Cours de Mathématiques L1

Résumé des chapitres

Hassan Emamirad

Université de Poitiers
Version 2009/2010

Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

1.1 Le corps $\mathbb{C}$

On commence par donner la définition de Karl Friedrich Gauss(1777-1855) et William Rowan Hamilton (1805-1865).

Définition 1.1.1
Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des couples ordonnés (x, y), où x et y sont réels, tels que pour tous éléments (x, y) et (x', y'), on a

(i) **Égalité :** $(x, y) = (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x = x', \text{ et } y = y'$.

(ii) **Addition :** $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

(iii) **Multiplication :** $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$.

*L'ensemble $\mathbb{C}$ s'appelle l'ensemble des **nombres complexes**.*

Il existe une identification entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, donnée par

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \quad \mapsto \quad z = x + \mathrm{i}y = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) \in \mathbb{C},$$

où $\mathrm{i} = (0, 1)$ est un nombre complexe tel que

$$(\mathrm{i})^2 = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1, 0) = -1.$$

Théorème 1.1.1
Les lois d'addition et multiplication des nombre complexes vérifient les propriétés

(1) **Commutativité :** $z + z' = z' + z \;\; , \;\; z\, z' = z'\, z$

(2) **Associativité :** $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ et $(z\, z')\, z'' = z\, (z'\, z'')$.

(3) **Distributivité :** $z\, (z' + z'') = z\, z' + z\, z''$.

Définition 1.1.2

On appelle ***partie réelle*** Rez *et* ***partie imaginaire*** Imz, *les nombres réels* x *et* y *tels que* $z = x + iy$. *Le* ***conjugué*** $\overline{z}$ *de* $z = x + iy$ *est le complexe* $\overline{z} = x - iy$.

Proposition 1.1.1

On a pour tous complexes z *et* z' *de* $\mathbb{Z}$,

(a) $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$;

(b) *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Théorème 1.1.2

(1) *Pour la loi de l'addition,* $0 = (0,0)$ *est l'élément neutre et pour chaque* $z = (x,y)$, $-z = (-x,-y)$ *est l'opposé de* z, *i.e.* $z + (-z) = 0$.

(2) *Pour la loi de la multiplication,* $1 = (1,0)$ *est l'élément neutre et pour chaque* $z = (x,y) \neq (0,0)$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$ *est l'élément inverse de* z, *i.e.* $z(z^{-1}) = \frac{z\overline{z}}{z\overline{z}} = 1$.

On résume l'ensemble des propriétés citées dans les théorèmes 1.1.1 et 1.1.2 en disant que $\mathbb{C}$ est un ***corps***.

Définition 1.1.3

On appelle ***module*** *de* $z = x + iy$ *le nombre réel :* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}$

Proposition 1.1.2

On a pour tous complexes z *et* z' *et tout entier* n *de* $\mathbb{Z}$:

(a) *Le module d'un nombre complexe* z *est la distance entre l'origine et le point* z. *On peut comparer les modules* $|z|$ *et* $|z'|$ *de deux nombres complexes* z *et* z', *mais pas ces nombres eux-mêmes : il n'existe pas de relation d'ordre naturelle dans* $\mathbb{C}$.

(b) ***Inégalités triangulaires :*** *Pour tous* z *et* z' *de* $\mathbb{C}$, *on a :*

$$\big|\,|z| - |z'|\,\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

(c) $|z\,z'| = |z|\,|z'|$;

(d) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$;

(e) $|z^n| = |z|^n$;

1.2 Suites convergentes dans $\mathbb{C}$

Définition 1.2.1

Soit $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{C}$. *On dira que la suite* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***convergente*** *s'il existe un nombre complexe* z, *tel que pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un entier* N *assez grand tel que si* $n \geq N$, *alors*

$$|z_n - z| < \epsilon.$$

1.3 Equations dans $\mathbb{C}$

Définition 1.3.1

On appelle ***équation algébrique*** *une équation du type* $P_n(z) = 0$*, où*

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \tag{1.1}$$

où les coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_n$ *sont des nombres réels ou complexes.*

Un nombre complexe ζ *est dit une* ***racine d'ordre k*** *de cette équation si*

$$P_n(z) = (z-\zeta)^k Q_{n-k}(z) \quad \textit{et} \quad Q_{n-k}(\zeta) \neq 0 \tag{1.2}$$

Il est clair que si ζ est une racine d'ordre k, alors on a

$$P_n(\zeta) = P_n'(\zeta) = P_n''(\zeta) = \cdots P_n^{(k)}(\zeta) = 0$$

où $P_n', P_n'', \cdots P_n^{(k)}(\zeta)$ sont les dérivée d'ordre 1 à k de P_n.

Théorème 1.3.1

Si $P_n(z)$ *est le polynôme de degré* n *donné par*

$$a_k = \frac{n!(-a)^{n-k}}{k!(n-k)!} \tag{1.3}$$

alors le nombre complexe a *est racine d'ordre* n *de* $P_n(z)$*.*

En effet d'après la formule du binôme de Newton on a :

Pour tous a et b de $\mathbb{C}$ et tout entier $n \geq 1$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

où $\binom{n}{k}$ est le coefficient du binôme $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

donné par le triangle de Pascal ci-contre.

1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
...					

En remplaçant a par $-a$ et b par z on obtient l'expression (1.1) avec a_k donné par (1.3). Ainsi le polynôme $P_n(z) = (-a+z)^n = (z-a)^n$ admet une seule racine a, de l'ordre de multiplicité n.

1.4 Théorème fondamental de l'algèbre

Si a, b et c sont trois nombres réels et si $4ac - b^2 > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines dans $\mathbb{C}$, données par

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{b}{2a} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

En 1799, Gauss a montré que chaque polynôme à coefficients réels admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème 1.4.1 (*Théorème fondamental de l'algèbre*)
Chaque polynôme à coefficients réels ou complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.[1]

Corollaire 1.4.1
Chaque polynôme à coefficients réels ou complexes de degré n admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec leurs multiplicités).

1.5 Représentations trigonométriques

Chaque couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut être représenté soit par ses coordonnées cartésiennes x et y, soit par ses coordonnées polaires (r, θ) où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, si $x > 0$ et $y > 0$. Dans la figure ci-dessous, on trouve le schéma d'une telle représentation. Donc un nombre complexe peut être représenté soit par $z = x + \mathrm{i}y$, ou bien par $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. L'angle θ, qui est l'angle entre OZ et Ox s'appelle ***argument*** de z.

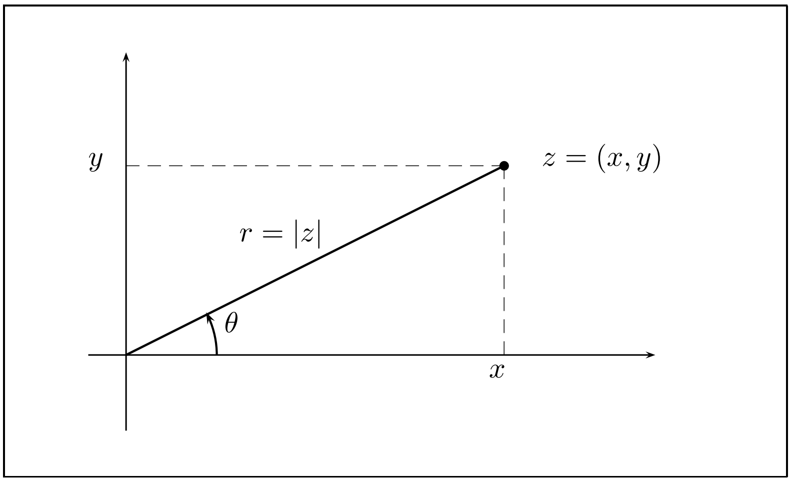

Figure. 1.1

Théorème 1.5.1
Chaque nombre complexe a une représentation en coordonnées polaires, donnée par

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.4}$$

où $r = |z|$ *et* $\theta = \arg(z)$.

[1] Jean le Rond d'Alembert, (1717-1783) en donne une 1re démonstration en 1743, Gauss dans sa thèse en 1799 (il a 22 ans) en montre les lacunes, et donne la 1re démonstration complète.

La formule (1.4) a des conséquences très utiles

– Par exemple on peut donner les racines n-ièmes de l'unité, autrement dit, résoudre l'équation $z^n = 1$. En effet, pour avoir $\zeta^n = 1$ on écrit $r^n \mathrm{e}^{in\theta} = \mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}}$ $(k \in \mathbb{Z})$, ce qui donne en identifiant $r = 1$ et $\theta = \frac{2k\pi}{n}$. C'est-à-dire

$$\zeta_k = \mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{n}} \qquad k = 1, \cdots, n$$

sont les n racines de $z^n - 1 = 0$.

Par exemple pour $n = 8$, les huit racines $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_8$ sont réparties d'une manière équidistante sur le cercle unité.

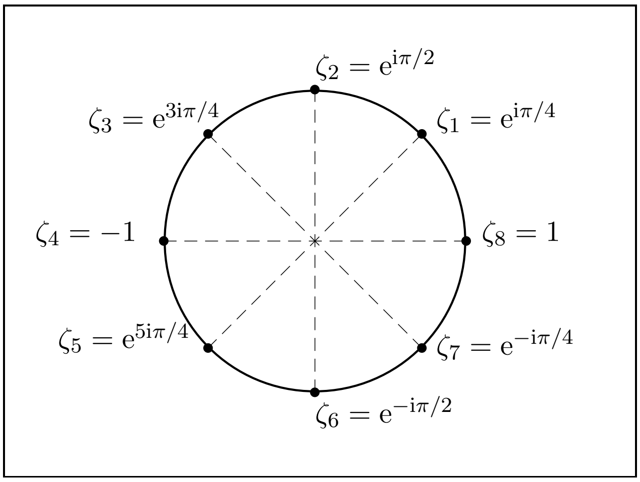

Figure. 1.2

– ***Formule de De Moivre***

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta \tag{1.5}$$

– Les formules $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a\pm b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}b}$ permettent de trouver

$$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b \qquad \sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b.$$

– Les formules $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$ permettent d'écrire

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}.$$

1.6 Références

On peut consulter tout livre de Terminales S ou :

[1] ***François LIRET, Dominique MARTINAIS,*** Cours de Mathématiques, Algèbre 1re Année, Cours et exercices avec solutions. DUNOD 2003 [cote B.U. 512 LIR] ou ancienne édition (1997) [cote B.U. 512 (076) LIR] chapitre 3

[2] ***Philippe PILIBOSSIAN, J-Pierre LECOUTRE,*** Algèbre, rappel de cours, exercices et problèmes résolus, DUNOD 1998 [cote B.U. 512 (076) PIL] chapitre 3

[3] ***Dominique PROCHASSON,*** Algèbre 1re année, exercices corrigés. DUNOD 1999 [cote B.U. 512 (076) PRO] chapitre 2.

