1 Introduction

Ce cours est un cours d'introduction à la géométrie algébrique et plus particulièrement à l'étude d'un concept à la fois riche et plutot simple qui est celui de variété torique.

La géométrie algébrique est l'étude d'objets de nature géométrique (c'est à dire d'objets qui "ressemblent à quelque chose") au moyen de méthodes algébriques (c'est-à-dire au moyen d'objets "purement abstraits", comme par exemple les anneaux). La géométrie algébrique "moderne" étudie essentiellement des objets appelés schémas qui remplacent aventageusement les variétés algébriques en permettant de décrire algébriquement certaines notions. Toutefois, dans leur généralité, les schémas ressemblent plus à des objets sans forme qu'à des objets en ayant une, et leur étude porte en fait généralement sur certains schémas particuliers "ayant une géométrie".

Les variétés toriques forment une classe assez particulières de variétés algébriques, qui est à la rencontre de plusieurs champs mathématiques. Outre l'algèbre et la géométrie, on y rencontre la combinatoire, l'analyse, la topologie algébrique notemment, l'arithmétique aussi. C'est donc un exemple particulièrement représentatif de l'interconnexion entre bien des domaines mathématiques. Cette théorie est également souvent utilisée comme un cadre 'simple' pour l'étude de phénomènes plus complexes sur les variétés algébriques générales.

La première partie de ce cours constitue une introduction à certaines notions fondamentales de géométrie algébrique. Nous essaierons de donner des illustrations géométriques à ces notions, sans perdre la rigueur inhérente aux preuves algébriques.

La seconde partie concerne plus précisément les variétes toriques elles-même et nous donnerons leur constructions et leurs propriétés fondamentales, puis nous introduirons certains objets fondamentaux pour leur étude.

Durant tout notre cours, nous prendrons le corps des nombres complexes comme corps de base. Cela possède plusieurs avantages : Cela donne à la fois un aspect plus géométrique aux objets (ce qui facilite l'intuition) et, ce corps étant à la fois algébriquement clos et de caractéristique nulle, l'aspect algébrique s'en trouve simplifié. En outre, cela peut permettre de faire usage de l'analyse complexe, qui n'a pas forcément d'analogue direct lorsqu'on se base sur d'autres corps.

2 Fondements algébriques

2.1 Rappels sur les anneaux

2.1.1 Définition

DÉFINITION **2.1** *On appelle anneau un ensemble A muni de deux lois de compositions internes $+$ et $.$ vérifiant :*

- *i) $(A, +)$ est un groupe commutatif ;*
- *ii) la loi $.$ est associative ;*
- *iii) la loi $.$ est distributive à gauche et a droite par rapport à la loi $+$;*
- *iv) la loi $.$ possède un élément neutre.*

On notera généralement 0 l'élement neutre de A pour $+$ et 1 l'élement neutre de A pour $.$

Si de plus la loi $.$ est commutative, on dira que l'anneau A est commutatif.

Dans toute la suite, un anneau est toujours supposé commutatif.

DÉFINITION **2.2** *Si A et B sont deux anneaux, un morphisme d'anneaux de A dans B sera une application ϕ de A dans B qui vérifira pour tous x et y de A, $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ et $\phi(a.b) = \phi(a).\phi(b)$, ainsi que $\phi(1_A) = 1_B$.*

2.1.2 Idéaux et quotients

DÉFINITION **2.3** *Un idéal I d'un anneau A est un sous-groupe de A qui vérifie que pour tout i dans I et tout a dans A, on a $i.a \in I$.*

Soit I un idéal d'un anneau A. Alors on définit l'anneau quotient de A par I comme le groupe quotient A/I muni du produit $\bar{a}.\bar{b} = \overline{ab}$ pour tout a et b dans A.

Si on se donne une partie E de A, l'idéal engendré par E est l'intersection des idéaux de A qui contiennent E. C'est un idéal car toute intersection d'idéaux d'un anneau en est un.

DÉFINITION **2.4** *Un anneau est dit intègre si quels que soient deux éléments non nuls x et y de cet anneau, xy aussi est non nul. Un idéal propre d'un anneau est dit premier si le quotient de l'anneau par cet idéal est intègre. Cela revient à demander que si un produit d'éléments de l'anneau est dans l'idéal considéré, alors l'un au moins de ces éléments est dans l'idéal.*

Un anneau est dit réduit si quel que soit l'élément non nul x de cet anneau et l'entier $n \geq 1$, x^n aussi est non nul (autrement dit l'anneau considéré n'a pas d'élément nilpotent non nul). Un idéal d'un anneau est dit radical ou radiciel si le quotient de l'anneau par cet idéal est réduit. Cela revient à demander que si une puissance d'un élément de l'anneau est dans l'idéal considéré, alors l'élément lui-même est dans l'idéal.

Un anneau A est dit noethérien si tout idéal de A est engendré par un nombre fini d'éléments. Ceci équivaut à demander que toute suite croissante d'idéaux de A soit stationnaire, ou que toute famille non vide d'idéaux de A possède un élément maximal pour l'inclusion.

Remarque **2.1** *Un anneau quotient d'un anneau noethérien est lui-même noethérien.*

En effet, soit ϕ un morphisme surjectif d'un anneau noethérien A dans un anneau B. Soit I un idéal de B, et $a_1, .., a_k$ des générateurs de $\phi^{-1}(I)$. Alors, clairement, $\phi(a_1), ..., \phi(a_k)$ engendrent I.

Remarque **2.2** *L'image réciproque d'un idéal premier par un morphisme d'anneaux est un idéal premier. En effet, soient A et B deux anneaux, $\phi : A \mapsto B$ un morphisme, I un idéal premier de B. Alors I ne contient pas 1_B donc $\phi^{-1}(I) \neq A$, d'autre part, si x et y de A ne sont pas dans $\phi^{-1}(I) \neq A$, alors $\phi(x)$ et $\phi(y)$ ne sont pas dans I et $\phi(xy) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ n'y est pas non plus, et xy n'est pas dans $\phi^{-1}(I)$.*

2.1.3 Radicaux

Définition **2.5** *Soit I un idéal d'un anneau A. Le radical de I est l'ensemble des éléments x de A pour lesquels il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in A$.*

Proposition **2.3** *Le radical d'un idéal d'un anneau est l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent.*

Preuve Soit A un anneau, I un idéal de A. Si P est premier et contient I et si $x \notin P$, alors aucune puissance de x n'est dans P ni a fortiori dans I. Donc $x \notin \sqrt{I}$. Ainsi, $\sqrt{I} \subset P$ et donc $\sqrt{I}$ est inclus dans l'intersection des idéaux premiers qui contiennent I.

Réciproquement, soit $x \notin \sqrt{I}$. Considérons l'ensemble $\mathcal{I}$ des idéaux qui contiennent I mais aucune puissance de x. Cet ensemble est non vide car il contient $\sqrt{I}$ et est stable par réunion croissante. Il contient donc un élément maximal P. Montrons que P est premier.

Soient y_1 et y_2 deux éléments qui ne sont pas dans P. Alors, par maximalité, l'idéal engendré par y_1 et P contient une puissance de x. On peut donc écrire $x^{k_1} = a_1 y_1 + p_1$, avec p_1 dans P, et de même, $x^{k_2} = a_2 y_2 + p_2$ avec p_2 dans P. En multipliant les deux égalités, on trouve $x^{k_1+k_2} = a_1 a_2 y_1 y_2 + p_3$ où p_3 est dans P. Comme $x^{k_1+k_2}$ n'est pas dans P, $a_1 a_2 y_1 y_2$ n'y est pas non plus, ni a fortiori $y_1 y_2$. Cela prouve que P est premier, ce qui termine la preuve de la proposition. □

Le théorème suivant sera utile plus tard :

THÉORÈME **2.4** *Soit I un idéal radical d'un anneau noethérien A. Alors, il existe un nombre fini d'idéaux premiers $P_1, ..., P_k$ de A tels que $I = \bigcap_{1 \leq i \leq k} P_i$ et $P_i \not\subseteq P_j$ pour $i \neq j$. De plus, ces idéaux sont uniques à leur ordre près.*

DÉMONSTRATION Soit A un anneau noethérien. Nous allons montrer que tout idéal radical de A est intersection finie d'idéaux premiers. Appelons $\mathcal{F}$ la famille des idéaux radicaux de A qui ne sont pas intersection finie d'idéaux premiers. Supposons que $\mathcal{F}$ possède un élément maximal, que nous noterons I. Comme I n'est pas premier, on peut trouver deux éléments a et b de A, hors de I, mais tels que $ab \in I$.

Les idéaux $I + Aa$ et $I + Ab$ sont des idéaux propres de A (en effet, le produit de tout élément de $I + Aa$ par b est dans I, donc 1 n'y est pas) et il en est de même de leur radical (un anneau ne peut être le radical d'un idéal propre). Comme $\sqrt{I + Aa}$ contient strictement I, il n'est pas dans $\mathcal{F}$ et comme il est radical, il est bien l'intersection d'une famille finie $P_1, ..., P_k$ d'idéaux premiers de A. De même, $\sqrt{I + Ab} = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$ où les Q_i sont premiers. Reste à voir que I est l'intersection des P_j et des Q_i.

Or, si x est dans l'intersection de $\sqrt{I + Aa}$ avec $\sqrt{I + Ab}$, on a une puissance assez grande de x dans $I + Aa$, une autre dans $I + Ab$ et leur produit est une puissance de x qui est dans le produit $(I + Aa)(I + Ab)$ qui est inclus dans I car $ab \in I$. Ainsi, x se trouve dans le radical de I, qui est I.

La famille $\mathcal{F}$ ne pouvant avoir d'élément maximal et A étant noethérien, on en déduit que tout idéal radical de A est intersection finie d'idéaux premiers. Reste maintenant à en montrer l'unicité.

Supposons que deux familles $P_i, 1 \leq i \leq k$ et $Q_j, 1 \leq j \leq l$ d'idéaux premiers d'un anneau aient la même intersection et qu'aucun membre d'une de ces deux familles ne contienne un autre membre de la même famille. Si P_i ne contenait aucun Q_j, alors on pourrait trouver a_j dans chaque Q_j hors de P_i. Le produit des a_j serait dans chaque Q_j, donc dans I, mais pas dans P_i car P_i est premier, donc pas dans I. Contradiction. Donc chaque P_i contient un Q_j qui lui-même contient un $P_{i'}$ par le même raisonnement. On a donc forcément $P_i = P_{i'} = Q_j$, et cela donne le résultat. □

2.1.4 Localisation

Définition **2.6** *Soit A un anneau et S une partie de A qui est stable par multiplication et contient 1 (on appelle S une partie multiplicative de A). On considère alors sur $A \times S$ la relation suivante : $(a, s) \sim (a', s')$ s'il existe $t \in S$ tel que $as't = a'st$. C'est une relation d'équivalence et l'ensemble quotient, noté $S^{-1}A$ et appelé localisé de A par rapport à S, est naturellement muni d'une structure d'anneau par passage aux classes de $(a, s) + (a', s') = (as' + a's, ss')$ et $(a, s).(as') = (aa', ss')$. On notera $\frac{a}{s}$ la classe de (a, s).*

Les propriétés suivantes des localisés sont très classiques, et nous laissons leur preuve au lecteur en guise d'exercice :

Proposition **2.5** *Soit A un anneau et S une partie multiplicative de A.*

i) L'application $a \to \frac{a}{1}$ de A dans $S^{-1}A$ est un morphisme d'anneaux appelé morphisme canonique ;

ii) Si S contient 0, alors $S^{-1}A$ est l'anneau nul (ce cas sera souvent exclus) ;

iii) Si S est réduit à 1, le morphisme canonique est un isomorphisme ;

iii) Si A est intègre et S ne contient pas 0, alors la relation d'équivalence se réduit à $(a, s) \sim (a', s')$ si $as' = a's$ et le morphisme canonique est injectif.

iv) Si P est un idéal premier d'un anneau A, alors le complémentaire de P dans A est une partie multiplicative de A et le localisé de A par rapport à $A \backslash P$ (appelé localisé de A par rapport à P) a un unique idéal maximal formé des fractions ayant leur numérateur dans P (cela ne dépend pas du représentant choisi).

Définition **2.7** *Soit A un anneau intègre (non nul). Alors le localisé de A par rapport à son idéal réduit à 0 s'appelle le corps des fractions de A. Il est clair que c'est un corps.*

Proposition **2.6** *Soit A un anneau intègre, K son corps des fractions et S une partie multiplicative de A ne contenant pas 0. Alors le localisé de A par rapport à S s'identifie canoniquement à un sous-anneau de K (par $\frac{a}{s} \to \frac{a}{s}$). En particulier, $S^{-1}A$ est intègre.*

Preuve C'est une simple vérification. $\square$

Un cas particulier est celui où la partie multiplicative S est donnée par l'ensemble des puissances d'un élément non nul a de A (intègre). On note alors généralement cet anneau $A[\frac{1}{a}]$.

Nous utiliserons plus tard la proposition suivante :

Proposition **2.7** *Soit A un anneau intègre et K son corps des fractions. Alors A est l'intersection de ses localisés en ses idéaux maximaux(vus comme sous-anneaux de K.*

Preuve Clairement, A est inclus dans l'intersection considérée.

Prenons maintenant deux éléments a et b de A, $b \neq 0$ et I un idéal premier de A. Dire que $\frac{a}{b}$ est dans le localisé de A par rapport à I revient à demander l'existence de c dans A et d dans $A \backslash I$ tels que $ad = bc$ et on peut donc trouver c si et seulement si $ad \in Ab$. L'ensemble $T_{a,b} = \{x \in A \text{ tq } ax \in Ab\}$ est un idéal de A (c'est immédiat) et donc $\frac{a}{b}$ est dans le localisé de A par rapport à I si et seulement si I ne contient pas tout $T_{a,b}$. Ainsi, $\frac{a}{b}$ n'est dans l'intersection des localisés de A en tous ses idéaux maximaux que si $T_{a,b}$ est égal à A. Dans de cas, $T_{a,b}$ contient 1 et donc $a \in Ab$. Ainsi, $\frac{a}{b} \in A$.

La proposition est démontrée. □

2.2 Anneaux de polynômes

2.2.1 Définition et notations

Nous allons maintenant définir les anneaux de polynômes. En fait, nous allons nous intéresser à une généralisation des anneaux de polynômes classiques qui seront importants dans l'étude des variétés toriques.

Définition **2.8** *On appelle semi-groupe (commutatif) un ensemble S qui est muni d'une loi de composition interne $*$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- *i) La loi $*$ possède un élément neutre, noté 0 ;*
- *ii) la loi $*$ est associative ;*
- *iii) la loi $*$ est commutative.*

Exemple **2.2.1** *Tout groupe (commutatif) est un semi-groupe.*

Exemple **2.2.2** *Si A est un anneau, alors $(A, .)$ est un semi-groupe.*

Définition **2.9** *Soient $(S, *)$ et $(S', *')$ deux semi-groupes. Une application f de S dans S' est appellée morphisme de semi-groupes si elle vérifie $f(0_S) = 0_{S'}$ et $f(s_1 * s_2) = f(s_1) *' f(s_2)$ pour tous s_1 et s_2 de S.*

DÉFINITION **2.10** *Soit A un anneau et S un semi-groupe. On appelle anneau de polynômes généralisé l'ensemble $A[S]$ des applications de S dans A n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls muni de l'addition classique des fonctions et du produit suivant :*

Si $f : S \to A$, $g : S \to A$ et s dans S, alors il n'existe qu'un nombre fini de couples (s_1, s_2) d'éléments de S tels que $s_1 * s_2 = s$ et $f(s_1) \neq 0$, $g(s_2) \neq 0$. Appelons E_s l'ensemble de ces couples et posons :

$$f.g(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } E_s = \emptyset \\ \sum_{(s_1,s_2)\in E_s} f(s_1)g(s_2) & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments s de S pour lesquels E_s n'est pas vide, et donc $f.g$ est bien défini.

PROPOSITION **2.8** *Muni de ces deux lois, $A[S]$ est un anneau. De plus, l'application qui à un élément a de A associe l'élément de $A[S]$ qui envoie l'élément neutre de S sur a et les autres éléments de S sur 0 est un morphisme injectif. On identifiera A avec son image par ce morphisme.*

Pour s dans S, on notera X^s l'élément de $A[S]$ qui envoie s sur 1_A et les autres éléments de S sur 0 (on notera tout de même plutot 1 que X^0). Remarquons que tout élément de $A[S]$ s'écrit de manière unique sous forme

$$\sum_{s\in S} a_s X^s$$

avec a_s nul sauf pour un nombre fini de valeurs de s. Remarquons aussi que $X^s X^{s'} = X^{s*s'}$.

PROPOSITION **2.9** *Soient S_1 et S_2 deux semi-groupes, A un anneau. Alors, $S_1 \times S_2$ est naturellement muni d'une structure de semi-groupe et $A[S_1 \times S_2]$ est isomorphe à $(A[S_1])[S_2]$ ainsi qu'à $A[S_1] \otimes_A A[S_2]$.*

Dans un tel cas, on notera $X_1^{s_1} X_2^{s_2}$ plutot que $X^{(s_1,s_2)}$.

PREUVE Le fait que $S_1 \times S_2$ soit naturellement un semi-groupe ne présente aucune difficulté, et l'isomorphisme entre $A[S_1 \times S_2]$ et $(A[S_1])[S_2]$ est très clair. Pour l'isomorphisme entre $A[S_1 \times S_2]$ et $A[S_1] \otimes_A A[S_2]$, on peut constater que l'application $(s_1, s_2) \to X^{s_1} \otimes X^{s_2}$ de $S_1 \times S_2$ dans $A[S_1] \otimes_A A[S_2]$ est un morphisme de semi-groupes et on lui associe un morphisme ϕ de A-algèbres. D'autre part, l'application

$$\begin{array}{cccc} f : & A[S_1] \times A[S_2] & \mapsto & A[S_1 \times S_2] \\ & (\sum_{s_1\in S_1} a_{s_1} X^{s_1}, \sum_{s_2\in S_2} b_{s_2} X^{s_2}) & \to & \sum_{(s_1,s_2)\in S_1\times S_2} a_{s_1} b_{s_2} X^{(s_1,s_2)} \end{array}$$

est bilinéaire et on a donc une application $\tilde{f}$ de $A[S_1] \otimes_A A[S_2]$ dans $A[S_1 \times S_2]$ telle que $\tilde{f} \circ \psi = f$ où ψ désigne l'application bilinéaire naturelle de $A[S_1] \times A[S_2]$ dans $A[S_1] \otimes_A A[S_2]$.

On vérifie alors facilement, sur les générateurs canoniques de $A[S_1 \times S_2]$ et de $A[S_1] \otimes_A A[S_2]$, que $\tilde{f}$ et ϕ sont réciproques l'une de l'autre, ce qui montre le résultat annoncé. $\square$

DÉFINITION **2.11** *On suppose que $S = \mathbb{N}$. Alors l'anneau $A[S]$ s'appelle anneau de polynômes à une indéterminée à coefficients dans A et se note $A[X]$. On notera alors simplement X l'élément X^1.*

On suppose maintenant que $S = (\mathbb{N})^n$ où n est un entier naturel ≥ 1. Alors $A[S]$ s'appelle anneau de polynômes à n indéterminées à coefficients dans A et se note $A[X_1, ..., X_n]$. D'autre part, pour $i = 1, ..., n$, l'élément $X_1^0 X_2^0 ... X_{i-1}^0 X_i^1 X_{i+1}^0 ... X_n^0$ sera noté X_i.

EXEMPLE **2.2.3** *On suppose que $S = \mathbb{Z}$. Alors, l'anneau $A[S]$ sera noté $A[X, X^{-1}]$, et on notera ici aussi X l'élément X^1. Cet anneau est isomorphe au quotient de l'anneau $A[X, Y]$ par l'idéal principal engendré par le polynôme $XY - 1$, ainsi qu'au localisé $A[X][\frac{1}{X}]$ de $A[X]$ par rapport à la partie multiplicative formée des puissances de X.*

Remarquons aussi simplement que si on a un morphisme de $A[X, X^{-1}]$ dans un anneau B, alors l'image de X est inversible, d'inverse l'image de X^{-1}.

2.2.2 Morphismes

Donnons ici quelques résultats concernant les morphismes des anneaux de polynômes généralisés.

PROPOSITION **2.10** *Soient A et B deux anneaux, S un semi-groupe et ψ un morphisme (d'anneaux) de $A[S]$ dans B. Alors :*
i) La restriction de ψ à A est un morphisme de A dans B ;
ii) l'application $s \to \psi(X^s)$ est un morphisme de semi-groupes de S dans $(B, .)$.

Réciproquement, si on a un morphisme ϕ de A dans B et un morphisme de semi-groupes f de S dans $(B, .)$, alors il existe un unique morphisme d'anneaux ψ de $A[S]$ dans B tel que $\psi|_A = \phi$ et $\psi(X^s) = f(s)$ pour tout s de S.

PREUVE La première partie de la proposition est immédiate.

Pour la seconde, remarquons que si ψ vérifie les conditions de la proposition, alors pour $P \in A[S]$ de la forme $P = \sum_{s \in S} a_s X^s$, on doit avoir

$$\psi(P) = \sum_{s \in S} \phi(a_s) \cdot f(s)$$

(Remarquons que cette somme est finie).

Réciproquement, la formule ci-dessus définit bien un morphisme d'anneaux de $A[S]$ dans B qui satisfait aux conditions de la proposition. $\square$

Remarque **2.11** *Si A est un anneau (non nul) et S un semi-groupe, alors l'application $s \to X^s$ est un morphisme de S dans $(A[S], .)$, et même un isomorphisme sur son image. D'après la proposition 2.10, un morphisme ϕ de semi-groupes de S dans S' induit naturellement un morphisme d'anneaux de $A[S]$ dans $A[S']$ (envoyant X^s sur $X^{\phi(s)}$ et valant l'identité sur A).*

Corollaire **2.12** *Soit A et B deux anneaux, $\phi : A \mapsto B$ un morphisme (d'anneaux), et b un élément de B. Alors :*
i) Il existe un unique morphisme $\tilde{\phi}$ de $A[X]$ dans B qui prolonge ϕ et tel que $\tilde{\phi}(X) = b$;
ii) si b est inversible, alors il existe un unique morphisme $\tilde{\phi}$ de $A[X, X^{-1}]$ dans B qui prolonge ϕ et tel que $\tilde{\phi}(X) = b$.

