mathbb{Q}_p$, mais dont nous ne parlerons pas ici).

3.5 Soient $m \geqslant n$ des entiers relatifs. Montrer que l'application de $\mathfrak{p}_F^{1-m}$ dans $\widehat{\mathfrak{p}_F^n/\mathfrak{p}_F^m}$ qui à a associe le caractère $x+\mathfrak{p}_F^m \mapsto \psi_1^a(x)$ est bien définie, a pour noyau $\mathfrak{p}_F^{1-n}$ et induit une bijection :

$$\mathfrak{p}_F^{1-m}/\mathfrak{p}_F^{1-n} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{p}_F^n/\mathfrak{p}_F^m}\ .$$

Pour la surjectivité, on pourra comparer les cardinaux des deux ensembles.

Dorénavant, on fixe un caractère ψ de $(F,+)$ de conducteur $\mathfrak{p}^m$.

3.6. Montrer qu'il existe $a_1 \in \mathfrak{p}_F^{1-m}$ tel que $\psi_1^{-a_1}\psi$ soit trivial sur $\mathfrak{p}_F^{m-1}$. *On pourra regarder la restriction de ψ à $\mathfrak{p}_F^{m-1}$, que l'on regardera comme un caractère de $\mathfrak{p}_F^{m-1}/\mathfrak{p}_F^m$, et appliquer la question précédente.*

3.7. Par récurrence, montrer qu'il existe une suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ telle que $a_k \in \mathfrak{p}_F^{k-m}$ et telle que

$$\psi_1^{-a_p}\psi_1^{-a_{p-1}}\cdots\psi_1^{-a_1}\psi = \psi_1^{-a_p-a_{p-1}-\cdots-a_1}\psi$$

soit trivial sur $\mathfrak{p}_F^{m-p}$, pour tout $p \geqslant 1$.

3.8. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} a_k$ converge vers une limite $a \in F$ et que $\psi = \psi_1^a$.

3.9. En déduire que l'application $a \mapsto \psi_1^a$ est un isomorphisme entre le groupe $(F,+)$ et le groupe des caractères de $(F,+)$.

Exercice 4. Représentations de dimension 2 de $F^\times$. Si F est un corps local non archimédien, les représentations lisses de $F^\times$ ne sont pas semisimples en général. Voici un exemple qui illustre ce phénomène.

Notons $\widehat{\mathfrak{o}_F^\times}$ le groupe des caractères lisses de $\mathfrak{o}_F^\times$.

Soit (π, V) une représentation lisse de dimension 2 de $F^\times$. Puisque les représentations du groupe compact $\mathfrak{o}_F^\times$ sont semisimples, on a la décomposition en composantes isotypiques :

$$V = \bigoplus_{\chi\in\widehat{\mathfrak{o}_F^\times}} V_\chi$$

où

$$V_\chi = \{\ v \in V\ ;\ \pi(u).v = \chi(u)v \text{ pour tout } u \in \mathfrak{o}_F^\times\ \}\ .$$

4.1. Montrer que chaque V_χ est stable par $F^\times$. En déduire que l'on a deux cas possibles :

Cas no 1. Il existe un unique caractère χ tel que $V_\chi \neq 0$ et $\mathrm{Dim}\ V_\chi = 2$.

Cas no 2. Il existe exactement deux caractères χ_1 et χ_2 tels que $V_{\chi_i} \neq 0$, $i = 1, 2$.

4.2. Dans le cas 2, montrer que V est semisimple.

On suppose dorénavant qu'on est dans le cas 1.

4.3. Montrer que si π est semisimple si et seulement si $\pi(\varpi)$ est diagonalisable.

4.4. On suppose à présent π non diagonalisable.

a. Montrer qu'il existe un complexe non nul λ et une base (e_1, e_2) de V tels que la matrice de $\pi(\varpi)$ soit $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

b. Montrer que dans la base (e_1, e_2), π prend la forme matricielle :

$$\pi(x) = \xi(x) \begin{pmatrix} 1 & v_F(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ x \in F^\times \ ,$$

où ξ est un caractère de $F^\times$ prolongeant l'unique χ tel que $V_\chi \neq 0$.