Chapitre 2

Fonctions et fonctions réciproques

2.1 Notions d'application et fonction

Définition 2.1.1
*Une **application** f d'un ensemble E vers un ensemble F associe à tout élément x de E, un unique élément y de F. Cet élément y est alors noté $f(x)$ et est appelé image de x par f.*
*On appelle **graphe** de l'application f, l'ensemble des couples $(x, f(x))$ de $E \times F$ où x parcourt E.*

Définition 2.1.2
*Si $f : E \to F$ est une application, l'ensemble E s'appelle la **source** (ou **ensemble de départ**) de f et l'ensemble F est le **but** (ou **ensemble d'arrivée**).*

Définition 2.1.3
*On appelle **restriction** d'une application $f : E \to F$ à une partie A de E, l'application notée $f_{|A}$ de A dans F, qui à tout élément de A associe l'élément $f_{|A}(x) = f(x)$ de F.*

Définition 2.1.4
*On appelle **fonction** , toute application d'une partie D d'un ensemble $\mathcal{C}$ (qui sera souvent un corps) à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (fonctions dites numériques) ou un espace de vecteurs (fonctions dites vectorielles). L'ensemble D est appelé **domaine de définition** de la fonction f.*

Définition 2.1.5
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications, on appelle composée de f et g et on note $g \circ f$ l'application de E dans G qui à tout x de E, associe l'élément $g(f(x))$ de G.

Attention à ne pas confondre $g \circ f$ et $f \circ g$...

Théorème 2.1.1
La loi $\circ$ est associative, i.e. si $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ sont des applications, alors on a : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Il y a plusieurs façons de définir une fonction :

- En général une fonction s'écrit comme composée de fonctions classiques (outre les fonctions que l'on les verra dans une prochaine section, l'addition, multiplication, inversion, ou puissance peuvent être considérés comme des fonctions classiques).
- Par morceaux : l'ensemble de définition est réunion de plusieurs intervalles, et on utilise une formule particulière sur chaque intervalle :
  Par exemple :
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si} \quad x \in]-\infty, a[, \\ f_2(x) & \text{si} \quad x \in [a, b], \\ f_3(x) & \text{si} \quad x \in]b, \infty[\end{cases}$$
- Par disjonction de cas. Par exemple :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \text{ est une fraction irréductible} \\ 0 & \text{si} \quad x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$
- Par intégration.
  Par exemple :
$$f(x) = \int_0^x \phi(t)dt.$$
- Comme intégrale dépendant d'un paramètre
  Par exemple :
$$f(x) = \int_1^2 \phi(t, x)dt.$$
- De manière implicite.
  Par exemple, $f(x) = y$ unique solution de l'équation (d'inconnue y) $F(x, y) = 0$.
- Et de bien d'autres manières encore...

2.2 Injection, surjection et bijection

Le problème de la recherche de $y = f(x)$ est (théoriquement) résolu si f est une application. Par contre, se pose le problème de la recherche de x vérifiant $f(x) = y$ où y est donné dans F. Quand il existe, un tel x est appelé ***antécédent*** de y. On distingue habituellement deux problèmes : celui de l'existence d'au moins un antécédent, et celui de l'unicité (cas où chaque y de F a 0 ou 1 antécédent).

Définition 2.2.1
Si $f : E \to F$ est une application,
On appelle ***image de*** *f et on note $Im\, f$ l'ensemble des y de F qui admettent au moins un antécédent x par f.*
On dit que f est ***surjective*** *si on a : $Im\, f = F$, c'est à dire si pour tout y de F il existe au moins un x de E vérifiant : $y = f(x)$.*
On dit que f est ***injective*** *si toute égalité $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$.*
On dit que f est ***bijective*** *si elle est injective et surjective, c'est à dire si tout élément y de F admet un et un seul antécédent x par f. Dans ce cas, on appelle* ***application réciproque*** *de f et on note f^{-1} l'application de F dans E définie par : pour t dans F, $f^{-1}(t)$ est l'unique x de E tel que $f(x) = t$.*

Remarquons que si $x = x'$ alors l'égalité $f(x) = f(x')$ est évidente (c'est l'unicité de l'image de x par l'application f). Dire que f est injective, c'est affirmer que la réciproque est vraie. Rappelons qu'il s'agit d'une implication : "si par hasard $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$". En passant à la contraposée, l'injectivité peut s'écrire : si $x \neq x'$ alors $f(x) \neq f(x')$.

Remarquons enfin qu'une application injective f de E dans F induit une bijection $\overline{f}$ de E sur l'ensemble $\mathrm{Im}\, f$.

Définition 2.2.2
Si A est une partie de E, on appelle ***image*** *de A par f, et on note $f(A)$ l'ensemble des $f(x)$ pour $x \in A$. Autrement dit, un élément y de F appartient à $f(A)$ si et seulement s'il existe au moins un x de A tel que $y = f(x)$. En particulier, on a $Im\, f := f(E)$.*

Si B est une partie de F, on appelle ***image réciproque*** *de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des x de E vérifiant : $f(x) \in B$.*

2.3 Fonction continue et dérivable

Définition 2.3.1
Soit f une fonction numérique définie sur une partie I de $\mathbb{R}$. On dira que f est ***continue*** *au point $x \in I$, si et seulement si pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers x, on a*

$$\lim_{x_n \to x} f(x_n) = f(x)$$

et on dira que f est ***continue dans*** *I si elle est continue en tout point de I.*

On peut exhiber des fonctions discontinues en les définissant par morceaux. Par exemple

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq a, \\ -1 & \text{si} \quad x < a. \end{cases}$$

est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, mais discontinue au point $a \in \mathbb{R}$. Si les limites à droite et à gauche de la fonction en un point existent, on notera

$$\lim_{a^+} f = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

la limite à droite et

$$\lim_{a^-} f = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$$

la limite à gauche au point a.

Définition 2.3.2
Soit f une fonction numérique définie sur une partie I de $\mathbb{R}$. On dira que f est ***dérivable*** *au point $x \in I$, si et seulement si $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe et on notera cette limite par :*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

la ***dérivée*** *de f au point x et on dira que f est* ***dérivable dans*** *I si elle est dérivable en tout point de I. Une autre notation de la dérivée est*

$$\frac{df}{dx}(x) := f'(x).$$

Théorème 2.3.1
Soient f et g deux fonctions numériques dérivables

$$f : \quad I \mapsto J, \qquad g : \quad J \mapsto K,$$

où I, J et K sont trois parties de $\mathbb{R}$. Soit $h = g \circ f$, alors

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) \ , \ x \in I \ .$$

2.4 Fonction réciproque

Une fonction $f : \quad I \mapsto J$, est bijective d'un intervalle I sur un intervalle J, si d'une part, elle est définie sur I, avec pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$ d'autre part, tout y de J est image par f d'un et un seul x de I.

On peut alors parler de la fonction réciproque g, définie sur J, à valeurs dans I et définie par : si $x \in J$, $y = g(x)$ est l'unique $y \in I$ vérifiant $f(y) = x$.

Nous aurons besoin des deux théorèmes suivants :

Théorème 2.4.1 (***Théorème de la bijection***)
Si f est continue, strictement monotone sur un intervalle I, alors $f(I)$ est l'intervalle donné dans le tableau ci-dessous, et f induit une bijection $\tilde{f}$ de I sur $f(I)$. De plus la fonction réciproque $g = \tilde{f}^{-1}$ est continue, et strictement monotone de même sens de variation que f.

I	$[a, b]$	$]a, b[$	$[a, b[$	$]a, b]$
Si f continue strict. $\nearrow$ $f(I) =$	$[f(a), f(b)]$	$]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$	$[f(a), \lim_{b^-} f[$	$]\lim_{a^+} f, f(b)]$
Si f continue strict. $\searrow$ $f(I) =$	$[f(b), f(a)]$	$]\lim_{b^-} f, \lim_{a^+} f[$	$]\lim_{b^-} f, f(a)]$	$[f(b), \lim_{a^+} f[$

Dans un repère orthonormé, le graphe de la fonction réciproque g est le symétrique du graphe de la fonction f par rapport à la droite $y = x$ (appelée première bissectrice).