Preuve D'après la proposition ci-dessus, il suffit de voir que quel que soit $b \in B$ il existe un unique morphisme de semi-groupes f de $\mathbb{N}$ dans $(B, .)$ tel que $f(1) = b$ et, si b est inversible, un unique morphisme de semi-groupes f' de $\mathbb{Z}$ dans $(B, .)$ tel que $f(1) = b$.

On voit en fait facilement que f est donné par $f(n) = b^n$ (et $f(0) = 1_B$) et est bien unique, et, si b inversible, f' donné par $f'(n) = f(n)$ si $n \geq 0$, $f'(n) = (b^{-1})^{-n}$, noté d'ailleurs aussi b^n, si $n < 0$, et est également unique. $\square$

2.2.3 Quelques propriétés passant aux polynômes

Certaines propriétés des anneaux se transmettent à leurs anneaux de polynômes. En voici trois importantes :

Théorème **2.13** *Si l'anneau A est intègre (resp. noethérien, factoriel), alors $A[X]$ est inègre (resp. noethérien, factoriel).*

Démonstration Le cas intègre est le plus simple. Si A est intègre et P_1, P_2 sont deux polynômes non nuls de $A[X]$, alors soient $a_1X^{n_1}$ et $a_2X^{n_2}$ les coefficients dominants de P_1 et P_2 respectivement. Alors, le monôme $a_1a_2X^{n_1}X^{n_2}$ n'est pas nul, et est le monôme dominant de P_1P_2, qui n'est donc pas nul non plus. L'anneau $A[X]$ est donc intègre.

Supposons maintenant A noethérien. Nous allons prouver que $A[X]$ l'est aussi. Pour cela, nous montrons que toute suite croissante d'idéaux de $A[X]$ est stationnaire.

Soit donc $(J_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'idéaux de $A[X]$, et J sa réunion. Pour tous entiers naturels p et q, on note $j_{p,q}$ l'idéal de A formé des coefficients dominants des polynômes de degré q de J_p auxquels on adjoint 0. Il s'agit clairement d'un idéal de A quels que soient p et q et, si on a $q < q'$, on a $j_{p,q} \subset j_{p,q'}$ (en multipliant un polynôme de degré q par $X^{q'-q}$) et si $p < p'$, on a $j_{p,q} \subset j_{p',q}$.

Si on fixe q, on a $j_q = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} j_{p,q}$ est l'idéal de A formé de 0 et des coefficients dominants des polynômes de degré q de J. En outre, si $q \leq q'$, on a $j_q \subset j_{q'}$.

Comme A est noethérien, la suite (j_q) stationne à une valeur j. Prenons donc q_* pour lequel $j_{q_*} = j$. La suite $(j_{p,q_*})_{p\in\mathbb{N}}$ est elle aussi une suite stationnaire d'idéaux de A et on peut donc trouver p_* tel que $j_{p_*,q_*} = j$.

Maintenant, pour tout $q \leq q_*$, on peut trouver p_q tel que $j'_{p_q} = j'_q$ car la suite $(j_{p,q})_{p\in\mathbb{N}}$ est également stationnaire. Si on prend finalement $p' \geq M = max(p_*, p_0, ..., p_{q_*})$, on a que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $j_{p',q} = j_q$.

Alors, pour $p' \geq M$, $J_{p'} \subset J$ et $j_{p',q} = j_q$ pour tout q. Montrons que cela entraîne l'égalité de ces deux idéaux. On montre qu'ils contiennent les mêmes polynômes ayant un degré fixé, et ce par récurrence sur le degré. Déjà, ces deux idéaux contiennent les mêmes constantes car $j_{p',0} = j_0$. Supposons qu'ils contiennent les mêmes polynômes de degré $< n$, et soit P un polynôme de degré n de J. Ce polynôme s'écrit $P(X) = a_nX^n + P_{n-1}(X)$ où $P_{n-1}(X)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$. Alors, a_n est dans j'_n et donc dans $j_{p',n}$. L'idéal $J_{p'}$ contient donc un polynôme $Q(X) = a_nX^n + Q_{n-1}(X)$, avec $d^0(Q) \leq n-1$, polynôme qui est aussi dans J. Alors, J contient aussi le polynôme $P - Q(X) = P_{n-1}(X) - Q_{n-1}(X)$ qui est de degré $\leq n-1$ et donc ce polynôme est aussi dans $J_{p'}$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, $J_{p'}$ contient Q et $P - Q$, donc contient P. On a donc bien $J_{p'} = J$, ce qui prouve que la suite $(J_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Donc, $A[X]$ est noethérien.

Passons maintenant à la propriété de factorialité.

On va se servir du résultat suivant :

Lemme **2.1** *Soit A un anneau factoriel, K son corps des fractions. Soient P et Q dans $A[X]$. Alors, P divise Q dans $K[X]$ si et seulement si il existe $a \neq 0$ dans A tel que P divise $a \cdot Q$ dans $A[X]$.*

Preuve Si P divise $a \cdot Q$ dans $A[X]$, alors on peut écrire $aQ = P \cdot R$ dans $A[X]$ et donc dans $K[X]$ et aussi $Q = P \cdot (\frac{1}{a}R)$ dans $K[X]$. Donc P divise Q dans $K[X]$.

Supposons maintenant que P divise Q dans $K[X]$. Alors, on peut trouver $R \in K[X]$ tel que $PR = Q$. Or, soit $a \in A$ un multiple non nul de tous les dénominateurs des coefficients non nuls de R. On a $aR \in A[X]$ et $P.(aR) = aQ$, ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

Montrons que tout polynôme non nul est produit d'irréductibles. On procède par récurrence sur son degré. C'est vrai s'il est constant car il est produit d'irréductibles de A et que les irréductibles de A le sont aussi dans $A[X]$.

Supposons maintenant que tout polynôme de degré $< n$ soit produit d'irréductibles de $A[X]$ et soit P un polynôme de degré n. Alors si P est produit de deux polynômes de degré strictement inférieurs à n, il est produit d'irréductibles car chacun de ces deux polynômes l'est.

Sinon, il est soit irréductible, soit produit d'une constante et d'un polynôme de même degré. On conclut alors par récurrence sur le nombre de facteurs dans la décomposition en facteurs premiers de son coefficient dominant.

Pour prouver la factorialité de $A[X]$, il reste à montrer que si P est un élément irréductible de $A[X]$ qui divise un produit QR, alors il divise l'un des deux facteurs. Soient donc de tels polynômes P, Q, R. On distingue deux cas :

<u>Premier cas :</u> P est constant.
En fait, il est évident qu'une constante (non nulle) divise une polynôme de $A[X]$ si et seulement si elle divise chacun des ses coefficients. Ainsi, si P ne divise pas $Q = \sum_i q_i X^i$, il existe un i_0 minimal tel que P ne divise pas q_{i_0}. De même, si P ne divise pas $R = \sum_j r_j X^j$, il existe un j_0 minimal tel que P ne divise pas r_{j_0}. Alors, P ne divisera pas $q_{i_0} r_{j_0}$, pas plus qu'il ne divisera le coefficient de degré $i_0 + j_0$ de QR, qui est égal à la somme de $q_{i_0} r_{j_0}$ et d'un multiple de P. Ainsi, P ne divisera pas le produit QR.

Ce la montre le résultat dans le premier cas. On obtient alors, par une récurrence immédiate sur le nombre de facteur premiers d'un élément non nul de A : Si a, élément non nul de A divise un produit $P_1 P_2$ dans $A[X]$, alors il existe a_1 divisant P_1 et a_2 divisant P_2 tels que $a_1 a_2 = a$. Comme corollaire, on obtient qu'un polynôme irréductible non constant de $A[X]$ est aussi irréductible dans $K[X]$. En effet, si un polynôme P est réductible dans $K[X]$, il est produit de deux polynômes P_1 et P_2 de degrés > 0 de $K[X]$. Il existe alors a_1 et a_2 tels que $a_1 P_1$ et $a_2 P_2$ soient dans $A[X]$, donc $a \in A$ tel que aP soit le produit de deux polynômes de $A[X]$, R_1 et R_2 de degrés > 0. On écrit alors $a = b_1 b_2$ avec b_1 divise R_1 et b_2 divise R_2 et P se retrouve égal à $\frac{R_1}{b_1} \cdot \frac{R_2}{b_2}$, donc réductible dans $A[X]$.

<u>Second cas :</u> P n'est pas constant. D'après la remarque précédente, P est aussi irréductible dans $K[X]$, qui est factoriel, donc P divise soit Q soit R dans $K[X]$. Supposons que P divise Q dans $K[X]$. Il existe alors, d'après le lemme 2.1, un élément a de A tel que P divise aQ dans $A[X]$, disons $PU = aQ$. On peut alors écrire a sous forme du produit d'un diviseur constant de P et d'un diviseur constant de U. Comme un diviseur constant de P est inversible, a divise U, ce qui entraîne que P divise Q dans $A[X]$.

L'anneau $A[X]$ est donc bien un anneau factoriel. $\square$

2.3 $\mathbb{C}$-algèbres de type fini

2.3.1 Définition et morphismes

DÉFINITION **2.12** *On appelle $\mathbb{C}$-algèbre un ensemble A muni de trois opérations $+$, $.$ et $._{\mathbb{C}}$ où $(A, +, .)$ est un anneau, $(A, +, ._{\mathbb{C}})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et pour tous a, b dans A et z dans $\mathbb{C}$, on a $z._{\mathbb{C}}(a.b) = (z._{\mathbb{C}}a).b = a.(z._{\mathbb{C}}b)$.*

Si A et B sont deux $\mathbb{C}$-algèbres, un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de A dans B est une application de A dans B qui est à la fois un morphisme d'anneaux et d'espaces vectoriels. Cela équivaut à ce que ce soit un morphisme d'anneaux et envoie pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z._{\mathbb{C}}1_A$ sur $z._{\mathbb{C}}1_B$.

REMARQUE **2.14** *Si on munit $\mathbb{C}$ de son addition et de son produit (deux fois), on obtient une $\mathbb{C}$-algèbre. De plus, si A est une $\mathbb{C}$-algèbre, l'application $z \to z._{\mathbb{C}}1_A$ est un morphisme d'algèbres, injectif si $A \neq \{0\}$.*

Comme de plus pour tous $a \in A$ et $z \in \mathbb{C}$, on a $z._{\mathbb{C}}a = (z._{\mathbb{C}}1_A).a$, on identifiera un nombre complexe z à son image par le morphisme ci-dessus (sauf si A est l'algèbre nulle) et on notera alors $z.a$ pour $z._{\mathbb{C}}a$.

REMARQUE **2.15** *Un idéal d'une $\mathbb{C}$-algèbre est en particulier un sous-espace vectoriel, et l'anneau quotient est muni naturellement d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre.*

DÉFINITION **2.13** *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre. On appelle sous-$\mathbb{C}$-algèbre de A une partie de A qui est à la fois un sous-anneau et un sous-espace vectoriel.*

Clairement, une intersection de sous-algèbres est encore une sous-algèbre.

DÉFINITION **2.14** *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre et X une partie de A. On appelle sous-algèbre de A engendrée par X l'intersection des sous-algèbres de A qui contiennent X.*

On dit que A est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini s'il existe une partie finie X de A telle que la sous-algèbre de A engendrée par X soit égale à A.

PROPOSITION **2.16** *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre et $a_1, ..., a_k$ des éléments de A. Alors il existe un unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres ϕ de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ dans A tel que $\phi(X_i) = a_i$ pour chaque i. De plus, l'image de ce morphisme est la sous-$\mathbb{C}$-algèbre de A engendrée par $a_1, ..., a_n$.*

PREUVE Preuve laissée en exercice. □

COROLLAIRE **2.17** *Toute $\mathbb{C}$-algèbre de type fini est un quotient d'une algèbre de polynômes. En particulier, elle est noethérienne.*

Proposition **2.18** *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini et $\mathcal{M}$ un idéal maximal de A. Alors $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de A et le quotient $A/\mathcal{M}$ est muni naturellement d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre. De plus, une telle $\mathbb{C}$-algèbre est nécessairement isomorphe à $\mathbb{C}$.*

Preuve Clairement, tout idéal de A est stable par addition et par multiplication par un élément de $\mathbb{C}$. Ainsi, c'est un sous-espace vectoriel de A et le quotient $A/\mathcal{M}$ est à la fois un anneau et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. De plus, la compatibilité du produit et de la multiplication scalaire est claire. Ainsi, $A/\mathcal{M}$ est bien une $\mathbb{C}$-algèbre, et est en plus un corps.

Il s'agit donc d'un surcorps de $\mathbb{C}$ qui est de type fini en tant que suranneau. Il est donc de dimension dénombrable en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel et ne peut donc pas contenir de sous-$\mathbb{C}$-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}(X)$. Ainsi, tous les éléments de $A/\mathcal{M}$ sont algébriques sur $\mathbb{C}$, et sont eux-mêmes des nombres complexes car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. $\square$

Cette proposition sera très utile pour montrer le nullstellensatz. Montrons-en un autre corollaire :

Corollaire **2.19** *Soient A et B deux $\mathbb{C}$-algèbres (non nulles) de type fini, ϕ un morphisme de A dans B et $\mathcal{M}$ un idéal maximal de B. Alors $\phi^{-1}(\mathcal{M})$ est un idéal maximal de A.*

En effet, ϕ induit par passage au quotient un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de $A/\phi^{-1}(\mathcal{M})$ sur $B/\mathcal{M} \simeq \mathbb{C}$, qui est injectif par définition. On a donc forcément $A/\phi^{-1}(\mathcal{M})$ isomorphe à $\mathbb{C}$, d'ou la maximalité de $\phi^{-1}(\mathcal{M})$.

2.3.2 Produit tensoriel de deux $\mathbb{C}$-algèbres

Théorème **2.20** *Soient A et B deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Alors, il existe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel noté $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ et une application $\mathbb{C}$-bilinéaire $\otimes$ de $A \times B$ dans $A \otimes_{\mathbb{C}} B$, uniques à isomorphisme près, telle que pour toute application bilinéaire f de $A \times B$ dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel G, on ait une unique application linéaire g de $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ dans G telle que $g \circ \otimes = f$. L'espace $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ s'appelle le produit tensoriel de A par B au-dessus de $\mathbb{C}$.*

Pour a dans A et b dans B, on notera $a \otimes b$ plutot que $\otimes(a, b)$. D'autre part, on omettra parfois l'indice $_{\mathbb{C}}$ quand il n'y aura aucune ambiguité.

Proposition **2.21** *L'espace vectoriel $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ est engendré par les $a \otimes b, a \in A, b \in B$. Plus précisément, si on prend une base $\mathcal{B}_1$ de A et une base $\mathcal{B}_2$ de B, alors les éléments de la forme $x \otimes y, x \in \mathcal{B}_1, y \in \mathcal{B}_2$ forment une base de $A \otimes_{\mathbb{C}} B$.*

Corollaire **2.22** *Si $b \in B$ n'est pas nul, alors l'application $a \to a \otimes b$ de B dans $A \otimes B$ est injective.*

Attention, ceci n'est plus toujours vrai si les espaces qu'on tensorise ne sont plus des espaces vectoriels.

Proposition **2.23** *De plus, si A et B sont deux $\mathbb{C}$-algèbres, l'espace $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre en prolongeant par linéarité le produit $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$.*

Exemple **2.3.1** *Le produit tensoriel d'une $\mathbb{C}$-algèbre A avec la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ est isomorphe à $A[X_1, ..., X_n]$.*

Proposition **2.24** *Soient A et B deux $\mathbb{C}$-algèbres. Alors, les applications $a \to a \otimes 1_B$ de A dans $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ et $b \to 1_A \otimes b$ de B dans $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ sont deux morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres appelés morphismes canoniques. Si de plus A et B sont non nulles, alors ils sont injectifs.*

Proposition **2.25** *Si A et B sont deux $\mathbb{C}$-algèbres de type fini, alors $A \otimes B$ est aussi de type fini.*

Proposition **2.26** *Soient A' une sous-algèbre d'une $\mathbb{C}$-algèbre A et B' une sous-algèbre d'une $\mathbb{C}$-algèbre B. Alors, l'application de $A' \otimes B'$ dans $A \otimes B$ induite par la restriction à $A' \times B'$ de l'application naturelle de $A \times B$ dans $A \otimes B$ est injective et $A' \otimes B'$ peut donc être vue naturellement comme une sous-algèbre de $A \otimes B$.*

2.4 Intégrité, algébricité et dimension

Définition **2.15** *Soit A un sous-anneau d'un anneau B et x un élément de B. On dit que x est entier sur A s'il existe un polynôme unitaire P, à coefficients dans A, tel que $P(x) = 0$.*

On dit que B est entier sur A si tous ses éléments le sont.

Exemple **2.4.1** *Le réel $\sqrt{2}$ est entier sur $\mathbb{Z}$, car racine du polynôme $X^2 - 2$, qui est unitaire et à coefficients entiers.*

En revanche, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ n'est pas entier sur $\mathbb{Z}$. En effet, il est bien racine du polynôme $2X^2-1$, qui est non nul et à coefficients dans $\mathbb{Z}$, mais il n'est pas racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$. En effet, si on prend le polynôme $P(X) = X^n + \sum_{i<n} a_i X^i$, on a $2^{\frac{n}{2}} P(\frac{1}{\sqrt{2}})$ de la forme $(1+2n_1)+n_2\sqrt{2}$ avec n_1 et n_2 entiers. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, ceci ne peut être nul.

PROPOSITION **2.27** *Les éléments de B qui sont entiers sur A forment un sous-anneau de B.*

DÉFINITION **2.16** *On dit qu'un anneau intègre est intégralement clos si les seuls éléments de son corps des fractions qui sont entiers dessus sont les éléments de l'anneau lui-même.*

PROPOSITION **2.28** *Tout anneau factoriel est intégralement clos.*

PREUVE Soit A un anneau factoriel. Prenons un élément $\frac{p}{q}$ de A, entier sur A avec p et q premiers entre eux. Prenons un polynôme unitaire

$$P(X) = X^n + \sum_{i<n} a_i X^i$$

tel que $P(\frac{p}{q}) = 0$. On a alors $0 = q^n P((\frac{p}{q}) = p^n + \sum_{i<n} a_i p^i q^{n-i}$. Il est clair que q divise $\sum_{i<n} a_i p^i q^{n-i}$ et il divise donc aussi p^n, et il divise ainsi $pgcd(p^n, q) = 1$. Donc $\frac{p}{q} \in A$. $\square$

DÉFINITION **2.17** *La dimension (de Krull) d'un anneau A est le plus grand entier n pour lequel il existe des idéaux premiers distincts $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n$ de A. Par convention, l'anneau nul est de dimension -1 et un autre anneau pour lequel un tel n n'existe pas est dit de dimension infinie.*

Pour une suite croissante $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n$ d'idéaux premiers distincts d'un anneau A, l'entier n s'appelle la longueur de la suite d'idéaux.

REMARQUE **2.29** *La dimension de Krull d'un anneau A est aussi le plus grand entier n tel qu'il existe une suite d'anneaux intègres (non nuls) $A_0, ..., A_n$ avec A_0 quotient de A (éventuellement égal à A) et A_i quotient non trivial de A_{i-1} pour $i \geq 1$.*

En particulier, un anneau intègre possédant un quotient non trivial isomorphe à lui-même est de dimension infinie.

PROPOSITION **2.30** *Si B est entier sur A, alors A et B ont même dimension (si l'un est de dimension finie, l'autre aussi).*

Cette proposition est en fait une conséquence immédiate du résultat suivant :

LEMME **2.2** *Si B est entier sur A, alors l'application qui à une suite finie strictement croissante $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_n$ d'idéaux premiers de B associe la suite $P_0 \cap A, ..., P_n \cap A$ a pour image l'ensemble des suites finies strictement croissantes d'idéaux premiers de A.*

Notons que ce lemme est vrai aussi en dimension infinie.

Preuve En fait, nous allons déduire facilement ce lemme du lemme auxiliaire suivant :

Soit B un anneau entier sur un sous-anneau A et P un idéal premier de A. Considérons la famille $\mathcal{F}_P$ des idéaux de B qui ne rencontrent pas $A\backslash P$. Alors les idéaux premiers de B dont l'intersection avec A est égale à P sont exactement les éléments maximaux de $\mathcal{F}_P$.

Le lemme en résulte directement. D'abord, si on en prend deux, aucun ne peut être inclus strictement dans l'autre, ce qui montre que l'image d'une suite strictement croissante est strictement croissante. Dans l'autre sens, on remarque que toute réunion croissante d'éléments de $\mathcal{F}_P$ est encore dans $\mathcal{F}_P$, et on peut ainsi appliquer le lemme de Zorn à $\mathcal{F}_P$ c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{F}$ est inclus dans un élément maximal de $\mathcal{F}$. En partant d'une suite strictement croissante $P_0, ..., P_k$ de A, il suffit de prendre pour Q_i un élément maximal de $\mathcal{F}_{P_i}$ contenant Q_{i-1} (ou contenant $\{0\}$ si $i = 0$), et on obtient la chaîne désirée. Reste donc à montrer ce lemme auxiliaire.

Plaçons-nous donc sous les notations ci-dessus et soit Q un élément maximal de $\mathcal{F}_P$. Déjà, Q est premier. En effet, soient b et b' deux éléments de $B\backslash Q$. Alors, par maximalité de Q, on a un élément de $A\backslash P$ de la forme $x = rb + q$, avec r dans B et q dans Q. De même, on a un élément de $A\backslash P$ de la forme $x' = r'b' + q'$. Le produit xx' est encore dans $A\backslash P$, donc n'est pas dans Q et prend la forme $rr'bb' + q_0$ avec q_0 dans Q. Ainsi, $rr'bb' = xx' - q_0$ ne peut pas être dans q et bb' a fortiori non plus. Donc Q est bien un idéal premier.