Exercice 5. On note X l'arbre de $G = \mathrm{GL}(2, F)$. L'objet de cet exercice est de montrer que l'étude spectrale du laplacien discret sur les sommets de X donne lieu à des représentations irréductibles de G.

On appelle *distance* entre deux sommet s et t de X le nombre d'arêtes d'un chemin sans aller-retour reliant s à t.

On note $t_\varpi = \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, si s_0 désigne le sommet $[\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}]$, on pose $s_k = t_\varpi^n s_0 = [\mathfrak{p}^n \oplus \mathfrak{o}]$, $n \in \mathbb{Z}$.

5.1. A l'aide d'un résultat du cours, montrer que deux sommets s et t sont à distance $d \in \mathbb{N}$ si et seulement si il existe une base (e_1, e_2) de F^2 telle que $s = [\mathfrak{o}e_1 \oplus \mathfrak{o}e_2]$, $t = [\mathfrak{p}^d e_1 \oplus \mathfrak{p}e_2]$.

5.2. En déduire que G agit transitivement sur l'ensemble des paires de sommets à distance fixée.

5.3. Soit $K = \mathrm{GL}(n, \mathfrak{o})$ le compact maximal standard de G. En utilisant la décomposition de Cartan, montrer qu'un ensemble de représentants pour les classes de K-conjugaison de sommets de X est donné par $\{s_k \ ; \ k \in \mathbb{N}\}$.

5.4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la K-orbite de sommets passant par s_k est égale à la sphère S_k de centre s_0 et de rayon k.

Soit V l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur l'ensemble des sommets de X. L'espace V est naturellement une représentation de G dont on note $\tilde{V}$ la partie lisse. On définit le laplacien Δ sur $\tilde{V}$ comme étant l'endomorphisme donné par

$$(\Delta f)(s) = \sum_{t \sim s} f(t) \ , \ s \text{ sommet de } X \ ,$$

où $t \sim s$ signifie : "s est un sommet voisin de t".

Enfin, on fixe $\lambda \in \mathbb{C}$ et on pose

$$\tilde{V}_\lambda = \{f \in \tilde{V} \ ; \ \Delta f = \lambda f\} \ .$$

5.5. Montrer que $\tilde{V}_\lambda$ est une représentation lisse de G.

5.6. En utilisant la question 5.3, montrer que l'application Φ de $\tilde{V}_\lambda^K$ dans l'ensemble des suites de complexes, donnée par

$$\Phi(f)_n = f(s_n) \ , \ n \in \mathbb{N}$$

est injective.

5.7. En utilisant la question 5.4, montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans l'image de Φ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (q+1)u_1 - \lambda u_0 & = & 0 \\ qu_{n+2} - \lambda u_{n+1} + u_n & = & 0 \quad , n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

5.8. Déterminer la dimension de $\tilde{V}_\lambda^K$.

5.9. Soit Y_λ la sous-représentation de $\tilde{V}_\lambda$ engendrée par $\tilde{V}_\lambda^K$. Montrer que $Y_\lambda^K = \tilde{V}_\lambda^K$.

5.10. Soit Z_λ la somme de toutes les sous-représentations Z de Y_λ telles que $Z \cap Y_\lambda^K = \{0\}$. Montrer que Z_λ est l'unique élément maximal de l'ensemble ordonné par l'inclusion :

$$\{Z \text{ sous-représentation de } Y_\lambda \ ; \ Z \cap \tilde{V}_\lambda^K = \{0\} \ \ \}$$

Montrer que la représentation $W_\lambda = Y_\lambda / Z_\lambda$ est irréductible et que $\mathrm{Dim}_{\mathbb{C}}\, W_\lambda^K = 1$.

5.11. En déduire que la représentation W_λ est une représentation de la série principale.