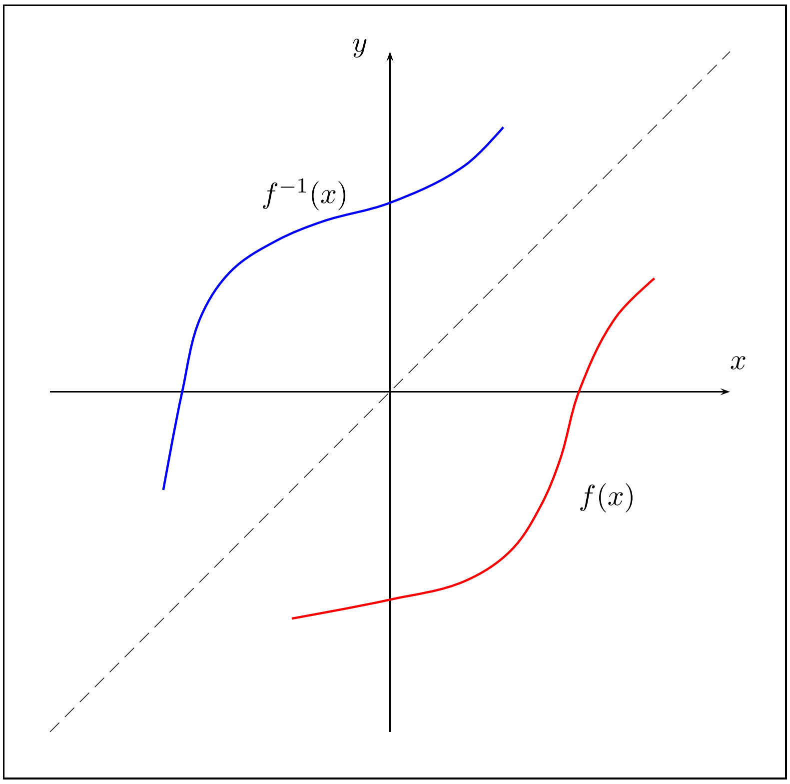

Figure. 2.1

Théorème 2.4.2 (***Dérivée d'une fonction réciproque***)
Si f est continue, strictement monotone sur l'intervalle I, est dérivable au point $a \in I$, l'application réciproque $g = f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$. Dans ce cas, on a :

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}.$$

2.5 Fonctions classiques réciproques

- ***Fonctions népériennes.*** La fonction ***exponentielle***, notée $\mathrm{e}^x = \exp(x)$, peut être définie comme le limite de la suite $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$. Cette fonction est définie sur $]-\infty, \infty[$ à valeurs dans $]0, \infty[$, elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\textit{(a)}\ \lim_{t\to\infty}\ \mathbf{e}^x = \infty, \qquad \textit{(b)}\ \lim_{t\to-\infty}\ \mathbf{e}^x = 0,$$

$$\textit{(c)}\ \mathbf{e}^{x+y} = \ \mathbf{e}^x\ \ \mathbf{e}^y \qquad \textit{(d)}\ \mathbf{e}^{x-y} = \frac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^y} \qquad \textit{(e)}\ \mathbf{e}^{x\,y} = (\ \mathbf{e}^x)^y$$

La fonction ***logarithme népérien***, notée ln, peut être définie comme fonction réciproque de la fonction exponentielle . En effet, la fonction exp est continue, strictement croissante sur $]-\infty, \infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. Donc elle induit une bijection entre $]-\infty, +\infty[$ et $]0, +\infty[$. La fonction réciproque est continue, strictement croissante , définie sur $]0, +\infty[$, vérifie pour $a > 0$ et $b > 0$, les propriétés suivantes :

$$\textit{(a)}\ \lim_{t\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \qquad \textit{(b)}\ \lim_{t\to0+} \ln x = -\infty, \qquad \textit{(c)}\ \ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\textit{(d)}\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \qquad \textit{(e)}\ \text{pour } r \in \mathbb{R},\ \ \ln(a^r) = r\ln(a).$$

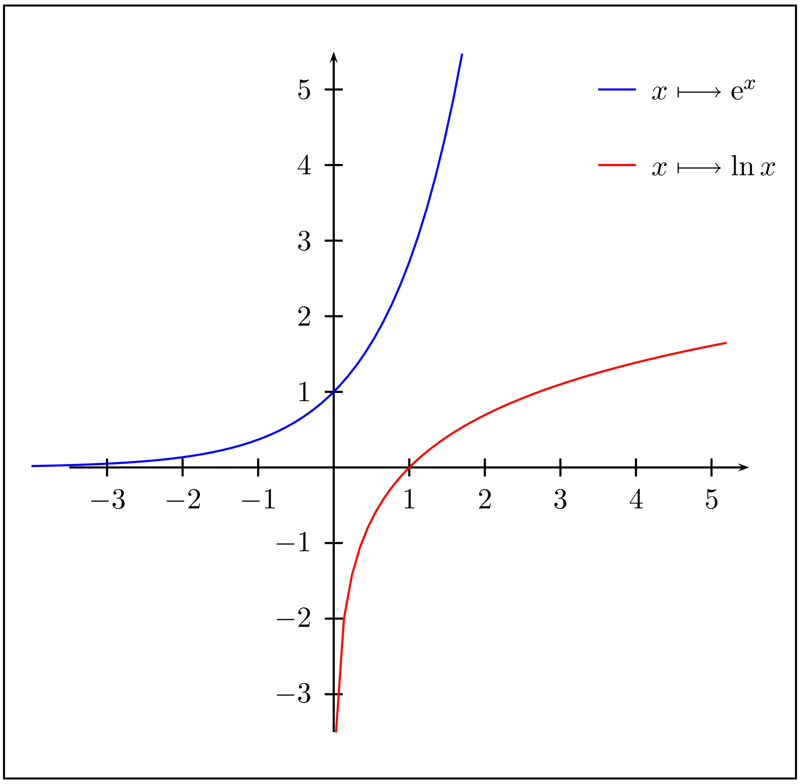

Figure. 2.2

- ***Fonction Arcsinus.***

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle induit donc une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$, dont l'application réciproque est notée arcsin. Ainsi pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$y = \arcsin x \quad \text{si et seulement si} \quad x = \sin y \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Remarquons que si $y = \arcsin x$, on a $\cos y \geq 0$ donc $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

Théorème 2.5.1
La fonction arcsinus est continue sur $[-1, 1]$, *dérivable sur* $]-1, 1[$, *avec si* $|x| < 1$,

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Voici la courbe de arcsin.

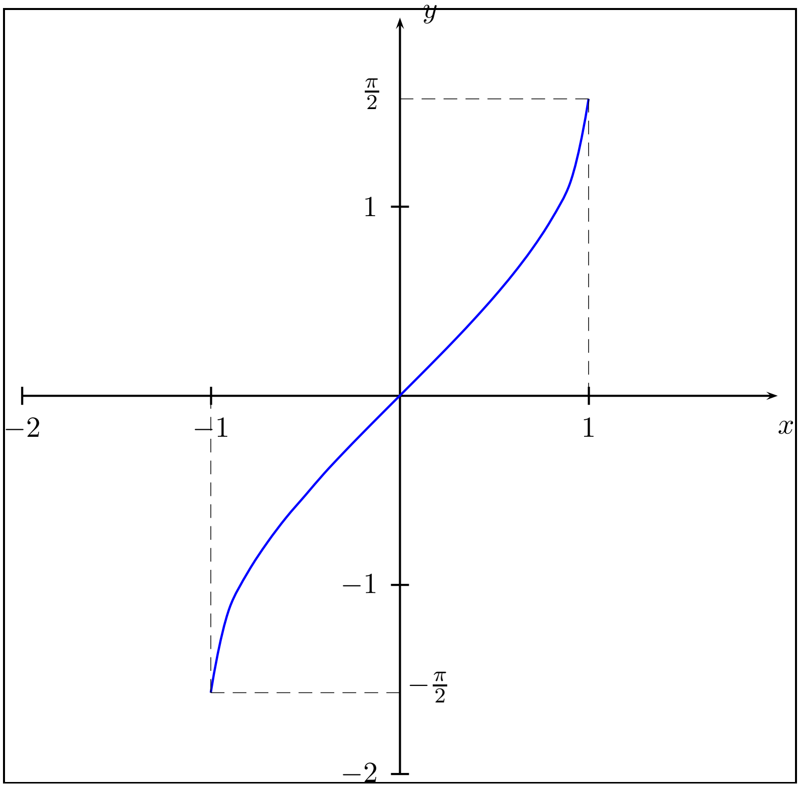

Figure. 2.3

- ***Fonction Arccosinus.***

De même la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Elle induit donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, dont l'application réciproque est notée arccos.

Ainsi pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$y = \arccos x \quad \text{si et seulement si} \quad x = \cos y \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq \pi.$$

Théorème 2.5.2
La fonction arccosinus est continue sur $[-1, 1]$, *dérivable sur* $]-1, 1[$, *avec si* $|x| < 1$,

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Voici la courbe de arccos.

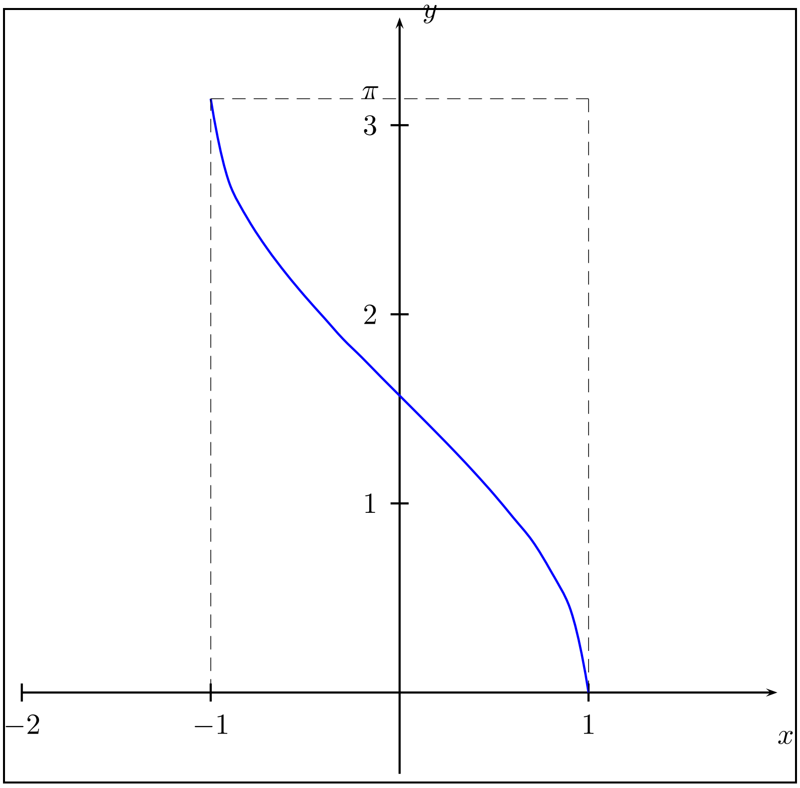

Figure. 2.4

Proposition 2.5.1
On a pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

- ***Fonction Arctangente.*** La fonction tan étant périodique n'est pas injective, mais sa restriction à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est continue et strictement croissante, et

$$\lim_{t\to-\pi/2}\tan t=-\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to\pi/2}\tan t=+\infty$$

On appelle fonction ***arctangente*** l'application réciproque. On a

$$y=\arctan x \quad \text{si et seulement si} \quad x=\tan y \quad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$$

Cette fonction est définie, continue, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\frac{d}{dx}\arctan x=\frac{1}{1+x^2}.$$

Voici la courbe de arctan.