Montrons maintenant que $Q \cap A = P$. Par définition de Q, on a $Q \cap A \subset P$. De plus, $Q \cap A$ est un idéal premier de A, et on le notera $\tilde{P}$. Alors, l'anneau $B' = B/Q$ est entier sur $A' = A/\tilde{P}$. De plus, tout idéal non nul de B' rencontre le complémentaire dans A' de $P/\tilde{P}$, sinon son image réciproque par la projection de B/B' contredirait la maximalité de Q. Si $\tilde{P}$ n'était pas égal à P, il existerait un élément x non nul de $P/\tilde{P}$ et un élément y de B' tel que $xy \in A'\backslash(P/\tilde{P})$. Dans ce cas, y ne pourrait pas être entier sur A'. En effet, prenons un élément z de la forme $y^n + \sum_{i<n} a_i y^i$ avec les a_i dans A', et multiplions le par x^n. Cela donne $x^n z = (xy)^n + \sum_{i<n} x^{n-i} a_i (xy)^i$. La somme est dans $P/\tilde{P}$ car c'est le produit de x et d'un élément de A', mais $(xy)^n$ n'y est pas, car $P/\tilde{P}$ est premier dans A'. Cela montre que $x^n z$ n'est pas dans $P/\tilde{P}$ et ainsi $z \neq 0$. On a donc une contradiction.

On a donc montré qu'un idéal maximal de $\mathcal{F}_P$ était un idéal premier de B qui avait une intersection avec A égale à P.

Montrons maintenant que si Q est un idéal premier de B avec $Q \cap A = P$, alors Q est un élément maximal de $\mathcal{F}_P$. Soit alors $b \notin Q$. On sait que b est entier sur A et on considère un polynôme unitaire $R \in A[X]$ de degré minimal tel que $R(b) \in Q$. On a $R(X) = X^n + \sum_{i<n} a_i X^i$. Alors, $a_0 \notin P$ car sinon, on écrirait $R = XR' + a_0$ et on aurait $R'(b) \in Q$ (car $b \notin Q$ et Q premier) et $d^0 R' < d^0 R$. Ainsi, a_0 est de la forme $R(b) - b.x$ et est donc dans l'idéal engendré par Q et x. Tout idéal contenant Q strictement rencontre donc $A \backslash P$.

Cela termine la preuve du lemme. $\square$

PROPOSITION **2.31** *Si A est factoriel (et non nul), alors* $\dim A[X] = \dim A + 1$.

PREUVE On suppose donc que A est un un anneau factoriel.

Montrons déjà $\dim A[X] \geq \dim A + 1$. Si $\dim A = k$, on peut trouver une suite $A_0, ..., A_k$ d'anneaux intègres avec $A_0 = A$ (car A est intègre) et pour $1 \leq i \leq k$, A_i quotient non trivial de A_{i-1}. Alors, la suite $A_0[X], A_0, ..., A_k$ est une suite d'anneaux, quotient chacun du précédent et qui prouve que $\dim A[X] \geq k + 1$ (ceci marche en fait pour tout anneau non nul).

Avant de montrer la réciproque, remarquons qu'un idéal premier d'un anneau factoriel est engendré par les éléments irréductibles qu'il contient.

Montrons alors $\dim A[X] \leq \dim A + 1$. Pour un idéal premier P de $A[X]$, on note $(*)$ la propriété suivante : P possède un élément irréductible non constant. Il est clair qu'un idéal premier ne vérifiant pas $(*)$ est caractérisé par son intersection avec A. Nous allons montrer la chose suivante : Un idéal premier vérifiant $(*)$ est caractérisé à l'intérieur d'une chaîne de tels idéaux par son intersection avec A. En effet, supposons qu'on ait deux idéaux premiers $P_1 \subset P_2$ de $A[X]$ ayant même intersection P avec A et vérifiant $(*)$. Alors, en quotientant par l'idéal des polynômes ayant tous ses coefficients dans P (qu'on notera $P[X]$), on a une chaîne de trois idéaux premiers distincts de $A/P[X]$ dont l'intersection avec A/P est réduite à $\{0\}$ (à savoir $\{0\} \subset \mathcal{P}_1 = P_1/P[X] \subset \mathcal{P}_2 = P_2/P[X]$). Or ceci est impossible. En effet, soit K le corps des fractions de l'anneau A/P et $\mathcal{P}$ un idéal de $A[X]$ sans constante non nulle. Alors, l'ensemble $\mathcal{Q}$ des éléments Q de $K[X]$ pour lesquels il existe une constante non nulle a pour laquelle $aQ \in \mathcal{P}$ est un idéal premier de $K[X]$. De plus, si $\mathcal{P}$ est strictement inclus dans $\mathcal{P}'$, alors $\mathcal{Q}$ est strictement inclus dans $\mathcal{Q}'$. Comme $K[X]$ est de dimension 1 (car principal), on ne peut trouver P_1 et P_2 avec toutes les propriétés exigées.

Ainsi, si on a une suite strictement croissante $I_0 \subset I_1 \subset ... \subset I_k$ d'idéaux premiers de $A[X]$, la suite $J_0 = I_0 \cap A, ..., J_k = I_k \cap A$ est une suite croissante d'idéaux premiers de A où J_{i+1} ne peut être égal à J_i que si I_{i+1} vérifie $(*)$ et pas I_i. Il est clair qu'un seul i peut vérifier cette condition et on obtient alors une suite strictement croissante d'idéaux de A de longueur $\geq k - 1$. Donc, $\dim A \geq \dim A[X] - 1$.

La proposition est donc démontrée. $\square$

2.4.1 Degré et bases de transcendance

DÉFINITION **2.18** *Soit K un corps et L un surcorps de K.*

Un élément de L est dit algébrique sur K s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients dans K. Dans le cas contraire, il est dit transcendant.

On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ déléments de L est algébriquement libre (sur K) ou que les éléments x_i sont algébriquement indépendants si l'application $P \to P((x_i)_{i\in I})$ de $K[(X_i)_{i\in I}]$ dans K est injective. Une famille qui n'est pas algébriquement libre est dite algébriquement liée.

On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ déléments de L est algébriquement génératrice ou que les éléments x_i engendrent L algébriquement (sur K) si L est algébrique sur son plus petit sous-corps contenant K et tous les éléments de la famille.

On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ déléments de L est une base de transcendence de L (sur K) si elle est à la fois algébriquement libre et algébriquement génératrice.

EXEMPLE **2.4.2** *Prenons $L_n = \mathbb{C}(X_1, ..., X_n)$. Alors la famille $(X_1, ..., X_n)$ est une base de transcendence de L_n sur $\mathbb{C}$.*

EXEMPLE **2.4.3** *Pour $n \geq 1$, appelons L_n le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{C}[X,Y]/(X^n + Y^n + 1)$ (il est facile de voir que cet anneau est intègre). Alors, la classe du polynôme X est une base de transcendance de L sur $\mathbb{C}$. En effet, aucun polynôme de $\mathbb{C}[X]$ ne peut être multiple de $X^n + Y^n + 1$, donc la classe de X dans L_n est trancendente sur $\mathbb{C}$. D'autre part, la fermeture algébrique du corps engendré par cette classe dans L contient la classe de X et aussi celle de Y, car on a un polynôme non trivial en ces deux classes qui est nul dans L_n.*

REMARQUE **2.32** *Si I est réunion disjointe de I_1 et de I_2, alors $(x_i)_{i\in I}$ est algébriquement libre si et seulement si $(x_i)_{i\in I_1}$ est algébriquement libre sur K et $(x_i)_{i\in I_2}$ est algébriquement libre sur $K(x_i)_{i\in I_1}$.*

Les règles régissant les bases de trancendance sont semblables à celles régissant les bases des espaces vectoriels. Nous avons notemment :

PROPOSITION **2.33** *i) Les bases de transcendance d'un corps L sur un sous-corps K sont à la fois les parties algébriquement libres maximales et les parties algébriquement génératrices minimales ;*
ii) si une partie algébriquement libre est incluse dans une partie algébriquement génératrice (finie), alors il existe une base de transcendence qui contient la première et est incluse dans la seconde ;
iii) si $x_1, ..., x_n$ est une bases de transcendance de L sur K, alors toute partie algébriquement libre de L possède au plus n éléments ;
iv) deux bases de transcendance (finies) de L sur K ont le même nombre d'éléments.

Preuve Pour le i), considérons une famille algébriquement libre maximale F. Si elle n'etait pas algébriquement génératrice, on aurait un élément x de L transcendant sur $K(F)$, et alors $F \cup \{x\}$ serait encore libre, ce qui est exclus. Considérons maintenant une famille algébriquement génératrice minimale F. si elle n'etait pas libre, on aurait un polynôme non nul qui s'annulerait en certains éléments de F. Un de ces éléments x serait alors algébrique sur $K(F \backslash \{x\})$ et la fermeture algébrique de $K(F \backslash \{x\})$ dans L contiendrait x, et donc F, et donc serait tout L, contredisant la minimalité de F.

Pour le ii), considérons une famille algébriquement libre F incluse dans une famille algébriquement génératrice F''. Soit F' une famille maximale parmi celles qui sont libres, incluses dans F'' et contenant F. Alors, la fermeture algébrique dans L du cors engendré par K et F' contient K et F''. C'est donc L et F' est une base de transcendance de L sur K.

Le iii) se prouve par récurrence sur n. Si $n = 0$, L est algébrique sur K et toute partie algébriquement libre de L est vide.

Supposons maintenant $n \geq 1$ et soit $y_1, ..., y_k$ une famille algébriquement libre de L. Alors, il existe d'après le ii) une base de transcendence $\{y_1\} \cup X$ de L sur K contenant y_1 et certains x_i (pas tous car la famille formée de y_1 et de tous les x_i est algébriquement liée). Alolrs, X est une base de transcendance de L sur $K(y_1)$ et, par hypothèse de récurrence, on voit que dans $y_2, ..., y_k$, il y a moins d'élément que dans X. Donc, $k - 1 \leq \#X \leq n - 1$, soit $k \leq n$.

Le iv) s'en déduit immédiatement, car si on a deux bases de transcendance, chacune a moins déléments que l'autre. □

Définition **2.19** *Si L possède une famille finie algébriquement génératrice sur K, on appelle degré de transcendance de L sur K le nombre d'éléments de n'importe laquelle de ses bases de transcendance sur K.*

Par exemple, le degré de transcendance sur $\mathbb{C}$ du corps $\mathbb{C}(X_1, ..., X_n)$ est égal à n.

3 Variétés algébriques affines

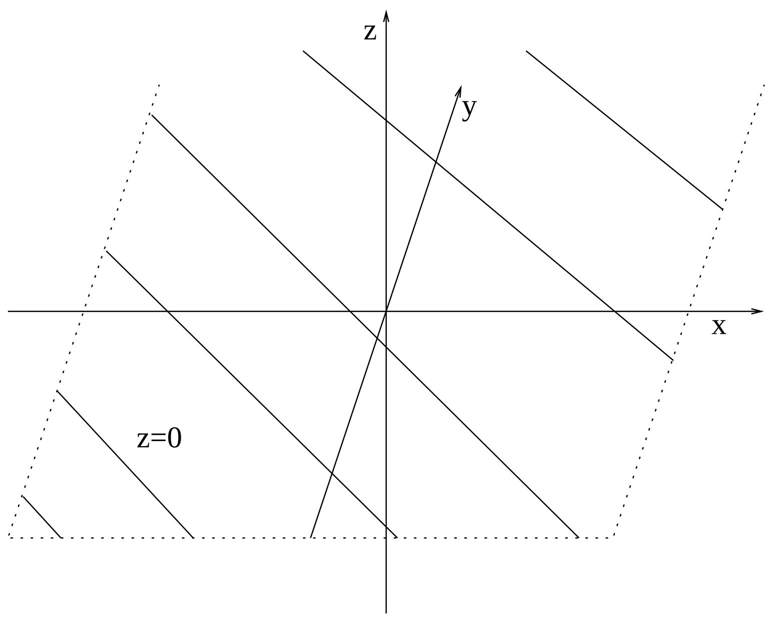
3.1 Sous-variétés algébriques affines

On se place sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes où on considère l'anneau des polynômes à n indérterminées $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. On ne distinguera pas un polynôme P de la fonction polynomiale qui à un élément $(x_1, ..., x_n)$ de $\mathbb{C}^n$ associe $P(x_1, ..., x_n)$.

DÉFINITION **3.1** *On se donne une famille $\mathcal{F} = \{P_i, i \in I\}$ de polynômes à n indérterminées. On appelle sous-variété algébrique affine définie par $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments $(z_1, ..., z_n)$ de $\mathbb{C}^n$ tels que pour tout $i \in I$, on ait $P_i(z_1, ..., z_n) = 0$.*

EXEMPLE **3.1.1** *Commençons par considérer la famille vide. Cela donne donc $\mathbb{C}^n$ tout entier comme sous-variété algébrique affine.*

EXEMPLE **3.1.2** *Considérons maintenant la famille formée de l'unique polynôme X_n. Dans ce cas, la variété affine associée est isomorphe à $\mathbb{C}^{n-1}$.*

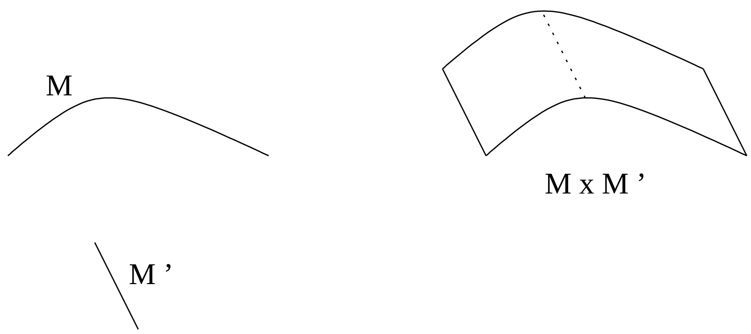


EXEMPLE **3.1.3** *Considérons maintenant dans $\mathbb{C}^2$ la famille formée de l'unique polynôme $XY - 1$. L'ensemble associé est l'ensemble des couples $(z, \frac{1}{z})$ pour z dans $\mathbb{C}^*$ et nous verrons que cette sous-variété algébrique affine est isomorphe à $\mathbb{C}^*$.*

EXEMPLE **3.1.4** *Considérons deux sous-variétés M et M' de $\mathbb{C}^n$. Alors $M \cap M'$ est une sous-variété de $\mathbb{C}^n$. En effet, si M est définie par la famille $\mathcal{F}$ et M' par la famille $\mathcal{F}'$, alors la famille $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ définit $M \cap M'$.*

Exemple **3.1.5** *Considérons deux sous-variétés M et M' de $\mathbb{C}^n$. Alors $M \cup M'$ est une sous-variété de $\mathbb{C}^n$. En effet, si M est définie par la famille $(P_i)_{i \in I}$ et M' par la famille $(Q_j)_{j \in J}$, alors la famille $(P_i Q_j)_{i \in I, j \in J}$ définit $M \cup M'$. En effet, tout point de M annule chque P_i donc chacun de ces polynômes, de même pour M', et si x n'est pas dans $M \cup M'$, on peut trouver P_{i_0} tel que $P_{i_0}(x) \neq 0$ et Q_{j_0} tel que $Q_{j_0}(x) \neq 0$. Alors $P_{i_0} Q_{j_0}(x) \neq 0$.*

Exemple **3.1.6** *Considérons une sous-variété algébrique affine M_1 de $\mathbb{C}^{n_1}$ et une sous-variété algébrique affine M_2 de $\mathbb{C}^{n_2}$, alors $M_1 \times M_2$ est une sous-variété algébrique affine M_1 de $\mathbb{C}^{n_1+n_2}$. En effet, si M_1 est définie par la famille (P_i) de polynômes de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_{n_1}]$ et M_2 par la famille (Q_j) de polynômes de $\mathbb{C}[Y_1, ..., Y_{n_2}]$, alors si on considère la famille de polynômes de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_{n_1}, Y_1, ..., Y_{n_2}]$ formée des P_i et des Q_j, alors la sous-variété algébrique affine associée est le produit $M_1 \times M_2$.*



Exemple **3.1.7** *On considère une sous-variété algébrique affine M de $\mathbb{C}^n$ et un polynôme Q de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ dont la restriction à M n'est pas nulle. Appelons M' l'ensemble des éléments x de M tels que $Q(x) = 0$ (en particulier, M' est une sous-variété algébrique affine de $\mathbb{C}^n$ incluse dans M). Alors, dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n, Y]$, considérons la famille formée des polynômes P_i qui définissent M et du polynôme $(Q \cdot Y) - 1$. Il est clair que la projection sur $\mathbb{C}^n$ de la sous-variété algébrique affine définie par cette famille donne l'ensemble des éléments de M qui n'annulent pas Q, soit $M \backslash M'$. Nous verrons que c'est même un isomorphisme.*

Attention toutefois à ce que M' doit être donnée par l'annulation d'un seul polynôme sur M. Par exemple, $\mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}$ n'est pas une sous-variété algébrique affine.

Définition **3.2** *Soit M une sous-variété algébrique affine. On appelle idéal associé à M, que nous noterons $I(M)$, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ dont la restriction à M est nulle. C'est un idéal de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$.*

Montrons maintenant un théorème fondamental de la géométrie algébrique (sur un corps algébriquement clos), appelé *théorème des zéros de Hilbert* (ou *nullstellensatz*).

Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme **3.1** *Un idéal maximal de $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$ est donné par l'ensemble des polynômes qui s'annulent en un certain point de $\mathbb{C}^n$.*

Preuve Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$. Alors, le quotient $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$ par $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ d'après la proposition 2.18. Ainsi, $\mathcal{M}$ est le noyau d'un morphisme ϕ de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$ dans $\mathbb{C}$. Or, si on pose $\alpha_i = \phi(X_i), 1 \leq i \leq n$, on a pour tout P, $\phi(P) = P(\alpha_1,...,\alpha_n)$. Ainsi, $\mathcal{M}$ est l'ensemble des polynômes qui s'annulent en $(\alpha_1,...,\alpha_n)$. □

Théorème **3.1** *Soit $\mathcal{F}$ une famille de polynômes à n indérterminées et M la variété associée. Alors l'idéal associé à M est égal au radical de l'idéal engendré par $\mathcal{F}$.*

Démonstration Soit $I(M)$ l'idéal des fonctions polynomiales sur $\mathbb{C}^n$ qui s'annulent en tout point de M. Il est clair que $I(M)$ contient tous les éléments de $\mathcal{F}$ et donc l'idéal engendré par cet ensemble. Si une fonction f ne s'annule pas en un point x de M, alors on aura $f^n(x) \neq 0$ quel que soit M, donc aucune puissance de f de s'annulera sur M. Ainsi, f ne sera pas dans le radical de $I(M)$, et donc $I(M)$ est stable par extraction du radical. En particulier, il contient le radical de l'idéal engendré par $\mathcal{F}$.

Il faut donc prouver l'inclusion réciproque.

On sait déjà que l'anneau $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$ est un anneau noethérien. Ainsi, l'idéal engendré par $\mathcal{F}$, que nous noterons I, est engendré par un nombre fini de polynômes $P_1,...,P_k$. Prenons une fonction g qui s'annule sur $M(\mathcal{F})$ et considérons les fonctions polynomiales de $\mathbb{C}[Y,X_1,...,X_n]$ données par $P_1,...,P_k$ et $gY-1$. Alors aucun point de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ ne peut annuler toutes ces fonctions car s'il annule tous les P_i, il annule aussi g et $gY-1$ vaut 1 dessus. Le lemme ci-dessus nous dit donc que l'idéal de $\mathbb{C}[Y,X_1,...,X_n]$ engendré par $P_1,...,P_k$ et $gY-1$ n'est inclus dans aucun idéal maximal de $\mathbb{C}[Y,X_1,...,X_n]$, donc que c'est tout $\mathbb{C}[Y,X_1,...,X_n]$.

On peut donc écrire

$$1 = R(Y,X_1,...,X_n)(gY-1) + \sum_{i=1}^{k} Q_i(Y,X_1,...,X_n)P_i$$

Cette égalité est vraie pour tout Y, donc en remplaçant Y par $\frac{1}{U}$ dans $\mathbb{C}(U)[X_1,...,X_n]$, puis en multipliant par une puissance N assez grande de U, on obtient U^N dans l'idéal de $\mathbb{C}[U,X_1,...,X_n]$ engendré par $P_1,...,P_k$ et $g-U$. En donnant maintenant la valeur g à U, on obtient que dans $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$, g^N est dans l'idéal engendré par $P_1,...,P_k$, soit donc $g \in \sqrt{I}$.

Cela prouve le théorème. □

Ainsi, ce théorème montre qu'il y a une correspondance bijective entre idéaux radicaux de $\mathbb{C}[X_1,...,X_n]$ et sous-variétés algébriques affines de $\mathbb{C}^n$.

Définition **3.3** *Soit M une sous-variété algébrique affine de $\mathbb{C}^n$. On appelle fonction régulière sur M restriction à M d'une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}^n$. L'ensemble des fonctions régulières sur M sera noté $F(M)$.*

Remarque **3.2** *Soit M une sous-variété algébrique affine de $\mathbb{C}^n$ et f une fonction régulière sur M qui ne s'annule en aucun point. Alors $\frac{1}{f}$ est aussi une fonction régulière sur M.*

En effet, le radical de l'idéal de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ engendré par $I(M)$ et P_f, où P_f est un polynôme dont la restriction à M est f contient la fonction constante égale à 1, et donc il y a un polynôme Q et un polynôme R nul sur M tels que $1 = P_f Q + R$. Clairement, la restriction de Q à M est $\frac{1}{f}$.

Proposition **3.3** *Soit M une sous-variété algébrique affine. Alors $F(M)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre réduite de type fini, isomorphe à $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/I(M)$.*

Preuve On considère l'application de restriction à M de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. Il s'agit clairement d'un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ dans $F(M)$, surjectif par définition, et de noyau $I(M)$.

Le fait que $F(M)$ soit de type fini résulte du fait que $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ l'est et que la restriction soit surjective, le fait que $F(M)$ soit réduite résulte du fait que $I(M)$ est radical. $\square$

Définition **3.4** *On appelle application polynomiale de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^n$ une application f telle que $X_i \circ f$ soit polynomiale quel que soit $i = 1, ..., n$ (i.e. une application de la forme $(P_1, ..., P_n)$ où les P_i sont polynomiales).*

Soit M_1 une sous-variété algébrique affine de $\mathbb{C}^m$ et M_2 une sous-variété algébrique affine de $\mathbb{C}^n$. On appelle morphisme (de sous-variétés algébriques affines) de M_1 dans M_2 une application de M_1 dans M_2 qui peut être étendue en une application polynomiale de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^n$.

Remarque **3.4** *Une fonction régulière sur M est exactement un morphisme de M dans $\mathbb{C}$.*

Proposition **3.5** *La composée de deux morphismes est un morphisme.*

Un morphisme θ de M_1 dans M_2 induit par composition un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de $F(M_2)$ dans $F(M_1)$, noté θ^* et appelé comorphisme associé à θ.

Tout homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de $F(M_2)$ dans $F(M_1)$ est le comorphisme associé à un unique morphisme de M_1 dans M_2. De plus, si on a un morphisme θ_1 de M_1 dans M_2 et un morphisme θ_2 de M_2 dans M_3, alors $(\theta_2 \circ \theta_1)^* = \theta_1^* \circ \theta_2^*$.

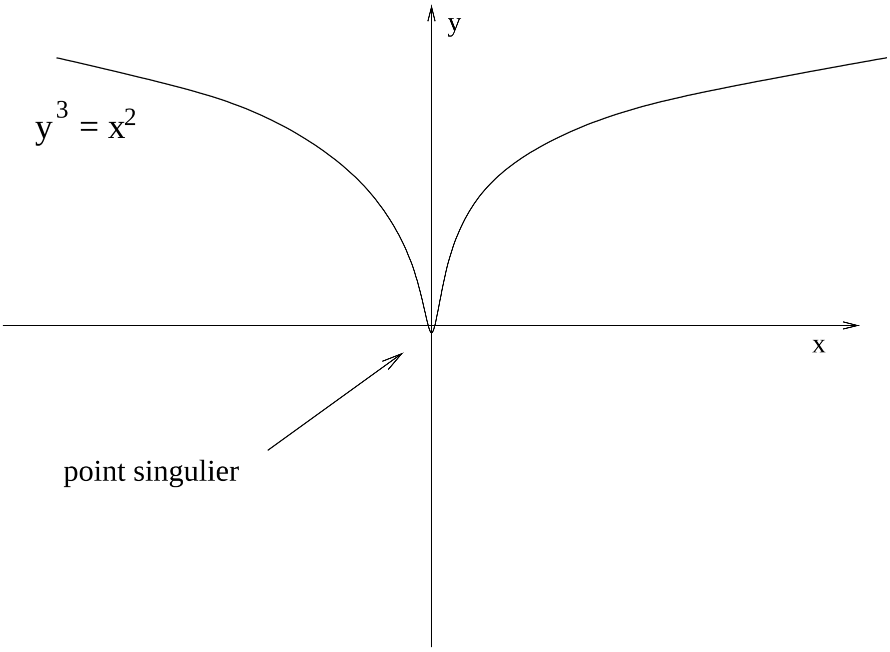
En particulier, un morphisme est un isomorphisme si et seulement si le comorphisme associé est bijectif.

Nous en donnerons plus tard une preuve dans un cadre plus général. Nous l'admettrons pour le moment.

Attention, un morphisme bijectif de sous-variétés algébriques affines n'est pas en général un isomorphisme. Donnons-en deux contre-exemples instructifs :

EXEMPLE **3.1.8** *Considérons la sous-variété M algébrique affine de $\mathbb{C}^2$ définie par le polynôme $X^2 - Y^3$. Alors l'application $z \to (z^3, z^2)$ est un morphisme de $\mathbb{C}$ dans M. Il est facile de vérifier qu'il est bijectif, mais ce n'est pas un isomorphisme. En effet, $F(M)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X^2, X^3]$ qui n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}[X]$.*

En fait, le problème vient du fait que la sous-variété image n'est par une sous-variété "normale", du au caractère singulier de l'origine.



EXEMPLE **3.1.9** *Considérons dans $\mathbb{C}^3$ la sous-variété M définie par les polynômes XY, XZ et YZ. Il s'agit de la réunion des trois axes de coordonnées (qui sont trois droites se coupant deux à deux en l'origine). Considérons dans $\mathbb{C}^2$ la sous-variété N définie par l'unique polynôme $XY(X - Y)$. Il s'agit de la réunion des deux droites de coordonnées et de la première bissectrice (qui sont trois droites se coupant deux à deux en l'origine). L'application f de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par $(x, y, z) \to (x + z, y + z)$ réalise une bijection de M sur N (chacune des trois droites de M étant envoyée bijectivement sur une droite de N) qui est un morphisme de sous-variétés algébriques affines (car provenant d'une application linéaire de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^2$) que nous noterons encore f.*

Il ne s'agit toutefois pas d'un isomorphisme. En effet, considérons sur M le polynôme Z. Si f était un isomorphisme, l'application $Z \circ f^{-1}$ serait une fonction régulière sur

N, donc restriction d'un polynôme P de $\mathbb{C}^2$. Alors, P devrait s'annuler sur les deux axes de coordonnées de $\mathbb{C}^2$, donc être multiple à la fois de X et de Y. De plus, P devrait coïncider avec X sur la première bissectrice, donc avoir la forme $X+Q(X-Y)$. Pour diviser P, X doit aussi diviser Q, et Y doit diviser $1+Q$, car X et Y sont premiers entre eux. Ainsi, Q et $1+Q$ doivent tous deux s'annuler en $(0,0)$, ce qui est absurde, et f n'est donc pas un isomorphisme.

Ici aussi, le problème provient du caractère singulier de l'origine.

3.2 Variétés algébriques affines

DÉFINITION **3.5** *On appelle variété algébrique affine un triplet (A, M, ϕ) où A est une $\mathbb{C}$-algèbre réduite de type fini et ϕ une bijection de l'ensemble M sur l'ensemble $Spec_m(A)$ des idéaux maximaux de A.*

EXEMPLE **3.2.1** *Prenons $A = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, $M = \mathbb{C}^n$ et ϕ l'application qui à un élément x de $\mathbb{C}^n$ associe l'idéal des polynômes nuls en x. Le théorème des zéros nous affirme que ϕ est une bijection et donc (A, M, ϕ) est bien une variété algébrique affine.*

EXEMPLE **3.2.2** *Pour n'importe quelle algèbre réduite A de type fini sur $\mathbb{C}$, le triplet $(A, Spec_m(A), id)$ est une variété algébrique affine.*

EXEMPLE **3.2.3** *Toute sous-variété algébrique affine M est naturellement associée à une variété algébrique affine en prenant pour A l'anneau de ses fonctions régulières et pour ϕ l'application qui à un point de M associe l'idéal des fonctions régulières sur M nulles en ce point. Il s'agit bien d'une bijection de M sur $Spec_m(F(M))$ d'après le nullstellensatz.*

Nous allons d'ailleurs bientôt montrer la réciproque, c'est-à-dire que toute variété algébrique affine est isomorphe à une sous-variété.

EXEMPLE **3.2.4** *Soient (A_1, M_1, ϕ_1) et (A_2, M_2, ϕ_2) deux variétés algébriques affines (A_1, M_1, ϕ_1) et (A_2, M_2, ϕ_2). Alors on a la réunion disjointe de ces deux variétés comme suit : L'algèbre est le produit $A_1 \times A_2$, l'ensemble est la réunion disjointe de M_1 et de M_2 et l'application ϕ envoie m sur $\phi_1(m) \times A_2$ si m est dans M_1 ou $A_1 \times \phi_2(m)$ si m est dans M_2. On voit aisément qu'il s'agit bien une variété algébrique affine. On peut bien sûr généraliser à la réunion disjointe d'un nombre fini quelconque de variétés algébriques affines.*

EXEMPLE **3.2.5** *Soit (A, M, ϕ) une variété algébrique affine pour laquelle l'algb̀re A est intègre. Considérons un élément non nul a de A et soit $A[\frac{1}{a}]$ le localisé de A en le système multiplicatif formé des puissances de a, qui est une $\mathbb{C}$-algèbre réduite de type* *fini. Les idéaux maximaux de $A[\frac{1}{a}]$ sont les ensembles de la forme $\{\frac{y}{a^k}, y \in M, k \in \mathbb{N}\}$, où M désigne un idéal maximal de A ne contenant pas a. On obtient alors une variété algébrique en prenant $A[\frac{1}{a}]$ pour $\mathbb{C}$-algèbre, pour ensemble le sous-ensemble de M formé des éléments dont l'image par x ne contient pas a, et pour bijection $x \to \{\frac{y}{a^k}, y \in \phi(x), k \in \mathbb{N}\}$.*

Une telle variété algébrique s'appelle un ouvert principal de (A, M, ϕ) et est analogue à celle obtenue dans l'exemple 3.1.7 (on constate d'ailleurs que $A[\frac{1}{a}]$ est isomorphe à $A[X]/(aX-1)$).

PROPOSITION **3.6** *Soit (A, M, ϕ) une variété algébrique affine. Alors A peut être vue naturellement comme une sous-algèbre des fonctions de M dans $\mathbb{C}$.*

En effet, si $x \in M$, on a un (unique) isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres i_x de $A/\phi(x)$ dans $\mathbb{C}$. On peut définir l'évaluation en x par $e_x = i_x \circ \pi_x$ qui donne une valeur en x à chaque élément de A (on notera d'ailleurs $f(x)$ plutôt que $e_x(f)$). Cela induit un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de A dans l'ensemble des fonctions sur M à valeurs complexes. De plus, ce morphisme est injectif car un élément du noyau est un élément de A qui est dans tous les idéaux maximaux. Or, A est de la forme $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/I$ où I est un idéal radical de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. L'intersection des idéaux maximaux qui contiennent I est l'ensemble des polynômes qui s'annulent là où tout élément de I s'annule et le nullstellensatz nous affirme que c'est I. Cela montre que A peut être vu comme algèbre de fonctions sur M.

Nous adopterons d'ailleurs ce point de vue. Dans ce cas, la bijection entre les points de M et le spectre maximal de A est donnée en associant à un point de M l'idéal des éléments de A, considérés comme fonctions sur M, qui s'annulent au point considéré. Nous la sous-entendrons fréquemment et noterons donc (A, M) cette variété algébrique affine. Ainsi :

DÉFINITION **3.6** *Les éléments de A seront appellés des fonctions régulières sur M.*

DÉFINITION **3.7** *Soient (A, M) et (B, N) deux variétés algébriques affines. Soit f une application de M dans N. On dit que f est un morphisme de variétés algébriques affines si la composée de f avec n'importe quelle fonction régulière sur N est une fonction régulière sur M. L'application ainsi induite sur les fonctions régulières est alors un morphisme de B dans A appelé comorphisme associé à f et noté f^*.*

PROPOSITION **3.7** *Soient $f : (A, M) \mapsto (A', M')$ et $g : (A', M') \mapsto (A'', M'')$ deux morphismes de variétés algébriques affines. Alors $g \circ f$ est aussi un morphisme et $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Tout morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de B dans A est le comorphisme d'un unique morphisme de variétés algébriques affines de M dans N.

Preuve La première partie de la proposition est laissée en exercice.

Soient (A, M) et (B, N) deux variétés algébriques affines et soit $u : B \mapsto A$ un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres. Prenons x un point de M et I_x l'idéal maximal de A associé. Alors $J_y = u^{-1}(I_x)$ est un idéal maximal de B associé à un unique élément y de N. Si f est un morphisme de (A, M) dans (B, N) tel que $f^* = u$, on doit alors avoir pour toute fonction g de J_y, $[u(g)](x) = 0$ car $g \in u^{-1}(I_x)$ et $[u(g)](x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, donc $g \in J_{f(x)}$, ce qui impose $f(x) = y$.

Soit maintenant f l'application $x \to y$ définie ci-dessus de M dans N et soit g dans B. Soit x dans M. Alors $g \circ f(x) = g(y)$ est l'image de g par la projection canonique sur $B/J_y \simeq \mathbb{C}$ et $[u(g)](x)$ est l'image de $u(g)$ par la projection canonique sur $A/J_x \simeq \mathbb{C}$. Il est clair que c'est la même chose si g est dans J_y (ça fait 0) ou si g est une constante (ca fait la valeur de cette constante). Par linéarité, c'est toujours pareil. Donc $g \circ f = u(g) \in A$ et donc f est bien un morphisme de variétés algébriques affines de comorphisme u. $\square$

Définition **3.8** *Soit (A, M) une variété algébrique. Soit F un sous-ensemble de A. Soit N l'ensemble des éléments de M en lesquelles tous les éléments de F s'annulent. Alors, l'ensemble A_N des restrictions à N des fonctions régulières sur M est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, (A_N, N) est une variété algébrique affine appelée sous-variété algébrique affine de (A, M).*

Proposition **3.8** *Soit (A_N, N) une sous-variété algébrique affine d'une variété algébrique affine (A, M). Alors, l'injection canonique de N dans M est un morphisme et le comorphisme associé est surjectif.*

Réciproquement, soient (A, M) et (B, N) deux variétés algébriques affines et $\phi : B \mapsto A$ un morphisme surjectif de $\mathbb{C}$-algèbres. Alors le morphisme de M dans N de comorphisme ϕ envoie M isomorphiquement sur une sous-variété algébrique affine de N. Un tel morphisme s'appelle un plongement (fermé) de M dans N.

Preuve La première partie de la proposition revient à dire que toute restriction d'une fonction régulière sur M est une fonction régulière sur N et que toute fonction régulière sur N s'obtient ainsi, ce qui est la définition.

Considérons maintenant un morphisme f de variétés algébriques affines de (A, M) dans (B, N) auquel est associé un comorphisme $f^* : B \mapsto A$ surjectif. Soit I le noyau de f^*. Alors soit M' l'ensemble des éléments de N en lesquels s'annulent tous les éléments de I. Il est clair que si x est dans M, $(f^*)^{-1}(I_x)$ contient I et donc tout élément de I s'annule en $f(x)$, donc $f(x) \in M'$. Réciproquement, si y est dans M', alors J_y est un idéal maximal de B qui contient I. Par surjectivité, son image par f^* est un idéal maximal de A, donc de la forme I_x, x dans M et alors $y = f(x)$. Ainsi M', qui est une sous-variété de N, est l'image de f. De plus, l'anneau des fonctions régulières sur M' est isomorphe à B/I et l'application de B/I dans A

définie par passage au quotient de f^* est un isomorphisme. Ainsi, f induit bien un isomorphisme de (A, M) sur $(B/I, M')$. $\square$

Corollaire **3.9** *Toute variété algébrique affine est isomorphe à une sous-variété algébrique affine d'un certain* $\mathbb{C}^n$.

Preuve Soit (A, M, ϕ) une variété algébrique affine. L'algèbre A est finiement engendrée et on a donc un morphisme surjectif d'une algèbre de polynômes sur $\mathbb{C}$ dans A. Ce morphisme est le comorphisme d'un plongement de A dans $\mathbb{C}^n$ en tant que sous-variété. $\square$

Ainsi, toute variété algébrique affine est identifiable à une sous-variété, l'algèbre correspondante étant l'algèbre des fonctions régulières sur la sous-variété. Pour bien identifier les variétés aux sous-variétés, montrons aussi que les morphismes se correspondent :

Proposition **3.10** *Soient* M *et* N *deux sous-variétés algébriques affines de* $\mathbb{C}^m$ *et* $\mathbb{C}^n$ *respectivement. Alors une application* f *de* M *dans* N *est un morphisme de variétés algébriques affines si et seulement si c'est un morphisme de sous-variétés algébriques affines.*

Preuve Il est clair qu'un morphisme de sous-variétés algébriques affines est un morphisme de variétés algébriques affines car la composition de deux polynômes est un polynôme.

Réciproquement, soit f un morphisme de variétés algébriques affines de M dans N. Appelons j le plongement de N dans $\mathbb{C}^n$ et $\pi_1, ..., \pi_n$ les fonctions coordonnées naturelles sur $\mathbb{C}^n$. Alors, pour tout $i, 1 \leq i \leq n$, la fonction $\pi_i \circ j$ est une fonction régulière sur N. Comme f est un morphisme de variétés algébriques affines, les fonctions $\pi \circ j \circ f$ sont régulières sur M, et donc restrictions de fonctions polynomiales $P_1, ..., P_n$ sur $\mathbb{C}^m$. La fonction $(P_1, ..., P_n)$ restreinte à M est donc un morphisme de sous-variétés algébriques affines de M dans $\mathbb{C}^n$ qui coïncide avec $j \circ f$ car les deux fonctions ont les mêmes coordonnées. La restriction de cette fonction à N à l'arrivée est donc f, qui est bien un morphisme de sous-variétés algébriques affines. $\square$

Proposition **3.11** *Soit* f *un morphisme d'une variété algébrique affine* M *dans une variété algébrique affine* N *et* N' *une sous-variété algébrique affine de* N. *Alors* $f^{-1}(N')$ *est une sous-variété algébrique affine de* M.

C'est clair, car si N' est l'ensemble des éléments de N où s'annulent les fonctions régulières de la famille F, alors l'ensemble des $g \circ f, g \in f$ est un ensemble de fonctions régulières sur M et la sous-variété algébrique affine définie par cette famille est précisément $f^{-1}(N')$.

Définition **3.9** *Une variété algébrique affine non vide est dite irréductible si l'anneau de ses fonctions régulières est intègre.*

Théorème **3.12** *Toute variété algébrique affine est réunion finie de variétés algébriques affines irréductibles. De plus, si on demande qu'aucun élément de cette réunion ne soit inclus dans un autre, alors ces éléments sont uniques à l'ordre près. On les appelle les composantes irréductibles de M.*

Démonstration Ce théorème sera une consequence du théorème 2.4.

Soit (A, M) une variété algébrique affine, et $M_i, 1 \leq i \leq k$ des sous-variétés de A associés aux idéaux radicaux $P_i, 1 \leq i \leq k$. Alors :

i) L'irréductibilité de M_i équivaut à l'intégrité de P_i ;

ii) L'inclusion de M_i dans M_j équivaut à l'inclusion de P_j dans P_i ;

iii) Le fait que $M = \bigcup_i M_i$ revient au fait que tout idéal maximal de A contienne au moins un des P_i. Si l'intersection des P_i est nulle et qu'un idéal premier $\mathcal{P}$ ne contenait aucun P_i, alors on pourrait trouver un $x_i, 1 \leq i \leq k$ dans chaque P_i qui ne soit pas dans $\mathcal{P}$. Le produit des x_i n'est pas dans $\mathcal{P}$ car $\mathcal{P}$ est premier, mais il est dans chaque P_i, et donc nul. Contradiction. Réciproquement, si l'intersection des P_i n'est pas nulle, alors il existe f non nulle dans l'intersection des P_i. Si on prend x dans M tel que $f(x) \neq 0$, il est clair que l'idéal maximal de A associé à x ne contient pas f, donc ne contient aucun P_i.

Or, d'après le théorème 2.4 et du fait que A est noethérien et réduit, il existe à l'ordre près une unique famille P_i d'idéaux de A qui sont premiers, dont l'intersection est réduite à 0 et telle qu'aucun d'entre eux n'est inclus dans un autre. □

Corollaire **3.13** *Une variété algébrique affine irréductible n'est pas réunion finie de sous-variétés propres.*

Ainsi, toute sous-variété algébrique affine irréductible d'une variété algébrique affine est incluse dans (au moins) une composante irréductible de cette variété.

En effet, si une variété affine irréductible était réunion finie de sous-variétés propres, elle serait réunion finie de leurs composantes irréductibles, et aurait deux décompositions différentes en réunion finie de sous-variétés irréductibles. Pour la seconde partie du corollaire, la sous-variété considérée est réunion finie de ses intersections avec les différentes composantes irréductibles de la variété et l'une d'elle est alors égale à la sous-variété, qui est donc incluse dans la composante irréductible correspondante.

Proposition **3.14** *L'intersection de deux composantes irréductibles distinctes d'une variété algébrique affine est une sous-variété propre de chacune de ces deux composantes.*

Preuve En effet, soit M une variété algébrique affine et M_1, M_2 deux composantes irréductibles distinctes de M. Alors la sous-variété algébrique affine de M_1 définie par les restrictions des fonctions régulières sur M nulles sur M_2 est clairement l'intersection $M_1 \cap M_2$. De plus, ce n'est pas tout M_1 car aucune composante irréductible de M ne peut en contenir une autre. $\square$

3.2.1 Produit de deux variétés algébriques affines

Proposition **3.15** *Soient (A_1, M_1) et (A_2, M_2) deux variétés algébriques affines. Alors $(A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_2, M_1 \times M_2)$ est aussi une variété algébrique affine. On l'appellera le produit des deux variétés précédentes.*

Preuve On va voir $A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_2$ comme algèbre de fonctions sur $M_1 \times M_2$. Pour cela, on pose pour f_1 dans A_1, f_2 dans A_2, x_1 dans M_1 et x_2 dans M_2 :

$$(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

Il s'agit bien d'un homomorphisme injectif de $\mathbb{C}$-algèbres. En particulier l'algèbre $A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_2$ est réduite. De plus, il est clair qu'elle est de type fini car A_1 et A_2 le sont.

Montrons que $M_1 \times M_2$ s'identifie avec le spectre maximal de cette algèbre. Pour tout élément (x_1, x_2) de $M_1 \times M_2$, on a l'évaluation en ce point qui est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de $A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_2$ dans $\mathbb{C}$. Donc chaque point de $M_1 \times M_2$ détermine un idéal maximal de $A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_2$. Et il est clair que deux éléments distincts déterminent des idéaux distincts (si par exemple $x_1 \neq x_1'$ alors il existe f dans A_1 telle que $f(x_1) \neq f(x_1')$ et alors $f \otimes 1_{A_2}(x_1, x_2) \neq f \otimes 1_{A_2}(x_1', x_2')$).