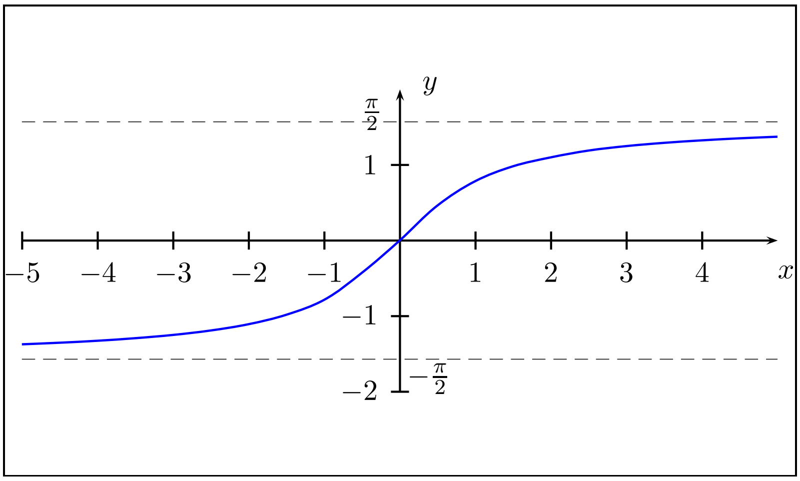

Figure. 2.5

Proposition 2.5.2
On a

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \textit{si} \quad x>0\\ \frac{-\pi}{2} & \textit{si} \quad x<0.\end{cases}$$

2.6 Références

[1] ***Pascal DUPONT*** Exercices de Mathématiques pour le 1er cycle, vol. 1 : Algèbre et Géométrie, De Boeck 2003 [cote B.U. 512/514 (076) DUP], chap. 1, par. 3-5-4.

[2] ***D. GUININ, B. JOPPIN,*** Mathématiques Analyse MPSI (ou PCSI) Bréal 2003 [cote B.U. 517 GUI], chapitre 1 A. et E.

[3] ***Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD,*** Analyse 1, VUIBERT 1997 [cote B.U. 517.5 JER], chapitre 5.

Chapitre 3

Equations différentielles

3.1 Généralité

Une équation différentielle est une relation entre les dérivée successives d'un fonction inconnue $y(t)$. Si les n premières dérivées de la fonction $y(t)$ interviennent dans cette équation, comme

$$\Phi(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

on dira que l'équation (3.1) est d'ordre n.

Les équations différentielles interviennent dans de nombreux domaines scientifiques : en mécanique, en électricité, en radioactivité, pour les réactions chimiques, l'évolution d'une population, la concentration d'un produit (glucose ou médicament) dans le sang, le refroidissement d'un objet, la diffusion à travers une membrane...

Une équation d'inconnue une fonction $y = y(t)$ qui s'écrit sous la forme

$$\Phi(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = g(t), \tag{3.2}$$

est dite ***à variables séparées***. Une telle équation, si elle est d'ordre 1, s'écrit sous la forme $y'f(y) = g(t)$.

Dans ce cas, si F est une primitive de f et G une primitive de g, elle équivaut à $F(y) = G(t) + C$ où C est une constante. Reste à écrire, si possible, cette égalité sous la forme $y = \varphi(t)$ (ce qui peut obliger à réduire l'intervalle de définition).
Exemple : $y'\mathrm{e}^y = t^2$ donne $\mathrm{e}^y = \frac{t^3}{3} + \lambda$, or si $t \in](-3\lambda)^{1/3}, +\infty[$, on a $y = \ln(\frac{1}{3}\,t^3 + \lambda)$, alors $y(t)$ est défini sur $](-3\lambda)^{1/3}, +\infty[$.

Il s'agit d'un cas particulier d'équation à variables séparées dans la mesure où elle peut s'écrire $\dfrac{x'}{f(x)} = 1$. On obtient $g(x) = t + C$ où g est une primitive de $1/f$. Mais il ne faut pas oublier les solutions constantes : $x = a$ où a est solution de $f(a) = 0$.

Exemple : $x' = x^2$ donne la solution constante $x = 0$ et sinon, s'écrit $\dfrac{x'}{x^2} = 1$. On obtient $\dfrac{-1}{x} = t + C$, c-à-d $x = \dfrac{1}{\lambda - t}$, défini sur $]-\infty, \lambda[$ et sur $]\lambda, +\infty[$.

3.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

On appelle équation différentielle linéaire du 1er ordre, une équation de la forme

$$y' + a(t)y = b(t) \tag{3.3}$$

où a et b sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I. Lorsque la fonction b est nulle, on dit que l'équation (3.3) est une équation ***homogène du 1er ordre***. Elle s'écrit

$$y' + a(t)y = 0 \tag{3.4}$$

Pour résoudre l'équation (3.3) il est nécessaire de résoudre d'abord (3.4).

Résoudre cette équation consiste à déterminer les fonctions dérivables φ, définies sur I, vérifiant en tout point t de I : $\varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = 0$.

Si A est une primitive de a sur l'intervalle I, l'équation (3.4) est équivalente à :

$$\mathrm{e}^{A(t)}(y' + a(t)y) = \mathrm{e}^{A(t)}(y' + A'(t)y) = 0 \quad \text{c-à-d. :} \qquad \left(y\,\mathrm{e}^{A(t)}\right)' = 0 \tag{3.5}$$

Une fonction φ est donc solution si et seulement si la fonction $t \to \varphi(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$ est égale à une constante λ sur l'intervalle I. [1] D'où le théorème :

Théorème 3.2.1
Les solutions sur l'intervalle I de l'équation différentielle homogène $y' + a(t)y = 0$, sont, si A est une primitive de a, les fonctions φ définies par : $\varphi(t) = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}$ où λ est une constante arbitraire.

N.B. : Ce théorème est valable avec des fonctions à valeurs complexes. Dans ce cas, on prend λ dans $\mathbb{C}$. Par contre, si la fonction a est à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si on ne cherche que les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$, on prendra λ dans $\mathbb{R}$.

Un cas particulier important est celui où la fonction a est constante :

Théorème 3.2.2
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ s'écrivent $\varphi(t) = \lambda \mathrm{e}^{at}$.

---

[1] Certains résolvent l'équation en écrivant $\frac{y'}{y} = -a(t)$ d'où $\ln(|y|) = -A(t) + C$ où C est une constante d'où $y = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}$ où $\lambda = \pm \mathrm{e}^{C}$. Cette technique est très critiquable, donc est à éviter. Mais elle a le mérite de donner le bon résultat. Elle peut donc être utilisée au brouillon.

Exemple *Décroissance radioactive* Le taux de décroissance de radioactivité d'une matière est proportionnel à la quantité de la substance à un instant donné. Donc si $y(t)$ est la quantité de matière radioactive et $y'(t)$ sa variation, on a $y'(t) = -ky(t)$, où k est une constante positive appelée la *constante de décroissance*. La solution de cette équation est $y(t) = y(0)\mathrm{e}^{-kt}$. Comme cette fonction est toujours strictement positive le temps de désintégration totale est infini. Pour avoir une idée de cette décroissance on définit la *demi-vie*, c'est le temps nécessaire pour réduire de moitié la quantité initiale d'une matière radioactive. Autrement dit, si T est le temps de demi-vie

$$\frac{y(T)}{y(0)} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi pour résoudre (3.3), on écrit

$$\left(y\,\mathrm{e}^{A(t)}\right)' = b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$$

Ces solutions sont donc de la forme : $\varphi(t) = (\mathrm{F}(t) + \lambda)\mathrm{e}^{-A(t)}$ où F est une primitive sur I de la fonction $t \to b(t)\mathrm{e}^{A(t)}$. On ne retient pas ce résultat, mais les théorèmes suivants :

Théorème 3.2.3
Les solutions sur I de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$, où a et b sont des fonctions continues sur l'intervalle I, sont les fonctions $t \to \lambda\varphi(t) + \psi(t)$ où ψ est solution particulière de (3.3) *et φ est solution particulière non nulle de l'équation homogène associée* (3.4).

Théorème 3.2.4 (*Formule de la variation des constantes*)
Soit t_0 dans I, et $y' + a(t)y = b(t)$, une équation différentielle linéaire du 1er ordre, dont les coefficients sont des fonctions continues sur I, alors pour tout nombre y_0, il existe une et une seule solution φ de sur I vérifiant la condition initiale $\varphi(t_0) = y_0$, donnée par

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-A(t)}y_0 + \mathrm{e}^{-A(t)}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{A(s)}b(s)ds, \tag{3.6}$$

où $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$.

3.3 Equations différentielles non-linéaires du premier ordre

En général, les équations différentielles non-linéaires du premier ordre sont de la forme

$$y' = f(x, y), \tag{3.7}$$

où la fonction $y \mapsto f(x, y)$ n'est pas linéaire. La résolution de ces équations est assez compliquée. Il existe une petite classe d'équations qui peuvent être traiter par différentes méthodes.