Dans l'autre sens, tout morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de $A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_2$ dans $\mathbb{C}$, composé avec les morphismes canoniques $f \to f \otimes 1_{A_2}$ (resp. $g \to 1_{A_1} \otimes g$) de A_1 (resp. A_2) dans $A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_2$ donne des morphismes de A_1 et A_2 dans $\mathbb{C}$. Chacun de ces morphismes est l'évaluation en un élément de M_1 ou M_2 et le morphisme de départ de $A_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_2$ dans $\mathbb{C}$ est l'évaluation en le couple ainsi déterminé.

Cela prouve la proposition. $\square$

Proposition **3.16** *Soient (A, M) et (B, N) deux variétés algébriques affines. Le morphisme associé au comorphisme $f \to f \otimes 1_B$ (resp. $g \to 1_A \otimes g$) de A (resp. B) dans $A \otimes_{\mathbb{C}} B$ est la projection naturelle de $M \times N$ sur M (resp N).*

Proposition **3.17** *Soient (A, M) et (B, N) deux variétés algébriques affines, f un morphisme de M dans N. Alors, l'application $x \to (x, f(x))$ est un plongement de M dans $M \times N$.*

En particulier, le graphe d'un morphisme est une sous-variété algébrique affine du produit des variétés de départ et d'arrivée.

PREUVE Prenons une fonction régulière sur $M \times N$ de la forme $u = g \otimes h$. Alors, pour x dans M, on a $u \circ f(x) = g(x)h(f(x))$. Les deux fonctions g et $h \circ f$ sont régulières sur M (la seconde car f est un morphisme), et donc leur produit, qui est $u \circ f$ également. Donc, par linéarité, f est bien un morphisme de M dans $M \times N$.

De plus, si g est une fonction régulière sur M, on a $(g \otimes 1) \circ f = g$, donc le comorphisme f^* est surjectif et f est bien un plongement. $\square$

COROLLAIRE **3.18** *Soient (A_1, M_1) et (A_2, M_2) deux variétés algébriques affines, y un point de M_2. Alors $M_1 \times \{y\}$ est une sous-variété algébrique affine de $M_1 \times M_2$ isomorphe à M_1.*

PROPOSITION **3.19** *Si M_1 et M_2 sont irréductibles, alors $M_1 \times M_2$ l'est aussi.*

PREUVE Donnons nous une variété algébrique affine irréductible M et une variété algébrique affine N telle que $M \times N$ soit réductible. On va prouver que N est réductible. On se donne deux sous-variétés propres X_1 et X_2 de $M \times N$ dont la réunion fait $M \times N$. Alors, pour y dans N, on appelle $X_{y,1} \times \{y\}$ l'intersection de X_1 avec $M \times \{y\}$ et de même pour $X_{y,2}$. Alors, $X_{y,1}$ et $X_{y,2}$ sont des sous-variétés de M dont la réunion fait M, qui est irréductible. L'un des deux est forcément égal à M. Appelons alors Y_1 l'ensemble des éléments y de N tel que $M \times \{y\} \subset X_1$ et de même pour Y_2. On vient de dire que $Y_1 \cup Y_2$ faisait N.

Prenons alors un point (x_1, y_1) de $M \times N$ hors de X_1. L'intersection de $\{x_1\} \times N$ avec X_1 est une sous-variété de $M \times N$ de la forme $\{x_1\} \times Z_1$, avec $Y_1 \subset Z_1$ et Z_1 sous-variété propre de N. De même, on trouve une sous-variété propre Z_2 de N contenant Y_2. Ainsi, $N = Z_1 \cup Z_2$ et est donc réductible. $\square$

3.3 Fonctions rationnelles

DÉFINITION **3.10** *Soit M une variété algébrique affine irréductible. On appelle corps des fonctions rationnelles sur M, noté $K(M)$, le corps des fractions de l'anneau des fonctions régulières sur M.*

Attention, une fonction rationnelle n'est pas forcément définie sur toute la variété. Cependant, si une fonction rationnelle sur M s'écrit sous les formes $\frac{g_1}{h_1}$ et $\frac{g_2}{h_2}$, et si les fonctions h_1 et h_2 sont toutes deux non nulles en un point x, alors on a $\frac{g_1(x)}{h_1(x)} = \frac{g_2(x)}{h_2(x)}$, et donc la valeur de cette fonction rationnelle au point x est bien définie.

DÉFINITION **3.11** *Soit M une variété algébrique affine irréductible, x un point de M. On appelle anneau des germes de fonctions rationnelles définies en x le localisé de l'anneau $F(M)$ en son idéal maximal I_x associé à x. On le notera $\mathcal{O}_x$. C'est un sous-anneau du corps des fonctions rationnelles sur M.*

Une fonction rationnelle qui est dans cet anneau est dite régulière en x. Une fonction rationnelle qui n'y est pas est dite singulière en x.

REMARQUE **3.20** *Quel que soit x, $\mathcal{O}_x$ est un anneau local et son idéal maximal est formé des fonctions définies et nulles en x.*

REMARQUE **3.21** *Toute fonction rationnelle régulière en x est définie et régulière sur un certain ouvert principal de M contenant x. En effet, on peut l'écrire $f = \frac{g}{h}$ avec $h(x) \neq 0$. Si on rtire à M l'ensemble des zéros de h, on obtient un ouvert principal M_0 de M contenant x sur lequel h ne s'annule pas et son inverse y est donc une fonction régulière d'après la remarque 3.2. Ainsi, f est bien régulière sur M_0.*

PROPOSITION **3.22** *Une fonction rationnelle sur une variété algébrique affine irréductible est régulière si et seulement si elle est régulière en chaque point de la variété.*

PREUVE Cela revient à dire que l'algèbre des fonctions régulières sur une variété algébrique affine irréductible est égale à l'intersection de ses localisés en ses idéaux maximaux, ce qui est vrai pour tout anneau intègre d'après la proposition 2.7 $\square$

PROPOSITION **3.23** *L'ensemble des points singuliers d'une fonction rationnelle sur M est une sous-variété algébrique propre de M.*

PREUVE Un fonction rationnelle f est singulière en un point x si et seulement si pour toute fraction $\frac{g}{h}$ valant f, on a $h(x) = 0$. Il s'agit alors clairement d'une intersection de sous-variétés algébriques de M, donc d'une sous-variété algébrique de M. Il est de plus clair qu'elle est propre. $\square$

DÉFINITION **3.12** *On dit que deux variétés algébriques affines irréductibles sont birationnellement équivalentes si leurs corps des fonctions rationnelles sont isomorphes en tant que $\mathbb{C}$-algèbre.*

On a une caractérisation des variétés birationnellement équivalentes :

PROPOSITION **3.24** *Deux variétés algébriques affines irréductibles sont birationnellement équivalentes si et seulement si elles possèdent des ouverts principaux isomorphes.*

PREUVE Si M est une variété algébrique affine irréductible et si M_f est l'ouvert principal de M défini par la fonction non nulle f, alors l'anneau $F(M_f)$ est un localisé non nul de $F(M)$. Il contient $F(M)$ et est inclus dans son corps des fractions. Il a donc le même corps des fractions que $F(M)$ ce qui prouve que M_f est birationnellement équivalent à M. Deux variétes algébriques affines irréductibles ayant des ouverts principaux isomorphes sont toutes deux birationnellement équivalentes à eux, donc le sont entre elles.

Pour la réciproque, considérons deux variétés algébriques affines irréductibles M et M' ayant "les mêmes" fonctions rationnelles. Comme $F(M)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, elle possède un système générateur $f_1, ..., f_k$. Pour $1 \leq i \leq k$, posons $f_i = \frac{g'_i}{h'_i}$ avec g'_i et h'_i dans $F(M')$. Appelons M'_1 l'ouvert principal de M' associé au produit des h'_i. Il est alors clair que toute fonction régulière sur M l'est aussi sur M'_1, soit donc $F(M) \subset F(M'_1)$. Alors, par le même raisonnement (puisque M'_1 est birationnellement équivalent à M), il existe une fonction régulière f' sur M'_1 telle que le localisé de $F(M)$ en le système formé des puissances de f' contienne $F(M'_1)$, qui définit alors un ouvert principal M_0 de M. Mais le localisé de $F(M'_1)$ en ce même système contient et est contenu à la fois dans $F(M_0)$. L'ouvert principal M'_0 de M'_1 (et donc aussi de M') associé est donc isomorphe à M'_0, ce qui prouve la proposition. $\square$

3.4 Dimension d'une variété algébrique affine

DÉFINITION **3.13** *Soit M une variété algébrique irréductible. On appelle dimension de M la dimension de Krull de l'anneau $F(M)$.*

REMARQUE **3.25** *Si M est une variété algébrique affine irréductible, sa dimension est le plus grand entier n pour lequel il existe des sous-variétés irréductibles distinctes $M \supset M_1 \supset ... \supset M_n \neq \emptyset$.*

REMARQUE **3.26** *Si M est une variété algébrique affine, la dimension de Krull de $F(M)$ est la plus grande des dimensions des ses composantes irréductibles et certains l'appellent dimension de M. Nous préférons ne la définir que dans le cas irréductible.*

EXEMPLE **3.4.1** *Un point est de dimension 0. Réciproquement, toute variété algébrique affine irréductible de dimension 0 se réduit à un point.*

En effet, si M est réduite à un point, $F(M)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ qui est un corps et n'a donc d'autre idéal propre que l'idéal réduit à $\{0\}$, et est donc de dimension 0 (son idéal propre est évidemment premier).

Réciproquement, si M est une variété affine irréductible de dimension 0, alors l'idéal réduit à 0, qui est premier, ne peut être inclus strictement dans aucun idéal premier. Il est donc maximal et $F(M)$ est alors un corps. Nous avons déjà vu que ce ne pouvait être que $\mathbb{C}$. Donc M est un point.

EXEMPLE **3.4.2** *La droite affine $(\mathbb{C}[X], \mathbb{C})$ est de dimension 1. En effet, $\mathbb{C}[X]$ étant principal et n'étant pas un corps, il est de dimension 1.*

EXEMPLE **3.4.3** *L'espace affine* $(\mathbb{C}[X_1, ..., X_n], \mathbb{C}^n)$ *est de dimension* n*. Cela résulte de la factorialité des anneaux de polynômes sur* $\mathbb{C}$ *et de la proposition 2.31.*

REMARQUE **3.27** *Une sous-variété algébrique affine irréductible d'une variété algébrique affine irréductible est de dimension inférieure, et strictement inférieure si elle est différente.*

En effet, si A, I un idéal et $P_0 \subset P_1 \subset ... \subset P_k$ une suite strictement croissante d'idéaux premiers de A/I, alors $\pi^{-1}(P_0), ..., \pi^{-1}(P_k)$ est une suite strictement croissante d'idéaux premiers de A, et donc si A est de dimension finie, tout quotient est de dimension inférieure. Si de plus A est intègre et I non réduit à $\{0\}$, alors on peut rajouter $\{0\}$ au début de la suite précédente et c'est encore une suite strictement croissante d'idéaux premiers de A. Ainsi, si A est de dimension finie, A/I est de dimension strictement inférieure.

Le théorème suivant, appelé *théorème de normalisation*, est central dans la théorie de la dimension des variétés algébriques affines.

THÉORÈME **3.28** *Soit* A *une* $\mathbb{C}$*-algèbre (réduite) de type fini et* $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_k$ *une suite croissante d'idéaux propres de* A*. Alors il existe des éléments* $x_1, ..., x_n$ *de* A*, algébriquement indépendants, et des entiers* $n_1, ..., n_k$ *tels que :*
i) L'anneau A *est entier sur* $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ *;*
ii) pour tout $i, 1 \leq i \leq k$*, l'intersection de* I_i *avec* $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ *est l'idéal de* $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ *engendré par* $x_1, ..., x_{n_i}$*.*

REMARQUE **3.29** *L'entier* n *est égal à la dimension de* A *en tant qu'anneau.*

DÉMONSTRATION Nous allons d'abord nous ramener au cas où A est $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. En effet, on a toujours $A = A'/I$ pour $A' = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ (n bien choisi) et I idéal approprié de A'. Appelons π la projection naturelle de A' sur A et pour $1 \leq i \leq k$, $I'_i = \pi^{-1}(I_i)$. Comme le théorème est vrai pour A', posons pour $1 \leq j \leq s$, x'_s qui vérifient la conclusion du théorème pour les $I \subset I'_1 \subset ... \subset I'_k$. Soit alors $B = \mathbb{C}[x'_1, ..., x'_s]$. L'idéal $I \cap B$ est engendré par $x'_1, ..., x'_j$ et l'anneau A est entier sur les $\mathbb{C}[\pi(x'_i), j < i \leq s]$. En posant $x_i = \pi(x'_{i+j})$ pour $i > j$, on a que l'idéal engendré par $x_1, ..., x_l$ est le quotient par I de l'idéal de A' engendré par $x'_1, ..., x'_{l+j}$ et tous les I_i sont de cette forme. De plus, les x_i sont algébriquement indépendants car si on a un polynôme non nul P à coefficients dans $\mathbb{C}$ tel que $P(x_1, ..., x_{k-j}) = 0$, alors $P(x'_{j+1}1, ..., x'_k) \in I \cap B'$, qui est l'idéal de B engendré par les $x'_i, i \leq j$. Cet élément s'écrit donc comme un polynôme en les x'_i dont chaque monôme est multiple d'un X_i avec $i \leq j$. Un tel polynôme ne pouvant être égal à P, on a donc deux polynômes distincts prenant les mêmes valeurs en les x'_i, qui sont alors algébriquement dépendants, contrairement à l'hypothèse. Les éléments $x_i, 1 \leq i \leq k-j$ satisfont donc bien aux exigences du théorème.

Dans le cas où A est une algèbre de polynômes sur $\mathbb{C}$, nous procédons par récurrence sur k.

Commençons par le cas $k = 1$. On a donc $A = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ et I un déal propre de A.

Cas particulier : L'idéal I est principal. Dans ce cas, prenons x_1 un générateur de I. Il s'écrit $P(X_1, ..., X_n)$ (avec P non constant car I est propre). On cherche des éléments $x_i, 2 \leq i \leq n$ sous forme $x_i = X_i + X_1^{\alpha_i}$. Alors, clairement, pour prouver que A est premier sur $B = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$, il suffit de prouver que X_1 l'est et pour cela, nous allons choisir judicieusement les α_i. On sait que $P(X_1, ..., X_n) = x_i$ et donc $P(X_1, x_2 + X_1^{\alpha_2}, ..., x_N + X_1^{\alpha_n}) - x_1 = 0$, et il suffit de voir que ce polynôme (qu'on peut voir comme polynôme en X_1 à coefficients dans B) est unitaire (en fait à coefficient dominant dans $\mathbb{C}^*$, donc inversible)si les α_i sont bien choisis. En fait, si $1 \ll \alpha_2 \ll ... \ll \alpha_n$, il est clair que le monôme de plus grand degré en X_1 est unique et vaut $\lambda X_1^{\beta_1 + \sum_{2 \leq i \leq n} \alpha_i \beta_i}$ où $\lambda X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} ... X_n^{\beta_n}$ est le monôme de P pour lequel $(\beta_n, ..., \beta_1)$ est maximum pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^n$.

Les x_i sont alors algébriquement indépendants et on a $I \cap B = x_1 B$. En effet, tout élément y de $I \cap B$ s'écrit $x_1 y'$ avec y dans A et donc $\frac{y}{x_1}$ est algébrique sur B et dans son corps des fractions. Comme B, anneau de polynômes sur $\mathbb{C}$, est intégralement clos, $y' \in B$ ce qui permet de conclure le cas particulier.

Cas général : On raisonne ici par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ résulte du cas particulier car $\mathbb{C}[X]$ est principal.

Prenons un élément non nul x_1 de I. D'après le cas particulier, on peut trouver $t_2, ..., t_n$ qui satisfont les hypothèses du théorème pour l'idéal $x_1 A$. Appelons $C = \mathbb{C}[x_1, t_2, ..., t_n]$ et $C' = \mathbb{C}[t_2, ..., t_n]$.

Si on a $I \cap C' = \{0\}$, alors $x_2 = t_2, ..., x_n = t_n$ conviennent. En effet, A étant entier sur C, il reste juste à voir que l'idéal $I \cap C$ de C est $x_1 C$. Or, dans l'anneau principal $\mathbb{C}(t_2, ..., t_n)[x_1]$, l'idéal engendré par x_1 est maximal, donc est égal à l'ensemble des éléments de la forme $\frac{i}{P}$ où i est dans $I \cap C$ et P non nul dans C' (car ce dernier ensemble est un idéal propre le contenant). Donc, si on prend un élément y de $I \cap C$, il y a un élément non nul c' de C' tel que $yc' \in x_1 C$. Mais comme $x_1 C$ est un idéal premier de C, et que $C' \cap x_1 C$ est réduit à $\{0\}$, c'est que $y \in x_1 C$, ce qu'on cherchait.

Supposons maintenant que $I \cap C' \neq \{0\}$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence qui nous dit qu'il existe des éléments $x_2, ..., x_n$ de C', algébriquement indépendants, tels que C' est entier sur $B' = \mathbb{C}[x_2, ..., x_n]$ et $I \cap B'$ est engendré par $x_2, ..., x_l$. Alors, clairement, C, et donc aussi A est entier sur $B = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Reste à voir que $I \cap B$ est engendré par $x_1, ..., x_l$. Soit donc y dans $I \cap B$. On peut écrire y sous forme $y = \sum_{i=0}^{t} u_i x_1^i$ où u_i est dans B'. Alors, $y - u_0$ est dans $x_1 B$, qui est inclus dans I, donc u_0 est alors dans $I \cap B' = x_2 B' + ... + x_l B'$. Finalement $y \in x_1 B + x_2 B + ... + x_l B$.

Nous avons donc prouvé le théorème de normalisation dans le cas où on considérait un unique idéal.

Supposons maintenant k quelconque. Par hypothèse de récurrence, on trouve $t_1, ..., t_n$ qui satisfont les conditions du théorème pour la suite $I_1, ..., I_{k-1}$, $I_{k-1} \cap \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ étant engendré par $t_1, ..., t_r$. Considérons $A' = \mathbb{C}[t_{r+1}, ..., t_n]$ et $I' = I_k \cap A'$ et appliquons leur le cas $k = 1$. On trouve donc $x_{r+1}, ..., x_n$ tels que A' soit entier sur $\mathbb{C}[x_{r+1}, ..., x_n]$ et $I' \cap \mathbb{C}[x_{r+1}, ..., x_n]$ engendré par $x_{r+1}, ..., x_{r'}$. Posons $x_i = t_i$ pour $i \leq r$.

Alors A est entier sur $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ car les t_i le sont tous. De plus, si $j < k$, on a $I_j \cap \mathbb{C}[x_1, ..., x_n] = (I_j \cap \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]) \cap \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Or, $I_j \cap \mathbb{C}[t_1, ..., t_n]$ est engendré par $t_1, ..., t_m$ qui sont aussi des $x_1, ..., x_m$. L'idéal $I_j \cap \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ est également engendré par $x_1, ..., x_m$. En effet, il est premier et contient clairement l'idéal de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ engendré par ces $x_1, ..., x_m$. On a donc une suite croissante d'idéaux premiers de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_m]$ donnée par $\{0\} \subset < x_1 > \subset ... \subset < x_1, ..., x_m > \subset (I_j \cap \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]) \subset (< t_1, ..., t_{m+1} > \cap \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]) \subset ... \subset (< t_1, ..., t_n > \cap \mathbb{C}[x_1, ..., x_n])$. Cette suite contient $n + 2$ idéaux et $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n])$ est de dimension n. Deux de ces idéaux doivent donc être égaux et c'est forcément $< x_1, ..., x_m >$ et $I_j \cap \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Montrons enfin que $I_k \cap \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ est engendré par $x_1, ..., x_{r'}$. Soit y dans $I_k \cap \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. Il s'écrit comme polynôme en $x_1, ..., x_r$ à coefficients dans $\mathbb{C}[x_{r+1}, ..., x_n]$. Comme pour $i \leq r$, x_i est dans I_k, la "constante" du polynôme précédent est aussi dans I_k, et dans $\mathbb{C}[x_{r+1}, ..., x_n]$, et leur intersection est engendrée par $x_{r+1}, ..., x_{r'}$. Donc y est bien dans l'idéal engendré par $x_1, ..., x_{r'}$.

Ceci termine la démonstration du théorème de normalisation. □

Remarque **3.30** *Dans le théorème de normalisation, on ne suppose pas que les idéaux considérés sont premiers. On peut donc avoir des suites de longueur arbitraire, mais dans ce cas deux idéaux d'une chaîne peuvent avoir la même intersection avec le sous-anneau sans pour autant être égaux.*

Corollaire **3.31** *La dimension d'une variété algébrique affine irréductible non vide est égale au degré de transcendance sur $\mathbb{C}$ de son corps des fonctions rationnelles. En particulier, deux variétés algébriques affines irréductibles birationnellement équivalentes ont même dimension.*

En effet, si un anneau intègre est entier sur $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, sa dimension est n et son corps des fractions est algébrique sur $\mathbb{C}(X_1, ..., X_n)$, et a donc même drgré de transcendance sur $\mathbb{C}$, soit n. D'où le résultat en prenant l'anneau des fonctions régulières sur la varété étudiée.

Nous allons donner d'autres applications de ce théorème, qui utilisent aussi le résultat suivant, que nous admettrons, et qui est en quelque sorte une réciproque du lemme 2.2 :

Proposition **3.32** *Soit n un entier naturel et A une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, intègre et entière sur l'anneau $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. Soient $0 \leq k < k' < k'' \leq n$ trois entiers et $P_k \subset P_{k''}$ deux idéaux premiers de A tels que $P_k \cap \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] =< X_1, ..., X_k >$ et $P_{k''} \cap \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] =< X_1, ..., X_{k''} >$. Alors, il existe un idéal premier $P_{k'}$ de A tel que $P_{k'} \cap \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] =< X_1, ..., X_{k'} >$.*

Proposition **3.33** *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre intègre de type fini. Alors toutes les chaînes maximales d'idéaux premiers de A ont la même longueur.*

Preuve En effet, soit A une $\mathbb{C}$-algèbre intègre de type fini. Considérons une chaîne maximale $\{0\} = P_0, ..., P_k$ d'idéaux premiers de A. Alors, d'après le théorème de normalisation, il existe un entiers n et une sous-algèbre $A' = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ de A, sur laquelle A est entière et telle que pout tout i, $P_i \cap A'$ soit engendré par $x_1, ..., x_{\varphi(i)}$. Alors, on a $\varphi(i) = i$ pour tout i. En effet, on a pour tout i, $\phi(i+1) > \phi(i)$ d'après le lemme 2.2 et $\phi(i+1) < \phi(i) + 2$ d'après la proposition 3.32 (car sinon on pourrait intercaler un autre idéal premier entre P_i et P_{i+1}). Ainsi, $k = n$ et, comme n est forcément égal à la dimension de A, k ne dépend pas de la chaîne choisie. $\square$

Une traduction géométrique de ce résultat est de dire que toute sous-variété irréductible d'une variété irréductible M est incluse dans une sous-variété irréductible de codimension 1 de M.

Proposition **3.34** *Soit (A, M) une variété algébrique irréductible de dimension $n \geq 1$ et P une fonction régulière non nulle sur M (mais y ayant des zéros). Alors la dimension de chaque composante irréductible de la variété associée à P est $n-1$.*

Preuve Une composante irréductible M' de la variété associée à P est de dimension $< n$, et est associée à un idéal premier Q de A, minimal parmi ceux qui contiennent P. D'après le théorème de normalisation, on peut trouver une sous-algèbre $A' = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ de A, avec les x_i algébriquement indépendants sur A, avec $Q \cap A' =< x_1, ..., x_k >$, et on peut même supposer $x_1 = P$. Alors, $Q \cap A' =< P >$, sinon, d'après le lemme 3.32, Q ne serait pas minimal parmi les idéaux premiers contenant P. On peut alors trouver $Q_2 \subset ... \subset Q_n$ des idéaux premiers de A contenant P. Cela prouve que M' est de dimension au moins $n-1$.

Ainsi, M' est forcément de dimension $n-1$. $\square$

La proposition suivante en est une extension :

Proposition **3.35** *Soit M' une sous-variété algébrique affine irréductible de codimension k d'une variété algébrique affine irréductible M. Alors, il existe k fonctions régulières sur M telles que M' soit une composante irréductible de la sous-variété de M définie par ces fonctions.*

Preuve On procède par récurrence sur k. Si $k = 1$, alors prenons une fonction f nulle sur M', non nulle sur M. Alors M' est forcément une composante irréductible de la sous-variété de M définie par f.

Supposons k plus grand. Alors on peut trouver une fonction f nulle sur M', non nulle sur M. La variété M' est alors la réunion de ses intersections avec les composantes irréductibles de la sous-variété M_f de M définie par f. L'une de ces intersections doit être M' car celle-ci est irréductible et M' est donc contenue dans une composante N de M_f, qui est de codimension 1 dans M. Par hypothèse de récurrence, on peut trouver $k-1$ fonctions régulières $g_2, ..., g_k$ sur N telles que M' est une composante irréductible de la sous-variété de N définie par les g_i. Prenons des fonctions $f_2, ..., f_k$ sur M dont les restrictions à N sont $g_2, ..., g_k$ et telles que, pour chaque i, f_i ne soit nulle sur aucune des composantes irréductibles de la sous-variété M_{i-1} définie par $f, f_2, ..., f_{i-1}$, ce qui est toujours possible à faire. Alors N est une composante irréductible de M_k car celle-ci ne peut avoir de composante irréductible de codimension strictement inférieure à k (on peut d'ailleurs constater par récurrence que toutes les composantes irréductibles de M_k sont de codimension k dans M). $\square$

Nous allons voir comment se comporte la dimension sous l'action d'un morphisme. Avant cela donnons une définition :

Définition **3.14** *On dit qu'un morphisme d'une variété algébrique affine dans une autre est dominant si le comorphisme associé est injectif. On dit aussi que la variété de départ domine la variété d'arrivée*

On peut alors énoncer :

Théorème **3.36** *Soit $\phi : M \mapsto N$ un morphisme dominant entre variétés algébriques affines irréductibles. Alors :*
i) $\dim M \geq \dim N$ *;*
ii) soit Y une sous-variété de N et X une composante irréductible de $\phi^{-1}(Y)$ telle que la restriction de ϕ de X dans Y soit un morphisme dominant. Alors $\dim X \geq \dim Y + (\dim M - \dim N)$.

Démonstration Le point i) est clair car la dimension d'une variété algébrique affine est le nombre maximum d'éléments algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$ dans l'anneau de ses fonctions régulières.

Appelons k la codimension de Y dans N. D'après la proposition ci-dessus, il existe k fonctions $f_1, ..., f_k$ sur N telles que Y soit une composante irréductible de la variété Y' qu'elles définissent. L'image réciproque de Y' est la sous-variété de M définie par les fonctions $g_i = f_i \circ \phi$. Si X est une composante irréductible de $\phi^{-1}(Y)$ qui domine Y, c'en est aussi une de $\phi^{-1}(Y')$. En effet, prenons une composante irréductible X' de $\phi^{-1}(Y')$ contenant X. Son image par ϕ est incluse dans une composante irréductible de Y', qui ne peut être que Y. Ainsi, X est une composante irréductible de $\phi^{-1}(Y')$, qui est une sous-variété de M définie par k fonctions. Ainsi

$$\dim X \geq \dim M - k = \dim Y + (\dim M - \dim N)$$

□

PROPOSITION **3.37** *La dimension d'un produit de deux variétés algébriques affines irréductibles (non vides) est égale à la somme des dimensions de ces deux variétés.*

PREUVE En effet, si (A, M) et (B, N) sont deux variétés algébriques affines irréductibles de dimension respectives m et n, alors on a une sous-algèbre A' de A (resp. B' de B) isomorphe à $C[X_1, ..., X_m]$ (resp. $C[X_1, ..., X_n]$) sur laquelle A (resp. B) est entière. Alors, $A' \otimes B'$ est isomorphe à $C[X_1, ..., X_{m+n}]$ et est une sous-algèbre de $A \otimes B$. Sa clôture intégrale dans $A \otimes B$ contient tous les éléments de la forme $a \otimes 1$, $a \in A$ et $1 \otimes b$, $b \in B$. Comme c'est en plus une sous-algèbre, c'est $A \otimes B$ toute entière, qui est donc de dimension $m + n$, qui est donc la dimension de $M \times N$. □

3.5 Topologie de Zariski

Une variété algébrique affine possède deux topologies naturelles. La première est la topologie induite par $\mathbb{C}^n$ lorsqu'on la plonge comme sous-variété. (En effet, tout polynôme étant continu, les topologies induites par deux structures de sous-variété sur une même variété algébrique affine sont les mêmes). La seconde, appelée toplogie de Zariski est une topologie qui a l'intérêt d'exister sur des variétés algébriques sur d'autres corps que $\mathbb{C}$, et même plus. Commençons par la définir :

DÉFINITION **3.15** *Soit (A, M) une variété algébrique affine. Alors les sous-variétés algébriques affines de M forment les fermés d'une topologie sur M appellée topologie de Zariski sur M.*

REMARQUE **3.38** *La topologie de Zariski sur le produit de deux variétés algébriques affines n'est pas la topologie produit des topologies de Zariski sur les deux variétés. Par exemple, la diagonale $\{(z, z), z \in \mathbb{C}\}$ est une sous-variété, donc un fermé de Zariski de $\mathbb{C}^2$, mais n'est pas un fermé de la topologie produit des topologies de Zariski sur $\mathbb{C}$.*

PROPOSITION **3.39** *Tout morphisme de variétés algébriques affines est continu pour les topologies de Zariski.*

PREUVE Il suffit de voir que l'image réciproque de tout fermé de Zariski par un morphisme est encore un fermé de Zariski, ce qui résulte de la proposition 3.11. □

Remarque **3.40** *Tout ouvert principal d'une variété algébrique affine irréductible est un ouvert de cette variété et tout ouvert d'une variété algébrique affine irréductible contient un ouvert principal de cette variété.*

En effet, le fait qu'un ouvert principal soit ouvert est clair. D'autre part, soit F un fermé d'une variété algébrique affine irréductible M. Prenons une fonction régulière sur M, non nulle mais nulle sur tout F. Il est clair que l'ouvert principal associé à cette fonction est inclus dans $M \backslash F$.

Ainsi, les ouverts principaux d'une variété algébrique affine irréductible forment une base d'ouverts pour la topologie de Zariski de cette variété.

Remarque **3.41** *Soit M une variété algébrique affine et N une sous-variété algébrique affine de M. Alors la topologie de Zariski sur N est la topologie induite par la topologie de Zariski sur M. Ceci est vrai également pour un ouvert principal de M.*

3.6 Géométrie locale

Définition **3.16** *Soit M une variété algébrique affine, x un point de M et I_x l'idéal maximal de $F(M)$ associé à x. On appelle espace tangent à M en x, qu'on notera T_xM le dual (vectoriel) du quotient I_x/I_x^2 et ses éléments seront appelés vecteurs tangents à M en x.*

Définition **3.17** *On appelle dérivation en x une forme linéaire D sur $F(M)$ vérifiant, pour tous f et g dans $F(M)$: $D(fg) = D(f)g(x) + f(x)D(g)$.*

Proposition **3.42** *L'espace tangent s'identifie à l'espace des dérivations au point considéré.*

Preuve On sait que l'anneau $F(M)$ est, en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, la somme directe de $\mathbb{C}.1$ et de I_x. Ainsi, à tout vecteur tangent en x, on peut associer l'unique forme linéaire sur A_x qui est nulle sur les constantes et, sur I_x, est la composée du vecteur tangent considéré par la projection canonique de I_x sur I_x/I_x^2. V'erifions qu'il s'agit bien d'une dérivation en x.

Soient f et g dans $F(M)$. On écrit alors $f = f(x).1 + f'$ et $g = g(x).1 + g'$ où f' et g' sont dans I_x. Appelons D l'application définie comme ci-dessus. On a alors $D(f) = D(f')$ et $D(g) = D(g')$ car D est nulle sur les constantes. En outre, on a $fg = f(x)g(x).1 + f(x)g' + g(x)f' + f'g'$. Or D est nulle sur $f(x)g(x).1$, car c'est une constante, et sur $f'g'$ qui est dans I_x^2. Donc $D(fg) = f(x)D(g') + g(x)D(f') = f(x)D(g) + g(x)D(f)$.

Montrons réciproquement que toute dérivation en x est de la forme précédente. Si D est une dérivation en x, et si h est dans I_x^2, alors h est le produit de deux fonctions de

I_x, qui sont donc nulles en x, et la formule donne immédiatement $D(h) = 0$. Ainsi, D donne bien, par passage au quotient par I_x^2, une application linéaire sur I_x/I_x^2, soit un vecteur v tangent en x. Comme de plus on a $D(1) = D(1.1) = 1.D(1) + 1.D(1)$, on a $D(1) = 0$ et D nulle sur les constantes. La dérivation associée à v est donc bien D.

Les deux espaces s'identifient ainsi car il est clair en plus que les applications faisant passer d'un vecteur à une dérivation ou l'inverse sont linéaires. □

DÉFINITION **3.18** *Soit ϕ un morphisme d'une variété algébrique affine (A, M) dans une variété algébrique affine (B, N), et x un point de M. Alors, on définit l'application linéaire tangente à ϕ en x, qui est une application linéaire de T_xM dans $T_{\phi(x)}N$ de la façon suivante : le comorphisme associé à ϕ envoie les applications nulles en $\phi(x)$ sur les applications nulles en x, soit $I_{\phi(x)} \to I_x$, mais également $I_{\phi(x)}^2 \to I_x^2$ car c'est un morphisme d'algèbres. Il envoie donc par composition les formes linéaires sur $I_{\phi(x)}/I_{\phi(x)}^2$ sur les formes linéaires sur I_x/I_x^2, ce qui donne l'application linéaire tangente en x à ϕ (dit autrement, le comorphisme associé à ϕ induit naturellement une application de $I_{\phi(x)}/I_{\phi(x)}^2$ dans I_x/I_x^2 dont la transposée est l'application cherchée).*

REMARQUE **3.43** *L'application linéaire tangente en un point à un plongement est injective.*

En effet, le comorphisme associé à un plongement est surjectif, ainsi que sa restriction de $I_{\phi(x)}$ sur I_x, et donc sa transposée est injective.

Nous allons prouver le résultat suivant :

PROPOSITION **3.44** *La dimension de T_xM en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ est au moins égale à la dimension de toute composante irréductible de M contenant x.*

DÉFINITION **3.19** *Un point d'une variété algébrique affine M est dit régulier ou lisse s'il appartient à une unique composante irréductible de M et si la dimension de l'espace tangent en ce point est égale à la dimension de la composante irréductible de la variété M qui le contient.*

Un point qui n'est pas régulier sera dit singulier.

Une variété algébrique affine est dit non singulière si tous ses points sont réguliers.

Nous allons aussi démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME **3.45** *L'ensemble des points singuliers d'une variété algébrique affine non vide est une sous-variété algébrique propre.*

Pour prouver la proposition 3.44 et le théorème, nous allons commencer par donner une vision plus “concrète” de l'espace tangent en un point.

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ un polynôme à $n \geq 1$ variable. Remarquons que la différentielle de P en l'origine de $\mathbb{C}^n$ est le polynôme

$$DP(0, ..., 0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial X_i}(0, ..., 0)X_i$$

On remarque d'ailleurs que c'est juste la partie homogǹe de degré 1 du polynôme P.

Proposition **3.46** *Soit (A, M) une variété algébrique affine, x un point de M et f un plongement de cette variété dans $(\mathbb{C}[X_1, ..., X_n], \mathbb{C}^n)$ qui envoie x sur l'origine. Soit I l'idéal des polynômes s'annulant sur $f(M)$. Alors l'image de l'application linéaire tangent à f en x s'identifie à :*

$$\bigcap_{P \in I} \ker DP$$

On peut même, dans cette dernière formule, remplacer I par n'importe quel système générateur.

Preuve Il faut d'abord commencer par identifier $\mathbb{C}^n$ avec l'espace tangent à la variété algébrique affine $\mathbb{C}^n$ en l'origine. L'iéal maximal I_0 de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ associé à l'origine est formé des polynômes dont le terme constant est nul. Son carré est formé des pôlynômes dont tous les monômes sont de degré ≥ 2. Il est clair que c'est aussi les polynômes P qui s'annulent en 0 et pour lesquels DP aussi s'annule en 0. Ainsi, l'application de I_0/I_0^2 dans les polynômes homogènes de degré 1 qui à la classe d'un polynôme P de I_0 associe DP est un isomorphisme (on verra donc DP souvent comme la classe de P modulo I_0^2 si P est dans I_0).

Ainsi, l'espace tangent à $\mathbb{C}^n$ en l'origine s'identifie au dual de l'ensemble des polynômes homogènes de degré 1. Or, toute forme linéaire sur l'ensemble des polynômes homogènes de degré 1 est l'évaluation en un certain vecteur de $\mathbb{C}^n$, et réciproquement. Ainsi, l'espace tangent à $\mathbb{C}^n$ en l'origine s'identifie à $\mathbb{C}^n$.

Prenons maintenant un plongement f d'une variété M dans $\mathbb{C}^n$ et x un point de M envoyé par f sur l'origine. Commençons par prouver que l'image de l'application tangente à f en x est incluse dans l'intersection des noyaux cherchée.

Prenons $g \in I$ un polynôme qui s'annule sur $f(M)$. Soit $u \in T_xM$. On doit voir que $f_*(u)$ est dans $\ker Dg$, c'est-à-dire, en considérant $f_*(u)$ comme fonction sur I_0/I_0^2, que $f_*(u)(Dg) = 0$. Or, $f_*(u)(Dg) = u(\overline{f^*g}) = u(0) = 0$. Ainsi, $f_*(u)$ se trouve bien dans $\ker Dg$ quel que soit g nul sur $f(M)$.

Montrons maintenant l'inclusion réciproque. Considérons un élément u' de l'intersection des noyaux des différentielles des éléments de I, et cherchons un élément u de T_xM tel que $f_*(u) = u'$. Soit h une fonction régulière sur M, nulle en x, $\bar{h}$ sa classe dans I_x/I_x^2. Alors, si on prend un polynôme P de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ tel que $h = f^*P$, on doit avoir

$$u(\bar{h}) = u'(P)$$

Or, si on a deux polynômes P_1 et P_2 vérifiant $h = f^*P_1 = f^*P_2$, alors $P_1 - P_2$ est dans I, et donc u' prend la même valeur en les deux polynômes. Il existe donc bien une application linéaire $\tilde{u}$ sur I_x vérifiant $\tilde{u}(h) = u'(P)$ pour tous h et P tels que $h = f^*P$, application unique d'ailleurs par surjectivité de f^*. De plus, cette application est nulle sur I_x^2. En effet, si $h = h_1h_2$, alors $h = f^*(Q_1Q_2)$ pour $f^*Q_i = h_i, i = 1, 2$ et Q_1Q_2 polynômes nuls en l'origine et alors $\tilde{u}(h) = u'(Q_1Q_2) = 0$ car Q_1Q_2 est dans I_0^2.

On a donc montré que l'image de l'espace tangent à une variété en un point envoyé sur l'origine de $\mathbb{C}^n$ par un plongement par l'application linéaire tangente à ce plongement en ce point était l'intersection des noyaux des différentielles en l'origine des polynômes nuls sur l'image du plongement. La dernière partie de la proposition est très claire. □

Cela donne sans doute une vision plus simple de l'espace tangent, et nous allons nous en servir pour démontrer la proposition 3.44 et le théorème. Pour prouver la proposition, nous nous servirons du lemme suivant :

Lemme **3.2** *Soit x un point régulier d'une variété M de dimension k en x (i.e. la composante irréductible de M contenant x est de dimension k) et f dans $I_x \backslash I_x^2$. Alors x est un point régulier de la sous-variété de M définie par f et celle-ci est de dimension $k - 1$ en x.*

La proposition 3.44 résulte de ce lemme. En effet prenons un point x d'une sous-variété algébrique irréductible M de $\mathbb{C}^n$ dont l'espace tangent est de dimension k. On peut supposer que x est l'origine de $\mathbb{C}^n$. On peut alors trouver $n - k$ polynômes $P_1, ..., P_{n-k}$ de $I(M)$ tels que $DP_1, ..., DP_{n-k}$ soient linéairement indépendants. Alors, d'après le lemme, x est un point lisse de la variété M' définie par $P_1, ..., P_{n-k}$, et sa composante irréductible contenant x est donc de dimension k et possède M comme sous-variété. Donc $\dim M \leq k$.

Reste donc à montrer le lemme.

Preuve Soit M' la composante irréductible de M contenant x et M_f la sous-variété de M définie par f. Alors, toute composante irréductible de M_f contenant x est incluse dans M', et est donc de dimension $k - 1$ d'après la proposition 3.34. Reste à en montrer l'unicité, ce que nous admettrons. □

Preuve On peut toujours supposer que M est une sous-variété de $\mathbb{C}^n$ et que x est l'origine de $\mathbb{C}^n$. La proposition résultera du fait suivant : Si on prend $f_1, ..., f_k$ des polynômes qui s'annulent en 0 et dont les différentielles y sont linéairement indépendantes, alors l'origine est sur unique composante irréductible de la sous-variété définie par les f_i et cette composante est de dimension $n-k$. Ceci se prouve en itérant le résultat suivant : □

Venons-en maintenant à la preuve du théorème :

DÉMONSTRATION Montrons d'abord que l'ensemble des points singuliers d'une variété M algébrique affine en est une sous-variété. L'ensemble des points singuliers de M est la réunion des intersections deux à deux de ses composantes irréductibles et des points singuliers de chacune de ses composantes en tant que variété. Il suffit donc de montrer le théorème dans le cas où M est irréductible. C'est ce qu'on suppose et on note alors n la dimension de M. On peut supposer que M est une sous-variété de $\mathbb{C}^m$ et qu'elle est définie par un idéal I. Soient alors $P_1, ..., P_k$ des générateurs de cet idéal. Nous avons dit que la dimension de l'espace tangent en un point de M était la dimension de l'intersection des noyaux des différentielles des polynômes $P_1, ..., P_k$ au point considéré. Appelons J_x la matrice dont les coefficients $a_{i,j}$ valent $\frac{\partial P_i}{\partial X_j}(x)$. Alors, la dimension de l'espace tangent en x est égal à $m - rang(J_x)$. Et donc, cet espace est de dimension n si le rang de J_x vaut $m-n$. Or, on sait que cette dimension ne peut être $< n$. Donc, le rang de J_x ne peut être $> m-n$ et il est égal à $m-n$ si et seulement s'il existe un mineur d'ordre $m-n$ de J_x qui est non nul. Or, l'application qui à x associe un tel mineur est polynomiale. Donc l'ensemble des points qui annulent ce mineur est une sous-variété de M et l'intersection de toutes ces sous-variété, qui est l'ensemble des points singuliers de M, est aussi une sous-variété. Il faut maintenant montrer que M possède forcément des points réguliers.

Pour cela, supposons que M est irréductible, de dimension n. L'algèbre $F(M)$ est entière sus une sous-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ et l'injection correspondante est le comorphisme d'un morphisme dominant ϕ de M dans $\mathbb{C}^n$. Le corps des fonctions rationnelles sur M est une extension finie, et donc primitive, du corps $\mathbb{C}(X_1, ..., X_n)$. Soit f un élément primitif de cette extension, que l'on peut prendre dans $F(M)$ et Q son polynôme minimal sur $\mathbb{C}(X_1, ..., X_n)$, qui est à coefficients polynomiaux car f est entier sur $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ qui est algébriquement clos. Nous allons voir que tout élément de M dont l'image par ϕ n'est ni sur l'ensemble des zéros du discriminant d de Q, ni sur l'ensemble des zéros d'un certain polynôme non nul $\tilde{d}$ de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ est un point lisse de M.