Tout d'abord écartons le cas de fausse non-linéarité. Il existe une classe d'équations non-linéaires qui peuvent se transformer en équations linéaires par une transformation adéquate. C'est le cas par exemple de

l'équation de Bernoulli. L'équation de Bernoulli dont la forme générale est

$$y' + p(t)y = q(t)y^{\alpha}. \tag{3.8}$$

En posant $u(t) = y(t)^{\beta}$ avec $\beta = 1 - \alpha$ on obtient $u' = \beta y^{\beta-1}y' = \beta y^{-\alpha}y'$. En multipliant (3.8) par β et en la divisant par y^{α}, on aura

$$\frac{\beta y'}{y^{\alpha}} + \frac{\beta p(t)y}{y^{\alpha}} = \beta q(t)$$

ou

$$u' + \beta p(x)u = \beta q(x),$$

qui est une équation différentielle linéaire. Ainsi on vient de démontrer le théorème suivant

Théorème 3.3.1

Soient $p(t)$ et $q(t)$ deux fonctions continues sur l'intervalle I. Supposons $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $\beta = 1 - \alpha$ avec $\alpha \neq 0$ et 1. Alors, y est une solution du problème de Bernoulli

(PB)
$$\begin{cases} y' + p(t)y = q(t)y^{\alpha}. \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

si et seulement si $u = y^{\beta}$ est la solution du problème linéaire

(PL)
$$\begin{cases} u' + \beta p(t)u = \beta q(t), \\ u(t_0) = y_0^{\beta}. \end{cases}$$

Exemple. Pour trouver la solution du problème de Bernoulli

(EB)
$$\begin{cases} y' - 4y = 2\mathrm{e}^t\sqrt{y} \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

la transformation $u = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$ donne le problème linéaire

(EBL)
$$\begin{cases} u' - 2u = \mathrm{e}^t, \\ u(0) = \sqrt{2}. \end{cases}$$

dont la solution est

$$u(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(\sqrt{2} + \int_0^t \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s\right) = \mathrm{e}^{2t}(\sqrt{2} + 1 - \mathrm{e}^{-t}).$$

D'où

$$y(t) = e^{4t}(\sqrt{2} + 1 - e^{-t})^2$$

Equation de Riccati. Une équation du type

$$y' + p(t)y + q(t)y^2 = g(t) \tag{3.9}$$

est appelée l'*équation de Riccati*. Un cas particulier où $p(t) = -\lambda, \lambda > 0, q(t) = \lambda a, a > 0$ et $g(t) = 0$ on obtient une équation de la forme

$$y' = \lambda(1 - ay)y \tag{3.10}$$

et elle s'appelle ***équation de la loi logistique***. Une telle équation intervient en dynamique de population que l'on va discuter dans la prochaine section.

3.4 Dynamique des populations

En 1798, T.R. Malthus a proposé un modèle de dynamique de population dans lequel le taux de croissance de la population est proportionnel à la taille de la population. Dans ce modèle de Malthus la fonction $y(t)$ qui présente la taille totale de la population à l'instant t, satisfait l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y(t), \qquad t \geq 0. \tag{3.11}$$

où λ est le paramètre de Malthus. La solution de (3.11) est la fonction exponentielle $y(t) = y(0)e^{\lambda t}$ qui présente la croissance exponentielle d'une population.

Dans une population malthusienne on ne tient pas compte de plusieurs facteurs, comme l'effet d'entassement ou la limitation des ressources.

Dans un modèle plus réaliste le paramètre de Malthus doit dépendre de la taille de population. Un tel modèle a été proposé par P. F. Verhulst en 1838. Dans le modèle de Verhulst, il est supposé que

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = C. \tag{3.12}$$

où la constante C s'appelle la constante intrinsèque de croissance. Dans le modèle de Verhulst la taille de population $y(t)$ vérifie l'équation différentielle non-linéaire

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \left(1 - \frac{y(t)}{C}\right) y(t), \qquad t \geq 0. \tag{3.13}$$

Appliquons la méthode de la séparation des variables à (3.13), en l'écrivant sous la forme

$$\frac{y'}{(1 - ay)y} = \lambda.$$

où $C = \frac{1}{a}$. Ou bien, après la décomposition en éléments simples

$$\frac{ay'}{(1-ay)} + \frac{y'}{y} = \lambda \ ,$$

ce qui donne

$$-\ln|1-ay| + \ln|y| = \ln\left|\frac{y}{1-ay}\right| = \lambda t + c, \qquad \text{avec} \quad c = \ln\left|\frac{y(0)}{1-ay(0)}\right|.$$

Suivant la valeur initiale $y(0)$ on peut distinguer quatre cas.
1er cas, $y(0) = 0$. On trouve $y(t) = 0$, pour tout $t > 0$. C'est une solution triviale.
2ième cas, $0 < y(0) < C$. Dans ce cas $y'(0) = \lambda y(0)(1 - ay(0)) > 0$ et $y(t)$ est croissante, tant qu'on a

$$0 < y(t) < C. \tag{3.14}$$

Ainsi

$$c = \ln\left(\frac{y(0)}{1-ay(0)}\right) \qquad \text{et} \qquad \ln\left(\frac{y(t)}{1-ay(t)}\right) = \lambda t + \ln\left(\frac{y(0)}{1-ay(0)}\right).$$

ce qui donne,

$$\ln\left(\frac{y(t)(1-ay(0))}{(1-ay(t))y(0)}\right) = \lambda t \qquad \text{ou bien} \quad y(t)\left[ay(0) + (1-ay(0))\mathrm{e}^{-\lambda t}\right] = y(0).$$

et

$$y(t) = \frac{1}{a\left(1 + (\frac{1}{ay(0)} - 1)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)} = \frac{C}{\left(1 + (\frac{C}{y(0)} - 1)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)}.$$

On remarque que dans ce cas, $y(t) \to C$, lorsque $t \to \infty$.
3ième cas, $y(0) = C$. On trouve $y(t) = C$, pour tout $t > 0$. C'est une solution constante.
4ième cas, $y(0) > C$. Dans ce cas

$$c = \ln\left(\frac{y(0)}{ay(0) - 1}\right)$$

et d'une manière analogue au 2ième cas, on trouve

$$y(t) = \frac{C}{\left(1 + (\frac{C}{y(0)} - 1)\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)}.$$

Comme $\frac{1}{ay(0)-1} < 0$, on a $y(t) > C$ pour tout $t > 0$ et $y(t) \to C$, lorsque $t \to \infty$.

3.5 Equations différentielles linéaires homogènes du second ordre

Les équations différentielles linéaires du second ordre sont de la forme

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{3.15}$$

Si $g(t) = 0$ elles sont qualifiées d'homogènes et si $g(x) \neq 0$ de non-homogènes.

Le caractère linéaire de cette équation implique que si y_1 et y_2 sont deux solution de l'équation homogène

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{3.16}$$

et si α et β sont deux constantes quelconques, alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi une solution de l' équation (3.16).

Nous commencons d'abord par étudier les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre, lorsque les coefficients $p(t)$ et $q(x)$ sont constants, ce qui donne

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{3.17}$$

Pour $a = 0$ cette équation se transforme en

$$y'' + by = 0. \tag{3.18}$$

Suivant le signe de b on trouve trois types de solution.

1er cas, $b = 0$. On trouve $y''(t) = 0$ et en intégrant deux fois l'équation on obtient la solution $y(t) = c_1 t + c_2$.

2ième cas, $b < 0$. On prend $b = -k^2$ et l'équation (3.18) s'écrit $y'' = k^2 y$. Il est clair que e^{kt} et e^{-kt} sont deux solutions de (3.18), alors $c_1\mathrm{e}^{kx} + c_2\mathrm{e}^{-kx}$ est aussi une solution.

3ième cas, $b > 0$. On prend $b = k^2$ et l'équation (3.18) s'écrit $y'' + k^2 y = 0$. Il est clair que $\sin kt$ et $\cos kt$ sont deux solutions de (3.18), alors $c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$ est aussi une solution. Ainsi on a

Théorème 3.5.1

Soit b un nombre réel. Nous définissons deux fonctions u_1 et u_2 sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

- *Si $b = 0$, on prend $u_1(t) = 1$ et $u_2(t) = t$;*
- *Si $b < 0$, on écrit $b = -k^2$ et on prend $u_1(t) = \mathrm{e}^{kt}$ et $u_2(t) = \mathrm{e}^{-kt}$;*
- *Si $b > 0$, on écrit $b = k^2$ et on prend $u_1(t) = \cos kt$ et $u_2(t) = \sin kt$.*

Alors toute solution de l'équation différentielle (3.18) est de la forme

$$y = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \tag{3.19}$$

Exemple. (a) La solution générale

- de $y'' = 0$ est $y(t) = c_1 t + c_2$;
- de $y'' - 4y = 0$ est $y(t) = c_1 \mathrm{e}^{2t} + c_2 \mathrm{e}^{-2t}$;
- de $y'' + 4y = 0$ est $y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$.

Considérons à présent $a \neq 0$. A l'aide d'une transformation adéquate nous transformons l'équation (3.17) sous la forme (3.18). Posons $y = u\mathrm{e}^{-at/2}$, on peut vérifier facilement que dans ce cas

$$y'' + ay' + by = \mathrm{e}^{-at/2}\left(u'' + (b - \frac{a^2}{4}))u\right) = 0$$

On appelle $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation différentielle (3.17), et on étudie à l'aide du théorème 3.5.1, l'équation differentielle

$$u'' = \frac{1}{4}\Delta u.$$

Théorème 3.5.2
Soit $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation différentielle (3.17) *alors toute solution de cette équation différentielle est de la forme.*

$$y = \mathrm{e}^{\frac{-at}{2}}[c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)] = c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t) \tag{3.20}$$

où les fonctions u_1 et u_2 sont définies selon le signe de Δ sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

- *Si $\Delta = 0$, on prend $u_1(t) = 1$ et $u_2(t) = t$;*
- *Si $\Delta > 0$, on écrit $k = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}$ et on prend $u_1(t) = \mathrm{e}^{kt}$ et $u_2(t) = \mathrm{e}^{-kt}$;*
- *Si $\Delta < 0$, on écrit $k = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}$ et on prend $u_1(t) = \cos kt$ et $u_2(t) = \sin kt$.*

Les constantes c_1 et c_2 dans (3.19) *et* (3.20) *peuvent être déterminées d'une manière unique à partir des données initiales*

$$y(t_0) = y_0 \qquad et \qquad y'(t_0) = y_1.$$

Exemple. (b) La solution générale

- de $y'' - 2y' + y = 0$ est $y(t) = \mathrm{e}^t(c_1 t + c_2)$;
- de $y'' + 5y' + 4y = 0$ est $y(t) = c_1 \mathrm{e}^{-4t} + c_2 \mathrm{e}^{-t}$;
- de $y'' + 4y' + 5y = 0$, avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = y''(0)$ est $y(t) = \mathrm{e}^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$. Comme $y(0) = c_1 = 2$ et $y'(0) = -2c_1 + c_2 = -4 + c_2$ et $y''(0) = 3c_1 - 4c_2 = 6 - 4c_2 = -4 + c_2$, ainsi $c_1 = c_2 = 2$ et $y(t) = 2\mathrm{e}^{-2t}(\cos t + \sin t)$.

3.6 Equations différentielles linéaires non-homogènes du second ordre

Théorème 3.6.1
Soient

$$v_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{-at}{2}} u_1(t) \qquad \text{et} \qquad v_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{-at}{2}} u_2(t)$$

les solutions de l'équation homogène (3.17) *données par* (3.20)*. Soit*

$$W(t) = v_1(t)v_2'(t) - v_2(t)v_1'(t)$$

le wronskien de v_1 *et* v_2*. Supposons* $W(t) \neq 0$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*. Alors l'équation non-homogène*

$$y'' + ay' + by = g(t) \tag{3.21}$$

a une solution particulière y_1 *donnée par la formule*

$$y_1(t) = h_1(t)v_1(t) + h_2(t)v_2(t),$$

où

$$h_1(t) = -\int v_2(t)\frac{g(t)}{W(t)}\ \mathrm{d}t, \quad h_2(t) = \int v_1(t)\frac{g(t)}{W(t)}\ \mathrm{d}t.$$

Toute solution de l'équation non-homogène s'obtient en ajoutant à y_1 *une solution générale de* (3.17)*.*

Exemple. Trouver la solution générale de $y'' + y = \sin t$ sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Dans ce cas $v_1(t) = \cos t$ et $v_1(t) = \sin t$. Le wronskien de v_1 et v_2 est $W(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. On trouve

$$h_1(t) = -\int \sin^2 t\ \mathrm{d}t = \int (\cos 2t - 1)/2\ \mathrm{d}t = (\sin 2t - 2t)/4$$
$$h_2(t) = \int \cos t \sin t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \sin 2t = -(\cos 2t)/4.$$

Ainsi la solution générale sera $y(t) = \cos t(c_1 + \sin 2t - 2t)/4 + \sin t(c_2 - \cos 2t)/4$.

Cas particuliers. a) Supposons $b \neq 0$ et $g(t) = P_n(t)$ un polynôme de degré n. Alors $y_1(t)$ est aussi un polynôme de degré n, dont les coefficients s'obtiennent par identification.

Exemple. Pour trouver la solution générale de $y'' - 2y' + 3y = t^3$, on écrit la solution particulière sous la forme $y_1(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. En remplaçant cette solution dans l'équation avec second membre on obtient

$$3at^3 + (3b - 6a)t^2 + (3c - 4b + 6a)t + (3d - 2c + 2b) = t^3.$$

En identifiant les coefficients on trouve

$$a = \frac{1}{3}, \qquad b = \frac{2}{3}, \qquad c = \frac{2}{9}, \qquad \text{et} \quad d = \frac{-8}{27}.$$

Comme la solution sans second membre est $y_2(t) = \mathrm{e}^t(c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \sin \sqrt{2}t)$, alors la solution générale sera

$$y(t) = \mathrm{e}^x(c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \sin \sqrt{2}t) + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{-8}{27}.$$

b) $g(t) = P_n(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$. Avec le changement de fonction $y = u(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$, on retrouve le cas a) pour la fonction $u(t)$.

Exemple. Pour trouver la solution générale de $y'' + 4y = \mathrm{e}^{-2t}$, on écrit la solution particulière sous la forme $y_1(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t)$. En remplaçant cette solution dans l'équation avec second membre on obtient

$$\mathrm{e}^{-2t}(u'' - 4u' + 8u) = \mathrm{e}^{-2t}.$$

La solution de l'équation $u'' - 4u' + 8u = 1$ est $u(t) = \frac{1}{8}$. Comme la solution sans second membre est $y_2(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$, alors la solution générale sera

$$y(t) = (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2t}.$$

c) $g(t) = P_n(t)\mathrm{e}^{\alpha t} \sin kt$ ou $g(t) = P_n(t)\mathrm{e}^{\alpha t} \cos kt$. Avec le changement de fonction $y = \mathrm{e}^{\alpha t}(u(t) \cos kt + v(t) \sin kt)$, on retrouve le cas a) pour les fonctions $u(t)$ et $v(t)$.

3.7 Références

[1] ***Philippe PILIBOSSIAN, J-Pierre LECOUTRE,*** Algèbre, rappel de cours, exercices et problèmes résolus, DUNOD 1998 [cote B.U. 512 (076) PIL] chapitre 5 et 9.

[2] ***Dominique PROCHASSON,*** Algèbre 1re année, exercices corrigés. DUNOD 1999 [cote B.U. 512 (076) PRO] chapitre 9.

[3] ***Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD,*** Analyse 1, VUIBERT 1997 [cote B.U. 517.5 JER], chapitre 2 et 3.

[4] Vincent BLONDEL, Mathématiques, Analyse, cours et exercices corrigés. DEUG Sciences et Vie de la Terre. DUNOD, 2000 cote B.U. 517 (076) BLO).

[5] Jean-Paul et Françoise BERTRANDIAS, Mathématiques pour les Sciences de la Vie, de la Nature et de la Santé. Presses Universitaires de Grenoble, 1997 57 :51 BER.

Chapitre 4

Intégration

4.1 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Définition 4.1.1
Soit $[a, b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *On appelle subdivision de* $[a, b]$ *toute suite* $\sigma = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$ *d'un nombre fini d'éléments de* $[a, b]$ *vérifiant* $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

Si la fonction f est bornée sur $[a, b]$ (ce que nous supposerons dorénavant), elle est bornée sur chacun des intervalles $[x_{k-1}, x_k]$. Notons m_k et M_k ses bornes, c-à-d $m_k = \text{Inf } A_k$ et $M_k = \text{Sup } A_k$ où A_k est l'ensemble des valeurs $f(x)$ prises par la fonction f avec $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ ce qu'on écrit :
$m_k = Inf\{f(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ et $M_k = Sup\{f(x),\ x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$.

Définition 4.1.2
Si f *est bornée sur* $[a, b]$ *et* σ *est une subdivision de* $[a, b]$, *on appelle sommes de Darboux* [1] *inférieure et supérieure les nombres :*

$$s(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \qquad S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

où m_k *et* M_k *sont les bornes de* f *sur l'intervalle* $[x_{k-1}, x_k]$.

Si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a, b]$, on montre qu'on a : $s(\sigma) \leq S(\sigma')$ et $s(\sigma') \leq S(\sigma)$. Si on considère maintenant l'ensemble de toutes les subdivisions σ de $[a, b]$, on obtient un ensemble de sommes de Darboux inférieures $s(\sigma)$ qui est majoré et admet donc une borne supérieure $s(f)$. De même les sommes de Darboux supérieures $S(\sigma)$ forment un ensemble minoré et on peut considérer leur borne inférieure $S(f)$.

[1] Gaston DARBOUX, né à Nîmes, 1842-1917

Définition 4.1.3

On appelle intégrale inférieure de f sur $[a, b]$ le nombre $s(f) = Sup\{s(\sigma)\}$ et intégrale supérieure le nombre $S(f) = Inf\{S(\sigma)\}$.

On a pour toute fonction f l'inégalité : $s(f) \leq S(f)$.

La fonction f est dite intégrable sur $[a, b]$ si on a l'égalité : $s(f) = S(f)$.

Ce nombre est alors appelé intégrale de f sur $[a, b]$ et est noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Ainsi nous avons défini un concept d'intégrale [2] à partir de bornes supérieures ou inférieures, ce qui n'est pas très manipulable. Nous allons la définir en termes de limite. Pour cela on introduit la notion de pas d'une subdivision et celle de limite quand le pas tend vers 0.

Définition 4.1.4

On appelle pas *d'une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$ la plus grande des différences $x_k - x_{k-1}$. On note $|\sigma| = Max\{x_k - x_{k-1}, 1 \leq k \leq n\}$*

Proposition 4.1.1

Si f est bornée sur $[a, b]$, quand le pas de la subdivision σ tend vers 0, la somme de Darboux inférieure $s(\sigma)$ a pour limite $s(f)$ et la somme de Darboux supérieure $S(\sigma)$ pour limite $S(f)$. En particulier, si f est intégrable sur $[a, b]$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision σ de pas inférieur à η, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx - \epsilon \leq s(\sigma) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(\sigma) \leq \int_a^b f(x)\,dx + \epsilon$$

Choisissons un point t_k dans chacun des intervalles $[x_{k-1}, x_k]$. La somme $\sum_{k=1}^n f(t_k)$ $(x_k - x_{k-1})$ est comprise entre $s(\sigma)$ et $S(\sigma)$. Par le théorème des gendarmes, elle a pour limite l'intégrale de f lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Définition 4.1.5

On appelle somme de Riemann *de f sur $[a, b]$ toute somme*

$$\sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

[2] La découverte du lien entre "aires" et "dérivée" date de la 2e moitié du XVIIe siècle. Isaac NEWTON et Gottfried LEIBNIZ s'en disputèrent la paternité, et se firent des procès retentissants : le prestige de l'Angleterre et celui de la Prusse étaient en jeu... La querelle ne se calma qu'avec la mort de LEIBNIZ en 1716. C'est LEIBNIZ qui proposa la notation actuelle. Au 19e siècle, une fois les notions de continuité et de dérivabilité bien précisées, il fallut définir de façon rigoureuse l'intégrale. De nombreuses théories virent le jour. Nous exposons ici celle de Bernhard RIEMANN (1826-1866) qui date de 1857 et fut approfondie en 1875 par DARBOUX. Mais certaines fonctions ne sont pas intégrables au sens de Riemann (et Darboux). Une autre théorie a été exposée vers 1902 par Henri LEBESGUE (1875-1941), c'est cette dernière théorie qui est utilisée aujourd'hui par les mathématiciens, car malgré la grande difficulté de son apprentissage, elle permet de parler d'intégrale de la façon la plus générale possible.

où $(x_0, x_1, ..., x_n)$ *est une subdivision de* $[a, b]$ *et pour* $k = 1, ..., n$*, le nombre* t_k *appartient à* $[x_{k-1}, x_k]$.

Théorème 4.1.1
Si f *est intégrable sur* $[a, b]$*, toute suite* $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *de sommes de Riemann de* f *sur* $[a, b]$*, associée à une suite* (σ_p) *de subdivisions dont le pas tend vers 0, est convergente avec*

$$\lim_{p\to+\infty} S_p = \int_a^b f(x)\,dx$$

.

Ce théorème explique le point de vue généralement adopté lors du recours à une intégrale : on découpe l'intervalle en petits segments de longueur dx (on fait une subdivision), et on considère le produit $f(x)\,dx$: entendez $f(t_k)(x_k - x_{k-1})$.