Écrivons $Q(Y) = Y^k + \sum_{0 \leq i < k} g_i Y^i$ et considérons $n+1$ dérivations $L_1, ..., L_{n+1}$ de $F(M)$ en un point x pour lequel $d(\phi(x)) \neq 0$ et posons $y = \phi(x)$. De $Q(f) = 0$, on tire pour tout j :

$$mf^{m-1}(x)L_j(f) + \sum_{0 \leq i < k} ig_i(y)f^{i-1}(x)L_j(f) + \sum_{0 \leq i < k} f^i(x)L_j(g_i) = 0$$

Or, $f(x)$ est racine du polynôme $Q_y(X) = X^k + \sum_{0 \leq i < k} g_i(y)X^{k-i}$, dont le discriminant est $d(y) \neq 0$, et donc $f(x)$ n'est pas racine du polynôme Q'_y. Posons $c = Q'_y(f(x))$. La formule ci-dessus devient $cL_j(f) + \sum_{0 \leq i < k} f^i(x)L_j(g_i) = 0$

Restreignons les L_j à $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$. Il s'agit de dérivations au point y, et sont donc linéairement dépendantes. On a donc des nombres $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$ non tous nuls tels que $\sum_j \alpha_j L_j(g) = 0$ pour tout polynôme g. On a alors $c(\sum_j \alpha_j L_j(f)) = 0$. Comme de plus

c n'est pas nul, on a $\sum_j \alpha_j L_j(f) = 0$, et donc pour tout élément h de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n, f]$, on a $\sum_j \alpha_j L_j(h) = 0$. Or, comme $F(M)$ est de type fini, il existe un polynôme $\tilde{d}$ de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ tel que pour tout g est dans $F(M)$, $\tilde{d}g$ est dans $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n, f]$, et comme $\sum_j \alpha_j L_j(\tilde{d}g) = \sum_j \alpha_j L_j(d) = 0$, et $\tilde{d}(y) \neq 0$, on a aussi $\sum_j \alpha_j L_j(g) = 0$, ce qui prouve que les L_j sont effectivement linéairement dépendantes, et que donc l'espace tangent à M en x est bien de dimension au plus n, donc n, et x est un point lisse de M. □

Note : On peut en fait prouver que le polynôme d a la propriété requise pour $\tilde{d}$, ce qui prouve que $d(\phi(x)) \neq 0$ suffit pour que x soit lisse.

PROPOSITION **3.47** *Soit M une variété algébrique affine irréductible de dimension n et x un point lisse de M. Soient $f_1, ..., f_n$ dans I_x dont les classes modulo I_x^2 engendrent I_x/I_x^2. Alors les f_i sont algébriquement indépendantes et forment donc une base de transcendence sur $\mathbb{C}$ du corps des fonctions rationnelles sur M.*

PREUVE Considérons le morphisme ϕ de M dans $\mathbb{C}^n$ donné par $y \to (f_1(y), ..., f_n(y))$. Si les f_i n'étaient pas algébriquement indépendantes, on aurait un polynôme non nul P tel que $P(f_1, ..., f_n) = 0$. La sous-variété définie par P aurait ses composantes de dimension $n-1$, en particulier (une de) celle(s) qui contient l'image de ϕ. Alors, une composante irréductible de $\phi^{-1}(0)$ contenant x serait de dimension ≥ 1. Or, ceci est impossible si les classes des f_i dans I_x/I_x^2 sont indépendantes, car alors l'application linéaire tangente à ϕ en x est injective et donc l'espace tangent en x à $\phi^{-1}(0)$ est de dimension 0, et ne peut donc être ≥ 1. □

3.6.1 Variétés normales et normalisation

DÉFINITION **3.20** *On dit qu'un point x d'une variété algébrique affine est normal si le localisé de l'anneau des fonctions régulières en l'idéal des fonctions nulles au point considéré est un anneau intégralement clos.*

On dit qu'une variété algébrique affine est normale si tous ses points le sont.

REMARQUE **3.48** *Si x est un point normal de M, alors il est sur une unique composante irréductible de M. de plus, si un point est sur une unique composante irréductible M', l'anneau considéré dans la définition ci-dessus est l'anneau des germes de fonctions rationnelles sur M' définies en x.*

REMARQUE **3.49** *Un ouvert affine d'une variété algébrique affine normale est une variété algébrique affine normale.*

PROPOSITION **3.50** *Une variété algébrique affine irréductible est normale si et seulement si l'anneau de ses fonctions rationnelles est intégralement clos.*

Une variété algébrique affine est normale si et seulement si toutes ses composantes irréductibles sont normales et disjointes deux à deux.

PREUVE Si une variété algébrique affine irréductible M est normale, alors l'anneau $F(M)$ est, d'après la proposition 2.7, l'intersection, dans son corps des fractions, de ses localisés en ses idéaux maximaux, qui sont les anneaux $\mathcal{O}_x$ et sont donc tous intégralement clos. Alors, $F(M)$ l'est aussi.

Réciproquement, si $F(M)$ est intégralement clos, alors tous ses localisés le sont et donc tous ses points sont normaux, et M est normale.

Si un point x d'une variété algébrique affine appartient à deux composantes irréductibles distinctes, alors l'anneau $\mathcal{O}_x$ n'est pas intègre. Le point x ne peut donc être normal.

Réciproquement, si x n'appartient qu'à une seule composante irréductible M', alors $\mathcal{O}_x$ est isomorphe au localisé de $F(M')$ en son idéal maximal correspondant à x. Il est donc normal dans M si et seulement s'il l'est dans M'. D'où le résultat. $\square$

Montrons qu'à toute variété algébrique affine M, on peut associer naturellement une variété algébrique affine normale $\tilde{M}$ et un morphisme de $\tilde{M}$ dans M. Pour cela, nous admettrons le fait suivant :

PROPOSITION **3.51** *La cloture intégrale d'une $\mathbb{C}$-algèbre intègre de type fini est une $\mathbb{C}$-algèbre intègre de type fini.*

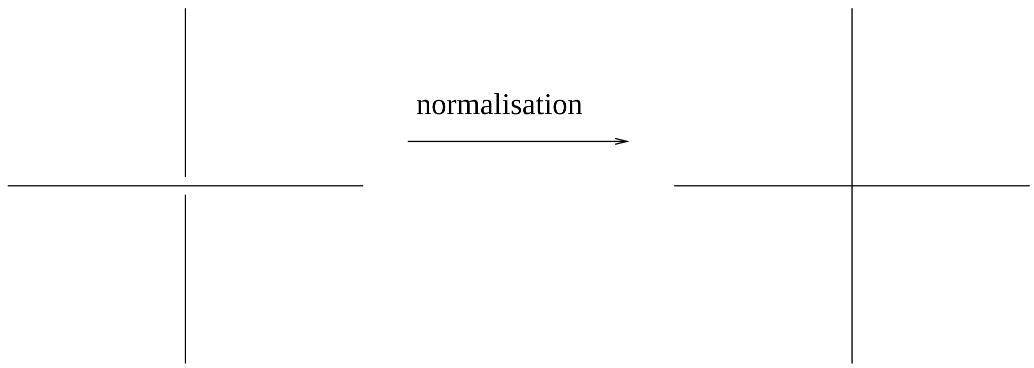
On a alors :

DÉFINITION **3.21** *Soit M une variété algébrique affine irréductible. Le morphisme dont le comorphisme associé est l'injection canonique de $F(M)$ dans sa cloture intégrale s'appelle la normalisation de M. La variété de départ de ce morphisme s'appelle la normalisée de M, notée généralement $\tilde{M}$.*

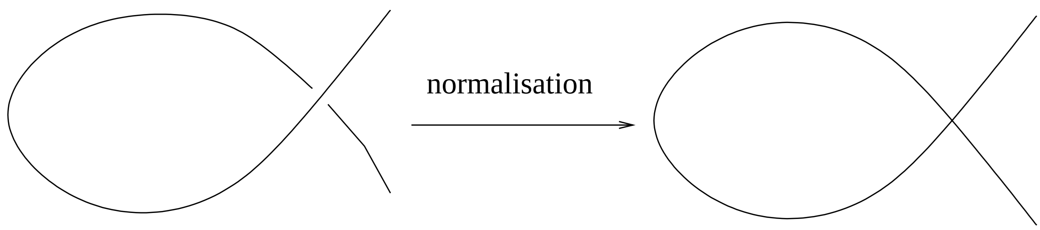
Si M n'est pas irréductible, on considère l'injection naturelle de $F(M)$ dans le produit des clotures intégrales de ses composantes irréductibles. On définit de même sa normalisée $\tilde{M}$ et le morphisme de normalisation de $\tilde{M}$ dans M.

EXEMPLE **3.6.1** *Prenons la courbe d'éfinie par le polynôme $X^2 - Y^3$ dans $\mathbb{C}^2$. Nous avons déjà dit que son anneau des fonctions régulières était isomorphe à $\mathbb{C}[X^2, X^3]$, dont la cloture intégrale était $\mathbb{C}[X]$. La normalisée de cette courbe est donc la droite affine complexe, et le morphisme de normalisation est $z \to (z^3, z^2)$.*

EXEMPLE **3.6.2** *Prenons la courbe d'éfinie par le polynôme XY. Il s'agit de la réunion des deux droites de coordonnées, donc ces deux droites sont ses deux composantes irréductibles. L'origine est ce qu'on appelle un point double car, en tant que variété complexe, on peut voir qu'un de ses voisinages est formé de deux morceaux de courbes, appelées branches, qui s'intersectent transversalement. Sa normalisée est donc la réunion disjointe de deux droites et le morphisme de normalisation envoie isomorphiquement chacune de ces deux droites sur une des deux composantes de la courbe. Géométriquement, cela revient à séparer les deux branches de la courbe au voisinage du point double.*



EXEMPLE **3.6.3** *Prenons la courbe d'éfinie par le polynôme $X^2 - Y^2(Y+1)$. Il s'agit d'une courbe irréductible (c'est facile à voir) et on peut voir qu'ici aussi l'origine de $\mathbb{C}^2$ est un point double. Dans le corps des fractions de son anneau des fonctions régulières, on a $(\frac{\bar{X}}{\bar{Y}})^2 = \bar{Y} + 1$. Donc $\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$ est entier et comme $\bar{Y} = (\frac{\bar{X}}{\bar{Y}})^2 - 1$ et $\bar{X} = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \cdot \bar{Y}$, la cloture intégrale de cet anneau est $\mathbb{C}[\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}] \simeq \mathbb{C}[X]$. Sa normalisée est donc la droite affine et le morphisme de normalisation est $z \to (z^3 - z, z^2 - 1)$. Là encore, on l'obtient géométriquement en séparant les deux branches au voisinage du point double.*



PROPOSITION **3.52** *Si on a un morphisme f d'une variété algébrique affine M_1 dans une variété algébrique affine M_2 et que M_1 est normale, alors il existe un (unique) morphisme $\tilde{f}$ de M_1 dans $\tilde{M}_2$ tel que $f = n \circ \tilde{f}$.*

La preuve est laissée au lecteur en guise d'exercice.

PROPOSITION **3.53** *Soit M une variété algébrique affine. Alors M possède un ouvert dense qui est une variété affine normale.*

PREUVE On peut supposer que M est irréductible, car sinon on écrit $M = \bigcup_i M_i$ en réunion de composantes irréductibles et soit alors $O = \bigcup_i M_i' \cap M_i''$ où M_i' est l'ensmble des points de M_i qui ne sont dans aucune autre composante et M_i'' un ouvert dense normal de M_i. Alors, O est un ouvert dense de M et tous ses points sont normaux. Chacun de ses ouverts affines denses est un ouvert affine dense normal de M.

Il est clair qu'une variété algébrique affine irréductible est birationnellement équivalente à sa normalisée. Donc elles ont deux ouverts affines isomorphes et il est clair qu'un point est normal dans une variété s'il l'est dans un de ses ouverts. Cet ouvert affine est dense dans M et normal. $\square$

4 Tores, réseaux, cônes convexes

Les tores que nous considérons ici sont les tores de la géométrie algébrique. Il ne faut pas les confondre avec les tores de la géométrie différentielle qui sont les produits de cercles, et en particulier sont compacts.

4.1 Réseaux

Définition **4.1** *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On appellera réseau de V un sous-groupe de V engendré par une base. La dimension de V s'appellera le rang du réseau considéré.*

Remarque **4.1** *Un réseau de rang n est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$; ainsi, le rang d'un réseau est bien défini.*

Proposition **4.2** *Soit N un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. Alors l'application $a \to a \otimes 1$ de N dans $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ identifie N à un réseau de $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.*

Remarque **4.3** *Soit N un réseau d'un espace vectoriel V, N' un réseau d'un espace vectoriel V' et $\phi : N \mapsto N'$ un morphisme de groupes. Alors, ϕ se prolonge de façon unique en une application linéaire de V dans V'. Cette application sera notée $\phi_{\mathbb{R}}$.*

En effet, si $v_1, ..., v_n$ est une base de V qui engendre N en tant que groupe, il existe une unique application linéaire de V dans V' qui prend les mêmes valeurs que ϕ en les v_i. La restriction à N de cette application est clairement ϕ, d'où l'existence et l'unicité de $\phi_{\mathbb{R}}$.

Proposition **4.4** *Un sous-groupe d'une espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{R}$ est un réseau de V si et seulement si il est discret et engendre V en tant qu'espace vectoriel.*

Preuve Un réseau d'un espace vectoriel l'engendre linéairement car il en contient une base. De plus, si N est un réseau de V engendré par la base $(v_1, ..., v_n)$, alors l'application $(x_1, ..., x_n) \to \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur V qui envoie $\mathbb{Z}^n$ sur N. Comme $\mathbb{Z}^n$ est discret, N est discret.

Pour la réciproque, soit N un sous-groupe discret d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie V, qui engendre $\mathbb{R}$ en tant qu'espace vectoriel. Alors, il est clair que N contient un système générateur de V et donc contient un réseau N' de V. On peut toujours supposer que $V = \mathbb{R}^n$ et $N' = \mathbb{Z}^n$.

Si N/N' était infini, on pourrait trouver une suite d'éléments distincts de $[0;1[^n \cap N$ (en effet, toute classe de N/N' possède un unique représentant dans $[0;1[^n)$. Cette suite possèderait une sous-suite qui convergerait dans $[0;1]^n$ et la suite des différences de deux termes consécutifs de cette sous-suite convergerait vers 0 dans N sans stationner, contredisant la discrétude de N.

Cela prouve que N/N' est fini et donc N est de type fini. D'après le théorème de la base adaptée, N est isomorphe à $\mathbb{Z}^k$, avec $k = n$ car N a même rang que N'. Il existent donc n éléments qui engendrent N en tant que groupe et ces n éléments engendrent donc V en tant qu'espace vectoriel. Ils forment donc une base de V et N est bien un réseau de V. $\square$

Corollaire **4.5** *Un sous-groupe discret d'un espace vectoriel réel de dimension finie, et en particulier n'importe quel sous-groupe d'un réseau, est un réseau du sous-espace vectoriel qu'il engendre.*

Corollaire **4.6** *Un sous-groupe d'indice fini d'un réseau d'un espace vectoriel est aussi un réseau de cet espace vectoriel. Aussi, un sous-groupe d'un espace vectoriel contenant un réseau de cet espace comme sous-groupe d'indice fini est aussi un réseau de l'espace considéré. En particulier, à chaque fois, les deux réseaux ont même rang.*

Rappelons que le dual d'un espace vectoriel V est l'ensemble des applications linéaires de V dans $\mathbb{R}$, noté V^*.

Définition **4.2** *Soit N un réseau d'un espace vectoriel V. On appelle dual de N l'ensemble $N^\vee$ des formes linéaires sur V prenant des valeurs entières en tout point de N.*

Exemple **4.1.1** *Si on prend le réséau $N = \mathbb{Z}^n$ de $V = \mathbb{R}^n$, alors $N^\vee$ est l'ensemble des formes linéaires du type $(x_1, ..., x_n) \to a_1x_1 + ... + a_nx_n$ où les a_i sont des entiers. On constate qu'il s'agit du sous-groupe de $(\mathbb{R}^n)^*$ engendré par les fonctions coordonnées.*

Proposition **4.7** *Soit N un réseau d'un espace vectoriel V. Alors $N^\vee$ est un réseau de V^*.*

D'autre part, le dual de $N^\vee$ est N (rappelons que le dual de V^* s'identifie canoniquement à V).

Preuve Soit B une base de V qui engendre N. Appelons alors B^* la base duale de la base B. Alors il est clair que $N^\vee$ est le sous-groupe de v^* engendré par B^*. $\square$

Définition **4.3** *Soit N un réseau. On appelle tore associé à N le groupe, noté T_N des homomorphismes de $N^\vee$ dans $\mathbb{C}^*$.*

PROPOSITION **4.8** *Soit N un réseau de rang n. Alors T_N est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^n$.*

PREUVE On sait que $N^\vee$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. Ainsi, T_N est isomorphe à $Hom(\mathbb{Z}^n, \mathbb{C}^*)$, soit $(Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*))^n$ ou encore $(\mathbb{C}^*)^n$. □

4.2 Cônes

DÉFINITION **4.4** *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appellera cône polyhedral convexe un sous-ensemble σ de V de la forme $\{\sum \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{R}_+\}$ où les $v_i, 1 \leq i \leq r$ sont des vecteurs de V. On dira que les v_i forment un système (fini) de générateurs de σ.*

Un cône polyhedral convexe sera dit fortement convexe s'il ne contient aucune droite de V.

EXEMPLE **4.2.1** *Une demi-droite issue de l'origine est un cône polyhedral convexe, engendrée par n'importe lequel de ses éléments non nuls.*

EXEMPLE **4.2.2** *Tout sous-espace vectoriel de V est un cône polyhedral convexe, engendré par exemple par les éléments d'une de ses bases et leurs oppposés.*

EXEMPLE **4.2.3** *Soient σ un cône polyhedral convexe dans un espace vectoriel V et σ' un cône polyhedral convexe dans un espace vectoriel V'. Alors, $\sigma \times \sigma'$ est un cône polyhedral convexe dans l'espace vectoriel $V \times V'$ (si σ est engendré par $v_1, ..., v_k$ et V' par $v'_1, ..., v'_l$, alors $\sigma \times \sigma'$ est engendré par la réunion des $(v_i, 0)$ et des $(0, v'_j)$).*

EXEMPLE **4.2.4** *La somme de deux cônes polyhedraux convexes (d'un même espace) est un cône polyhedral convexe, engendrée par la réunion des deux systèmes générateurs.*

EXEMPLE **4.2.5** *L'image d'un cône polyhedral convexe par une application linéaire est un cône polyhedral convexe de l'espace image, engendré par l'ensemble des images d'un de ses systèmes générateurs.*

REMARQUE **4.9** *Un cône polyhedral convexe est convexe.*

REMARQUE **4.10** *Une forme linéaire sur V est positive sur σ (i.e. ne prend que des valeurs positives aux points de σ) si et seulement si elle est positive en les v_i.*

DÉFINITION **4.5** *Soit σ un cône polyhedral convexe d'un espace vectoriel V. On appelle dimension de σ la dimension du sous-espace vectoriel de V engendré par σ.*

Remarque **4.11** *Le sous-espace vectoriel de V engendré par σ est exactement l'ensemble des éléments de V qui s'écrivent comme différence de deux éléments de σ.*

Mieux, si on prend un système générateur $(v_1, ..., v_k)$ de σ et si on pose $v = -\sum_i v_i$, alors le cône polyhedral convexe engendré par $(v_1, ..., v_k, v)$ est l'espace vectoriel engendré par $(v_1, ..., v_k)$.

Définition **4.6** *Soit σ un cône polyhedral convexe d'un espace vectoriel V. On appellera dual de σ, qu'on notera $\sigma^\vee$ l'ensemble des formes linéaires sur V qui sont positives sur σ.*

Remarque **4.12** *Un cône polyhedral convexe de V est fortement convexe si et seulement si son dual engendre tout V^*. Réciproquement, un cône polyhedral convexe de V engendre V si et seulement si son dual est fortement convexe.*

Le théorème suivant est fondamental en théorie de la convexité :

Théorème **4.13** *Soit σ un cône polyhedral convexe d'un espace vectoriel V et soit x un point de $V \backslash \sigma$. Alors il existe une forme linéaire $l \in V^*$ telle que $l(x) < 0$ et l positive sur σ.*

Démonstration Il s'agit essentiellement de séparer deux convexes par un hyperplan. Nous allons obtenir le résultat comme conséquence de Hahn-Banach. Nous utiliserons pour cela le lemme suivant :

Lemme **4.1** *Soit σ un cône polyhedral fortement convexe d'un espace vectoriel V. Alors il existe une forme linéaire sur V qui est strictement positive en tout point non nul de σ.*

Preuve On peut supposer que σ engendre V, quitte à prolonger à tout l'espace une forme linéaire. On raisonne alors par récurrence sur la dimension du cône.

Si σ est de dimension 0, il n'y a rien à montrer. Si σ est de dimension 1, c'est une demi-droite et toute forme linéaire strictement positive en un point de σ convient, et on sait que cela existe.