Ce théorème permet aussi de trouver la limite de certaines sommes. Dans ce cas, la subdivision est en général régulière ; la différence $x_k - x_{k-1}$ est constante égale à $(b-a)/n$, on a : $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, et on prend $t_k = x_k$. On obtient l'énoncé simplifié :

Théorème 4.1.2 (Sommes de Riemann régulières)
Si f *est intégrable sur* $[a, b]$ *la suite* $(S_n)_{n\geq 1}$ *où*

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \qquad (4.1)$$

est convergente de limite $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Le cas le plus important est $a = 0,\ b = 1$ alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Exemple 4.1.1

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k}{n}+1}$$

a pour limite quand $n \to +\infty$ *le nombre*

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln 2$$

Exemple 4.1.2

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\frac{k}{n})^2+1}$$

a pour limite quand $n \to +\infty$ le nombre

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

4.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Théorème 4.2.1 (Linéarité)
Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$, alors il en est de même de leur somme $f+g$ et de toute combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$. De plus, on a :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

Ce résultat s'étend à toute combinaison linéaire d'une famille finie de fonctions intégrables.

Théorème 4.2.2 (Formule de Chasles)
Si $a < b < c$, alors f est intégrable sur $[a,c]$ si et seulement si f est intégrable sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Remarque 4.2.1
Il est clair que $\int_a^a f(x)\ dx = 0$, supposons que la relation de Chasles est vraie même si dans le triplet (a,b,c) deux nombre entre a, b et c soient identiques. Alors dans ce cas

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

ce qui implique

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Ceci montre que la formule de Chasles est vraie même si le triplet (a,b,c) n'est pas ordonné.

Théorème 4.2.3 (Positivité)

1. *Si f est intégrable sur $[a,b]$, avec $a \leq b$ et pour tout x, $f(x) \geq 0$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

2. *Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ avec $a \leq b$ et pour tout x, $f(x) \leq g(x)$ alors :*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Une conséquence directe, est le théorème de la moyenne, que nous allons l'énoncer en retirant l'hypothèse $a < b$:

Théorème 4.2.4 (Théorème de la moyenne.)

1. *Si f est localement intégrable sur $I = [a, b]$, et vérifie pour tout x : $m \leq f(x) \leq M$, alors on a :*

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M.$$

2. *D'après le théorème des valeur intermédiaire, si f est continue et*

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \qquad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad y \in [m, M],$$

alors il existe $x^* \in [a, b]$ tel que $y = f(x^*)$. Donc il existe $x^* \in [a, b]$ tel que

$$f(x^*) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

3. *Soient f et g deux fonctions continues sur I. Si g garde un signe constant sur I, alors il existe un point $c \in I$ tel que*

$$\int_a^b f(x) g(x)\ dx = f(c) \int_a^b g(x)\ dx. \tag{4.2}$$

Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$ est appelé moyenne *de f sur $[a, b]$.*

Une autre conséquence importante de la positivité est le lien avec la valeur absolue :

Théorème 4.2.5
Si f est intégrable sur $[a, b]$, où $a \leq b$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a :

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

On prendra garde dans tous ces théorèmes de l'importance ou non de l'hypothèse $a \leq b$.

4.3 Intégrales de fonctions continues

Définition 4.3.1
Soit $x \in [a,b]$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. On appelle primitive *de f la fonction $F(x)$ défine par*

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt,$$

lorsque α est un point quelconque de l'intervalle $[a,b]$.

Théorème 4.3.1
Lorsque $F(x)$ est la primitive de la fonction continue f alors $F(x)$ est dérivable et on a

$$F'(x) = f(x).$$

Preuve. Pour α est un point quelconque de l'intervalle $[a,b]$, on a

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left\{\int_{\alpha}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right\}$$

D'après le théorème 4.2.4 (2), il existe $x_h \in [x, x+h]$ tel que

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = \frac{hf(x_h)}{h} = f(x_h),$$

et $x_h \to x$ lorsque $h \to 0$. Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

□

Définition 4.3.2
Soit f une fonction non nécessairement continue sur $I=[a,b]$. On dit que f est localement intégrable *si pour tout $x \in]a,b[$ il existe un sous-intervalle $J=[\alpha,\beta] \subset]a,b[$ contenant x tel que*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx < \infty$$

autrement dit la fonction $f(x)$ est intégrable sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$.

Exemple 4.3.1
La fonction $f(x) = 1/x$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$, en effet la somme de Riemann régulière (4.1)

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k};$$

est divergente. Mais elle est localement intégrable, car pour tout $x \in]0,1[$ *il suffit de prendre* $J = [\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}]$ *et*

$$\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{3x}{2}} \frac{dx}{x} = \ln\frac{3x}{2} - \ln\frac{x}{2} = \ln 3.$$

Théorème 4.3.2
Si f *est continue sur un intervalle* I*, alors* f *est localement intégrable sur* I*, et pour* a *dans* I*, l'application* F *définie sur* I *par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive [3] *de* f *sur* I*. Inversement, si* f *est continue et si* F *est une primitive de* f *sur* I*, pour tous* a *et* b *de* I *on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Théorème 4.3.3
Si f *est continue sur* $[a,b]$ *où* $a < b$*, à valeurs dans* $[0,+\infty[$*, et vérifie* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$*, alors, on a* $f(x) = 0$ *pour tout* x *de* $[a,b]$*.*

Preuve. Ce théorème, découle du fait qu'une primitive F de f est croissante (car $F'(x) = f(x) \geq 0$) avec $F(b) = F(a)$ donc est constante sur $[a,b]$. Sa dérivée f est alors nulle sur $[a,b]$. □

4.4 Méthodes de calcul des intégrales

Dans cette section on discute essentiellement deux méthodes d'intégration : ***Changement de variable*** et ***intégration par parties***.

4.4.1 Méthode de changement de variable

Soit Q la composéee de deux fonctions P et g, c'est-à-dire $Q(x) = P[g(x)]$ pour tout x dans un intervalle $[a,b]$. Supposons que P est une primitive d'une fonction f, c'est-à-dire $P'(x) = f(x)$ ou bien

$$\int f(x)\,dx = P(x) + C, \tag{4.3}$$

alors $Q'(x) = f[g(x)]g'(x)$ et la formule (4.3) devient

$$\int f[g(x)]g'(x)\,dx = P[g(x)] + C. \tag{4.4}$$

[3] si f est seulement localement intégrable, la fonction F est continue.

Ainsi en considérant l'intégrale définie sur $[a, b]$ la formule (4.4) donne

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)\,dx = P[g(b)] - P[g(a)].$$

Alors en posant $u = g(x)$ on obtient le théorème suivant :

Théorème 4.4.1 (***Théorème de changement de variable)***
Soient $I =]a, b[$ et $g \in \mathcal{C}^1(I)$ et $J = g(I)$ l'image de I par g. Supposons que f est continue sur J. Alors on a

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

4.4.2 Méthode d'intégration par parties

Soit $h(x) = f(x)g(x)$, on sait que la dérivée du produit est égale à $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ et en intégrant cette expression on obtient $h(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$ ou bien

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx. \tag{4.5}$$

Ainsi en introduisant les variables $u = f(x)$ et $v = g(x)$ la formule (4.5) devient

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{4.6}$$

Les formule (4.5) et (4.6) s'appellent la formule d'intégration par parties et pour l'intégrale définie on peut l'énonncer sous la forme :

Théorème 4.4.2 (***Théorème d'intégration par parties)***
Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]a, b[$ et de classe $\mathcal{C}^1(I)$. Alors on a

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Exemple 4.4.1
Il s'agit de calculer l'intégrale définie $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cosidérons deux cas.
1er Cas : n pair.

Pour $n = 2$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos 2x + 1)\,dx = \frac{\pi}{4}. \tag{4.7}$$

Nous allons à présent désigner par $f(x) = \cos^{n-1} x$ *et* $g(x) = \sin x$. *Ainsi*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^n x\ dx &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^{n-1} x}_{u}\ \underbrace{\cos x\ dx}_{dv} = uv\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} vdu \\ &= \underbrace{\cos^{n-1} x \sin x\Big|_0^{\pi/2}}_{=0} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \sin^2 x\ dx \\ &= (n-1)\left\{\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x\ dx - \int_0^{\pi/2} \cos^n x\ dx\right\}\end{aligned}$$

et on trouve une relation entre l'intégrale de $\cos^n x$ *et l'intégrale de* $\cos^{n-2} x$, *à savoir*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\ dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x\ dx.$$

En réutilisant la même expression pour $n-2, n-4, \cdots, 4$ *on obtient*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\ dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\ dx \tag{4.8}$$

et finalement (4.7) *implique*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\ dx = \frac{n!}{2^{n+3}\left(\frac{n}{2}\right)!\pi}.$$

2ème Cas : n impair.

Pour $n = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\ dx = (\sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1. \tag{4.9}$$

Avec la même méthode employée précédemment on obtient à la place de (4.8),

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\ dx = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos x\ dx$$

et en tenant compte de (4.9),

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\ dx = \frac{2^{n-1}\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}{n!}.$$

La formule d'intégation par parties implique le théorème suivant :

Théorème 4.4.3 (Le second théorème de la moyenne.)
Supposons $I = [a, b]$, $g \in C((I)$ *et* $f \in C^1(I)$ *telle qu'elle garde un signe constant sur* I. *Alors il existe un point* $c \in I$ *tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(a)\int_a^c g(x)\ dx + f(b)\int_c^b g(x)\ dx. \tag{4.10}$$

Preuve. Soit $G(x) = \int_a^x g(t)\ dt$, puisque g est continue sur I, G est dérivable et $G'(x) = g(x)$. Ainsi d'après la formule d'intégation par parties

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = \int_a^b f(x)G'(x)\ dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\ dx, \tag{4.11}$$

car $G(a) = 0$. D'après la formule (4.2) du théorème de la valeur moyennne, il existe $c \in I$ tel que

$$\int_a^b f'(x)G(x)\ dx = G(c)\int_a^b f'(x)\ dx = G(c)[f(b) - f(a)]$$

Par conséquent, (4.11) devient

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(b)G(b) - G(c)[f(b) - f(a)] = f(a)G(c) + f(b)[G(b) - G(c)].$$

Ce qui montre (4.10), car $G(c) = \int_a^c g(x)\ dx$ et que $G(b) - G(c) = \int_c^b g(x)dx$. □

4.5 Intégrales impropres

Jusqu'à présent on avait considéré la définition d'une intégrale sur un intervalle lorsque cette intervalle est borné. Nous allons considérer maintenant l'intégrale de f sur un intervalle non borné. Par exemple on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[a, \infty[$ et on se pose la question "Est-ce que la limite $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx$ existe ou non ?" Pour répondre à cette question, il faut connaitre la primitive de f. En effet si $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$, alors

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx = lim_{x\to\infty}F(x)$$

et seulement lorsque cette limite I existe on peut noter

$$I = \int_a^\infty f(x)\ dx$$

et dans ce cas on dira que *l'intégrale converge*. Cette intégrale s'appelle l'***intégrale impropre*** et nous allons donner quelques exemples.

Exemple 4.5.1
L'intégrale impropre $\int_1^\infty x^{-\alpha}dx$ *converge si* $\alpha > 1$ *et diverge lorsque* $\alpha \leq 1$. *Pour montrer ceci, écrivons*

$$F(x) = \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & si \quad \alpha \neq 1, \\ \ln x & si \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Comme la limite de $F(x)$ *existe seulement lorsque* $\alpha > 1$, *on obtient le résultat annoncé.*

Il peut arriver que l'intervalle $[a, b]$ soit borné mais l'intégrale $\int_a^b f(x)\, dx$ soit divergente. Dans ce cas aussi on dira que l'intégrale est impropre

Exemple 4.5.2
Considérons l'intégrale impropre $\int_0^1 x^{-\alpha} dx$. *Cette intégrale converge si* $\alpha < 1$ *et diverge lorsque* $\alpha \geq 1$. *En effet,*

$$I(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1-\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} & si \quad \alpha \neq 1, \\ -\ln \epsilon & si \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Comme $\lim_{\epsilon \to 0} I(\epsilon)$ *existe seulement lorsque* $\alpha < 1$, *on obtient le résultat annoncé.*

Les intégrales impropres $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx, \int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ se traitent de la même façon.

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

et

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^\infty f(x)\, dx.$$

4.6 Calcul approché d'intégrales

Le calcul approché d'intégrales se pose dans deux cas :

1er cas : on connait la fonction f mais sa primitive ne s'exprime pas à l'aide des fonctions connues ou est difficile à calculer directement.

2e cas : on ne connait les valeurs de $f(x)$ qu'en quelques points. C'est notamment le cas lorsque f représente une grandeur physique, et que $f(x)$ est donné par des mesures expérimentales.

On va étudier rapidement 4 méthodes classiques de calcul approché d'une intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ où f est une fonction continue sur $[a, b]$:

4.6.1 Méthode des rectangles :

Il s'agit d'approcher l'intégrale par la somme de Riemann R_n associée à une subdivision régulière, et où on prend $t_k = x_{k-1}$ extrémité gauche de l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$: $R_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$. On montre que si f est dérivable sur $]a, b[$ avec $|f'(x)| \leq M_1$ l'erreur $I - R_n$ vérifie : $|I - R_n| \leq M_1 \dfrac{(b-a)^2}{2n}$.

Une variante de cette méthode consiste à prendre $t_k = x_k$ extrémité droite de l'intervalle. On pose $R'_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(a + k\dfrac{b-a}{n})$.

On obtient la même majoration de l'erreur : $|I - R'_n| \leq M_1 \dfrac{(b-a)^2}{2n}$.
Remarquons qu'on a : $R'_n = R_n + \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$.

La méthode des rectangles est surtout intéressante lorsque la fonction f est monotone sur l'intervalle $[a, b]$. Dans ce cas les deux sommes R_n et R'_n obtenues sont en fait des sommes de Darboux et donnent un encadrement de l'intégrale I : si f est croissante on a : $R_n \leq I \leq R'_n$ et si f est décroissante : $R'_n \leq I \leq R_n$.

4.6.2 Méthode des trapèzes :

Celle-ci consiste simplement à prendre $T_n = \frac{1}{2}(R_n + R'_n)$.

Elle s'interprète en disant qu'on remplace sur chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ la fonction f par une fonction affine φ qui coïncide avec f aux extrémités x_{k-1} et x_k.
Si f est deux fois dérivable sur $]a, b[$, avec $|f''(x)| \leq M_2$, on a la majoration : $|I - T_n| \leq M_2 \dfrac{(b-a)^3}{12\, n^2}$.

4.6.3 Méthode du point médian :

Il s'agit simplement de prendre la somme de Riemann avec t_k au milieu de l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, c-à-d de considérer $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(a + (2k-1)\dfrac{b-a}{2n})$.

Si f est deux fois dérivable sur $]a, b[$ avec $|f''(x)| \leq M_2$, on a : $|I - S_n| \leq M_2 \dfrac{(b-a)^3}{24\, n^2}$.

4.6.4 Méthode de Simpson :

On combine les méthodes des trapèzes et du point médian en considérant :
$S'_n = \frac{1}{3}(2S_n + T_n)$ d'où la formule où $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$ et $t_k = a + (2k-1)\,\dfrac{b-a}{2n}$:

$$S'_n = \frac{b-a}{3n}\left(\frac{f(a)}{2} + 2f(t_1) + f(x_1) + 2f(t_2) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + 2f(t_n) + \frac{f(b)}{2}\right).$$

Si f est 4 fois dérivable sur $]a, b[$ avec $f^{(4)}(x) \leq M_4$, on a la majoration : $|I - S'_n| \leq M_4 \dfrac{(b-a)^5}{2880\ n^4}$.

Pour une fonction f quelconque, la méthode de Simpson s'interprète en disant que sur chaque segment $[x_{k-1}, x_k]$, on remplace la fonction f par la fonction polynôme φ de degré ≤ 2 qui coïncide avec f aux extrémités x_{k-1}, x_k et au milieu $\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$ de l'intervalle.

Cette méthode de Simpson, est utilisée par les calculettes (ou logiciels) pour le calcul approché d'intégrales. Ce qui donne son efficacité n'est pas la valeur de la constante 2880, mais le fait que c'est une méthode en $1/n^4$: autrement dit, dès qu'on double n on divise par 16 la majoration de l'erreur.

4.6.5 Remarques :

Ces majorations sont très fines, car on a une égalité en remplaçant le M_2 ou M_4 par une valeur $f''(c)$ ou $f^{(4)}(c)$ de la dérivée correspondante (sous réserve de continuité de cette dérivée).

Comme pour tout problème de calcul numérique, il faut ajouter à l'erreur théorique ci-dessus, l'erreur liée aux arrondis au niveau des calculs intermédiaires et des résultats. C'est pourquoi, il est illusoire de croire qu'on améliorera la précision en prenant une grande valeur de n. En effet, plus n est grand, plus il y a de calculs intermédiaires, donc d'arrondis et d'erreurs d'arrondis qui peuvent se cumuler.

Enfin, la valeur des majorants (M_2 et M_4) est souvent difficile à obtenir, voire impossible quand f est inconnue (cas de mesures d'une grandeur physique).

4.7 Intégrales des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ s'écrit : $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$. Elle est dite intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si les fonction φ et ψ sont intégrables sur $[a, b]$. Dans ce cas, on a : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt + i\int_a^b \psi(t)\,dt$.

Les théorèmes cités ci-dessus (linéarité, Chasles, sommes de Riemann, lien intégrale-primitive) restent valables, y compris ceux des chapitres précédents (intégration par parties, changement de variable). Restent ceux où apparaisssent des inégalités :

Proposition 4.7.1
Si f, à valeurs dans $\mathbb{C}$ est intégrable sur $[a, b]$ où $a \leq b$, il en est de même de son module $|f|$ et on a : $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$

Enfin, il n'y a pas à notre niveau d'équivalent du théorème de la moyenne pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

4.8 Références

Les cinq chapitres ci-présent est un document proche du cours oral fait en amphi. Sa présentation est assez compacte pour obliger les étudiants à un véritable travail. Nous renvoyons autant que possible à d'autres ouvrages, notamment à ceux ci-dessous qui sont présents à la Bibiothèque Universitaire, et sont écrits pour des étudiants :

[1] Un livre de cours déjà ancien (qui par exemple note Log le logarithme népérien) mais incomparablement riche en illustrations, exemples, commentaires et en exercices (avec solutions).

[1a] : François LIRET, Dominique MARTINAIS, Cours de Mathématiques, Algèbre 1re Année, Cours et exercices avec solutions. DUNOD 1997.

[1b] : François LIRET, Dominique MARTINAIS, Cours de Mathématiques, Analyse 1re Année, Cours et exercices avec solutions. DUNOD 1997.

[2] Un livre d'exercices corrigés en détail, avec des rappels de cours bien faits :

[2a] : Eric LEHMAN, Mathématiques pour l'étudiant de 1re Année, 1. Algèbre, BELIN 1984.

[2b] : Eric LEHMAN, Mathématiques pour l'étudiant de 1re Année, 2. Analyse, BELIN 1984.

[3] Dans les marges du document apparaissent des références à ces ouvrages.

[3a] : Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD, Algèbre 1, VUIBERT 1997.

[3b] : Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD, Algèbre 2, VUIBERT 1997.

[3c] : Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD, Analyse 1, VUIBERT 1997.

[3d] : Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD, Analyse 2, VUIBERT 1997.

[4] Citons également deux livres plus récents, de style assez concis :

[4a] E. AZOULAY, Mathématiques, cours et exercices corrigés, 3e édition. Ediscience 1983, DUNOD 2002.

[4b] Jacques VELU : Mathématiques Générales, Cours et exercices corrigés. 1er cycle, CNAM cycle A, IUT. DUNOD 2000.

[5] Enfin, usez et abusez de la L1 en ligne (adresse à partir du réseau de la fac :

http :deugenligne.campus.univ-poitiers.fr/,

sinon, de chez vous, adresse nationale :

http ://www.uel-pcsm.education.fr/consultation/reference/index.htm

qui vous propose des cours et exercices, en général bien adaptés.

Autre site très riche en exercices, avec des données numériques aléatoires qui se renouvellent automatiquement :

http ://wims.unice.fr/wims/fr_home.html

ou

http ://wims.auto.u-psud.fr/wims/