On suppose que σ est de dimension ≥ 2. Alors, il existe une droite D de V telle que la projection de σ sur V/D soit encore un cône polyhedral fortement convexe. En effet, soit x un élément de V tel que ni x ni $-x$ ne soient dans σ, et D la droite engendrée par x. Alors, il est clair que la projection $\pi(\sigma)$ de σ sur V/D est un cône polyhedral convexe (si on prend un système fini de générateurs pour σ, leur projections forment un système de générateurs de $\pi(\sigma)$). De plus, $\pi(\sigma)$ est fortement convexe car sinon on aurait deux éléments non nuls et oppposés v' et $-v'$ dans $\pi(\sigma)$ et si v est un élément de σ qui se projette sur v', on a dans σ deux éléments de la forme $v + \lambda x$ et $-v + \mu x$. Leur somme $(\lambda + \mu)x$ doit donc être dans σ ce qui n'est possible que s'il sont oppposés. Mais il y aurait alors deux éléments non nuls et oppposés dans σ ce qui est contradictoire. Ainsi, $\pi(\sigma)$ est fortement convexe et, par hypothèse de récurrence, il exite une forme linéaire strictement positive sur $\pi(\sigma)\backslash\{0\}$. Sa composée avec la projection donne une forme linéaire strictement positive sur $\sigma\backslash\{0\}$. $\square$

Déduisons-en maintenant le théorème. On suppose d'abord que σ est fortement convexe. Soit alors l une forme linéaire strictement positive sur $\sigma\backslash\{0\}$. On regarde son signe sur x :

i) Si $l(x) < 0$, la forme l convient ;
ii) Si $l(x) = 0$, alors on prend l' une forme linéaire strictement négative en x. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, $l + \epsilon l'$ est encore strictement positive sur $\sigma\backslash\{0\}$, et est négative en x, donc convient ;
iii) On suppose $l(x) > 0$. Dans ce cas, l'hyperplan affine H de V d'équation $l(.) = l(x)$ contient comme convexes compacts disjoints le singleton $\{x\}$ et $H \cap \sigma$. Le théorème de Hahn-Banach affirme alors qu'il existe un hyperplan affine H' de H qui sépare ces deux convexes. On obtient ainsi une application affine l' sur H telle que $l'(x) < 0$ et l' strictement positive sur $H \cap \sigma$. La forme linéaire l_0 qui prolonge l' à V vérifie bien les conditions du théorème.

On ne suppose plus maintenant σ fortement convexe. Soit E le plus grand sous-espace vectoriel de V inclus dans σ. On considère la projection π de V sur V/E. L'image de σ est alors un cône polyhedral fortement convexe et il existe alors une forme linéaire l' sur V/E qui est strictement positive sur $\pi(\sigma)\backslash\{0\}$ et strictement négative en $\pi(x)$. On peut alors poser $l = l' \circ \pi$ qui convient pour le théorème. $\square$

Nous verrons que ce théorème a d'importantes conséquences sur la géométrie des cônes convexes.

Remarque **4.14** *Si v_k est combinaison linéaire à coefficients positifs des $v_i, i \neq k$, alors il peut être retiré de l'ensemble des v_i sans que le cône polyhedral convexe engendré soit modifié. On évitera donc ce cas.*

Si v_k est combinaison linéaire à coefficients négatifs des $v_i, i \neq k$, alors le cône polyhedral convexe engendré par les v_i n'est pas fortement convexe car il contient $\mathbb{R}.v_k$.

Définition **4.7** *On dit qu'un hyperplan de V est un hyperplan d'appui pour un cône polyhedral convexe ou que le cône est d'un seul côté de l'hyperplan s'il existe une forme linéaire dont l'hyperplan est le noyau et qui conserve un signe constant sur le cône.*

Définition **4.8** *On appelle face d'un cône polyhedral convexe l'ensemble des points d'annulation d'une forme linéaire positive sur le cône, et on dira qu'une telle forme* *linéaire définit la face en question. Une face d'un cône sera dite propre si ce n'est pas le cône tout entier, et c'est alors l'intersection du cône avec un hyperplan d'appui qui ne contient pas tout le cône.*

PROPOSITION **4.15** *Toute face d'un cône polyhedral convexe est un cône polyhedral convexe, fortement convexe si le cône l'est.*

Un cône polyhedral convexe n'a qu'un nombre fini de faces.

Toute intersection de faces d'un cône est aussi une face de ce cône.

Toute face d'une face d'un cône polyhedral convexe est elle-même une face de ce cône.

PREUVE Soit σ un cône polyhedral convexe et l une forme linéaire positive sur σ. Soit $v_i, 1 \leq i \leq k$ un systme de générateurs fini de σ. Alors, pour $x = \sum_i \lambda_i v_i$ avec λ_i positifs, on a $l(x) = \sum_i \lambda_i l(v_i)$ et ceci est nul si et seulement si $\lambda_i = 0$ pour tous les i tels que $l(v_i) \neq 0$. Ainsi, l'ensemble des x de σ pour lesquels $l(x) = 0$ est exactement l'ensemble des $\sum_{\{i_0 \text{ tq } l(v_{i_0})=0\}} \lambda_{i_0} v_{i_0}$, avec les λ_{i_0} positifs. C'est donc exactement le cône polyhedral convexe engendré par les v_{i_0} pour lesquels $l(v_{i_0}) = 0$.

Le fait qu'une face d'un cône fortement convexe soit fortement convexe est évident.

Le fait qu'un cône polyhedral convexe n'a qu'un nombre fini de faces résulte du fait qu'une face est le cône engendré par une partie d'un système fini de générateurs quelconque du cône de départ.

Montrons que toute intersection de faces d'un cône est aussi une face de ce cône. Soit σ un cône, et $f_1, ..., f_k$ des faces de σ. Alors prenons $l_1, ..., l_n$ des formes linéaires positives sur σ et qui définissent les f_i. Alors, un point de σ est sur l'intersection des f_i et c'est équivalent à ce que toutes les l_i s'y annulent. Comme elles sont toutes positives en ce point, cela équivaut à ce que leur somme s'y annule, et comme leur somme est positive sur σ, l'intersection des f_i est la face de σ définie par la somme des l_i.

Montrons maintenant qu'une face d'une face d'un cône polyhedral convexe est aussi une face de ce cône. Soit σ un cône convexe, τ une face de σ définie par la forme linéaire l et γ une face de τ définie par la forme linéaire l'. On veut prouver que γ est bien une face de σ. On cherche donc une forme linéaire sur V qui soit positive sur σ et nulle sur γ. Prenons un système fini de générateurs de σ, noté $v_1, ..., v_k$ et supposons que $v_1, ..., v_r$ soit un système fini de générateurs de τ. Alors, l est nulle en $v_1, ..., v_r$ et strictement positive en $v_{r+1}, ..., v_k$. La forme linéaire l' est positive en $v_1, ..., v_r$. Ainsi, pour tout α dans $\mathbb{R}_+$, $l' + \alpha l$ est positive en $v_1, ..., v_r$ et, si α est assez grand, elle est strictement positive en $v_{r+1}, ..., v_k$. Pour un tel α, la forme $l' + \alpha l$ est positive sur σ et ne peut s'annuler en un point x de σ que si x est dans le cône engendré par $v_1, ..., v_r$, soit τ. Or, sur τ, elle coïncide avec l', donc s'annule exactement sur γ. Ainsi, la forme $l' + \alpha l$ définit la face γ de σ. $\square$

Définition 4.9 *Si σ est un cône polyhedral convexe de dimension n, on appelle facette de σ une face de σ de dimension $n-1$.*

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.2 *Soit l une forme linéaire sur V définissant une face propre τ d'un cône polyhedral convexe σ, et soit x un point de V tel que $l(x) \neq 0$. Alors il existe une forme linéaire l' qui définit une facette de σ contenant τ et telle que $l'(x) = l(x)$.*

Preuve Si τ est déjà une facette, alors il suffit de prendre $l' = l$. Si τ est de codimension au moins 2, on va trouver une face τ' de σ contenant τ strictement et qui sera définie par une forme linéaire prenant la même valeur en x que l. Une face τ'' de dimension maximale avec cette propriété sera donc soit une facette de σ auquel cas la conclusion du lemme sera vérifiée, soit σ lui-même.

Or, si x est dans l'espace engendré par V, comme $l(x) \neq 0$, τ'' est forcément une facette de σ. Si x n'y est pas, on peut prendre pour l' une forme linéaire de la forme $l_0 + \alpha h$ où l_0 définit une facette de σ (une telle forme existe car on peut appliquer le processus à partir d'un élément x' de $\sigma \backslash \tau$), h une forme linéaire qui s'annule sur σ mais pas en x (une telle forme existe car x n'est pas dans l'espace engendré par σ) et α un réel bien choisi pour que l' ait la bonne valeur en x (remarquons que l' définit la même face que l_0, donc définit bien une facette de σ).

Il suffit donc bien de démontrer la propriété annoncée au début de la preuve.

Appelons T l'espace engendré par τ et x. Comme τ est de codimension au moins 2, T ne peut contenir tout l'espace engendré par σ et on peut trouver une forme linéaire h non nulle sur σ mais nulle sur T. Pour α dans $\mathbb{R}$, posons $l_\alpha = l + \alpha h$. Alors, quel que soit α, l_α est nulle sur τ et $l_\alpha(x) = l(x)$. L'ensemble I des valeurs de α pour lesquelles l_α est positive sur σ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Comme h n'est pas nulle sur σ, I ne peut être égal à $\mathbb{R}$. Soit α_0 une extrémité de I, alors il existe un générateur v_i de σ qui n'est pas dans τ et tel que $l_{\alpha_0}(v_i) = 0$. Alors, la face τ' de σ définie par l_{α_0} contient τ strictement et $l_{\alpha_0}(x) = l(x)$.

Cela termine la preuve du lemme. $\square$

Comme corollaire de ce lemme, nous avons déjà le fait suivant :

Corollaire 4.16 *Toute face propre de σ est l'intersection des facettes qui la contiennent.*

Preuve Soit τ une face d'un cône polyhedral convexe σ et x un point de V hors de τ. Alors, il existe une forme linéaire l qui définit τ. Si $l(x) = 0$, alors x n'est pas dans σ et, d'après le lemme précédent, il existe une facette de σ contenant τ, et donc pas x. Supposons donc $l(x) \neq 0$. Soit alors τ' une facette de σ contenant τ et définie par une forme linéaire sur V ayant la même valeur que l en x (qui existe d'après le lemme), alors clairement $x \notin \tau'$. $\square$

Voici un autre important corollaire de ce même lemme :

PROPOSITION **4.17** *On suppose que σ engendre V et on considère des formes linéaires l_i définissant les facettes F_i de σ. Alors,*

$$\sigma = \bigcap_i l_i^{-1}(\mathbb{R}_+)$$

En particulier, σ est une intersection finie de demi-espaces.

PREUVE Soit en effet x un point hors de σ. D'après le théorème 4.13 il existe une forme linéaire positive sur V et strictement négative en x. D'après le lemme, on peut en outre supposer que cette forme linéaire l définit une facette τ de σ. Comme de plus σ engendre V, τ engendre un hyperplan de V et toute forme linéaire l' définissant τ' s'annule sur V et est donc de la forme $\alpha l, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$. En particulier, on ne peut pas avoir $l'(x) \in \mathbb{R}_+$. Cela prouve que x ne peut être dans l'intersection considérée. $\square$

COROLLAIRE **4.18** *Le dual d'un cône polyhedral convexe est aussi un cône polyhedral convexe. De plus, le dual du dual d'une cône polyhedral convexe est égal au cône de départ.*

En fait, si σ engendre V, $\sigma^\vee$ est exactement le cône engendré par les l_i. Dans le cas général, c'est la somme de ce cône avec l'orthogonal de V, qui est aussi un cône polyhedral convexe. de plus, il est clair que $(\sigma^\vee)^\vee$ contient σ. Si de plus $x \notin \sigma$, il existe, d'après le théorème 4.13, un élément l de $\sigma^\vee$ tel que $l(x) < 0$. Donc $x \notin (\sigma^\vee)^\vee$.

COROLLAIRE **4.19** *L'intersection de deux cônes polyhedraux convexes est un cône polyhedral convexe.*

En effet, son dual est la somme des duaux des deux autres cônes.

PROPOSITION **4.20** *Soit σ un cône polyhedral fortement convexe. Alors tout système fini de générateurs contient un élément non nul de chaque face de dimension 1 et toute famille d'éléments non nuls de chaque face de dimension 1 de σ est un système fini de générateurs de σ.*

PREUVE Soit τ une face de dimension 1 de σ (qui est donc une demi-droite), v un élément non nul de τ et $(v_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille finie d'éléments de σ dont aucun n'appartient à τ. Si on avait $v = \sum_{1\leq i\leq k} \lambda_i v_i$ avec tous les λ_i positifs, on en aurait au moins un λ_{i_0} de strictement positif, car v non nul. Or, d'après la proposition 4.17, on peut trouver une facette de σ contenant τ (donc v) mais pas v_{i_0} ainsi qu'une forme linéaire l définissant cette facette. On a alors à la fois $l(v) = 0$ et $l(v) = \sum_{1\leq i\leq k} \lambda_i v_i \geq \lambda_{i_0} l(v_{i_0}) > 0$. Contradiction. Donc $(v_i)_{1\leq i\leq k}$ ne peut être un système générateur de σ.

Montrons maintenant que toute famille de vecteurs contenant un élément de chaque face de dimension 1 de σ engendre σ. Soit (v_i) une telle famille. On va montrer par récurrence sur n la propriété suivante : Tout élément d'une face de dimension n de σ est dans le cône engendré par la famille (v_i).

Pour $n = 1$ la propriété est évidente car tout élément d'une face de dimension 1 de σ est multiple positif d'un des v_i.

Supposons maintenant qu'on ait un élément x appartenant à une face τ de dimension $n \geq 2$ de σ. Soit v_{i_0} un élément de la famille considérée situé sur une face de dimension 1 de τ. Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $x_\alpha = x - \alpha v_{i_0}$ soit situé sur une face propre de τ (en effet, les facettes de τ sont définies par des formes linéaires sur l'espace engendré par τ. Comme ces formes linéaires ne peuvent toutes s'annuler en v_{i_0}, l'une au moins sera strictement négative en x_α pour α assez grand. Et pour α_0 le α minimal réalisant cela, x_{α_0} sera sur la face propre de τ définie par cette forme linéaire qui s'annule. Alors par hypothèse de récurrence, x' est dans le cône engendré par les v_i et donc $x = x' + \alpha v_{i_0}$ y est aussi. Ceci termine la récurrence qui prouve la proposition. □

Terminons ce paragraphe par deux propositions :

PROPOSITION **4.21** *Soit τ une face de codimension 2 d'un cône polyhedral convexe σ. Alors τ est contenue dans exactement deux facettes de σ.*

PREUVE Déja, τ est contenue dans au moins deux facettes car ce n'est pas elle-même une facette. Montrons qu'on ne peut pas avoir trois facettes distinctes $F_i, i = 1, 2, 3$ de σ contenant toutes τ. On peut déjà toujours supposer que σ engendre V. Soient alors $l_i, i = 1, 2, 3$ des formes linéaires définissant les F_i. L'espace engendré par τ, qui est de codimension 2 dans V et donc son orthogonal dans V^* est de dimension 2 et contient les trois l_i. On a donc une relation de dépendance linéaire entre les l_i, soit $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3 = 0$. Si l'un des λ_i s'annulait, deux des l_i seraient proportionneles, ce qui contredit le fait qu'elles définissent deux facettes distinctes. Si les λ_i étaient toutes de même signe, $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3$ ne pourrait s'annuler sur V. L'un des λ_i (on peut toujours supposer $i = 1$) est de signe opposé aux deux autres et on peut donc écrire $\lambda_1 = \alpha\lambda_2 + \beta\lambda_3$, avec α et β strictement positifs. Alors, la face définie par λ_1 est incluse dans celle définie par λ_2 et aussi dans celle définie par λ_3. Les F_i ne peuvent donc pas être trois facettes distinctes. □

Proposition **4.22** *La frontière topologique d'un cône polyhedral convexe σ qui engendre V est la réunion de ses facettes propres.*

Preuve Soit x un point d'une facette F de σ définie par une forme linéaire l. Alors, soit $y \in V$ tel que $l(y) < 0$. Alors, la suite $(x + \frac{y}{n})$ est une suite qui converge ver x d'éléments hors de σ, car ayant une image < 0 par l. Le point x appartient donc à la frontière de σ.

Réciproquement, soit x un point qui n'est sur aucune facette de V. Soient l_i les facettes de σ et pour chaque i, l_i une forme linéaire qui définit l_i. Alors, d'après la proposition 4.17, $x \in \bigcap_i l_i^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ qui est un ouvert inclus dans σ. Donc x est dans l'intérieur de σ. □

4.3 Cônes rationnels

On se donne maintenant un réseau N de V et un cône polyhedral convexe σ de V.

Définition **4.10** *Le cône σ est dit rationnel par rapport à N si on peut choisir un système fini de générateurs de σ dans N.*

Remarque **4.23** *Dans le cas où $V = \mathbb{R}^n$ et $N = \mathbb{Z}^n$, cela équivaut à ce qu'on puisse prendre les vecteurs v_i à coordonnées dans $\mathbb{Q}$.*

Remarque **4.24** *Dans le cas où σ est un sous-espace vectoriel de V, cela équivaut à ce que $\sigma \cap N$ soit un réseau de σ.*

D'autre part, si E est un sous-espace rationnel de V, alors E possède un supplémentaire rationnel E' tel qu'on ait en plus $(E \cap N) \oplus (E' \cap N) = N$. En fait, le quotient $N/E \cap N$ est sans torsion car un élément dont un multiple non nul est dans E y est lui-même. Donc ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}^k$ et si on prend k éléments $v_1, ..., v_k$ de N donc les projections sur $N/E \cap N$ en forment une base, il est clair que l'espace E' qu'ils engendrent est rationnel, que c'est un supplémentaire de E et que $(E \cap N) \oplus (E' \cap N) = N$.

Attention toutefois que si E et E' sont deux supplémentaires rationnels quelconques, alors on n'a pas forcément $(E \cap N) \oplus (E' \cap N) = N$ (par exemple les droites de $\mathbb{R}^2$ engendrées par $(1, 0)$ et $(1, 2)$).

Proposition **4.25** *Soient σ et σ' deux cônes polyhedraux convexes d'un espace vectoriel V rationnels par rapport à un réseau N. Alors :*

i) Toute face de σ est un cône polyhedral convexe rationnel par rapport à N et peut être définie par une forme linéaire appartenant à $N^\vee$ ($\cap \sigma^\vee$) ;

ii) La somme $\sigma + \sigma'$ est un cône polyhedral convexe rationnel par rapport à N ;
iii) $\sigma^\vee$ est un cône polyhedral convexe rationnel par rapport au dual de N ;
iv) L'intersection $\sigma \cap \sigma'$ est un cône polyhedral convexe rationnel par rapport à N.

PREUVE Pour le i), considérons un système fini v_i de générateurs de σ dans N. Alors toute face τ de σ possède un système fini de générateurs inclus dans celui-là, et a fortiori dans N, ce qui prouve qu'elle est rationnelle par rapport à N. Prenons une partie de ces vecteurs (on peut supposer que c'est $v_1, ..., v_k$) qui forment une base de l'espace vectoriel engendré par τ et complétons-la par d'autres v_i, disons $v_{k+1}, ..., v_m$ en une base de l'espace engendré par σ que l'on complète encore par des éléments $w_1, ..., w_j$ de N en une base de V. Alors, la forme linéaire l qui vaut 0 sur $v_1, ..., v_k$ et 1 sur sur $v_{k+1}, ..., v_m, w_1, ..., w_j$ est positive sur σ et définit la face τ de σ. De plus, elle ne prend que des valeurs rationnelles sur les éléments de N et donc un de ses multiples $n \cdot l$, avec n entier > 0, se trouve dans $N^\vee$ et définit encore τ.

Pour le ii), nous savons que $\sigma + \sigma'$ est engendré par la réunion d'un système générateur de σ et d'un de σ'. Les deux peuvent être choisis dans N.

Montrons iii). Commençons par un cas particulier :
Cas particulier : σ engendre V. Dans ce cas, $\sigma^\vee$ est engendré par les formes linéaires définissant les facettes de σ, d'après la proposition 4.17. Reste à voir que chacune de celles-ci peut être prise dans $N^\vee$. Prenons une facette F de σ définie par une forme linéaire l. Alors, soit $(v_i)_i$ un système fini d'élements de N qui engendre σ et i_0 tel que $v_{i_0} \notin F$. Prenons $\alpha > 0$ tel que $\alpha l(v_{i_0}) \in \mathbb{Q}$. Alors, le sous-groupe N' de N engendré par v_{i_0} et les v_i qui sont dans F est un sous-groupe de N qui engendre V, et est donc d'indice fini dans N. Tout élément de N possède donc un multiple entier qui est dans N' et αl ne prend que des valeurs rationnelles sur les éléments de N', donc aussi sur les éléments de N. Un multiple entier strictement positif bien choisi de αl est donc dans $N^\vee$ (car il suffit de vérifier qu'il prend des valeurs entières sur un système générateur fini de N), et cette forme linéaire définit bien la facette F.

Cas général : Dans ce cas, on peut voir σ comme l'intersection de deux cônes polyhedraux convexes V_1 et V_2 rationnels par rapport à N et qui de plus engendrent V (par exemple pour V_1, on rajoute aux générateur de σ des éléments $w_1, ..., w_k$ de N qui complètent une base de l'espace engendré par σ en une base de V et pour V_2, on rajoute $-w_1, ..., -w_n$). Alors, $\sigma^\vee$ est la somme $V_1^\vee + V_2^\vee$, qui sont deux cônes polyhedraux convexes V_1 et V_2 rationnels par rapport à N, donc $V^\vee$ est aussi un cône polyhedral convexe rationnel par rapport à N d'après le ii).

Le iv) résulte de ii) et de iii) par dualité. $\square$

DÉFINITION **4.11** *On appelle quasi-réseau l'intersection d'un réseau et d'un cône polyhedral convexe rationnel par rapport à ce réseau.*

LEMME **4.3** *Tout quasi-réseau est un semi-groupe finiement engendré.*

PREUVE Soit σ un cône polyhedral convexe d'un espace vectoriel V, rationnel par rapport à un réseau N. Il est clair que $\sigma \cap N$ contient 0 et qu'il est stable par addition car σ et N le sont. Il reste à voir qu'il est finiement engendré.

Pour cela, supposons que les vecteurs v_i soient dans N et prenons un élément y de $\sigma \cap N$. Cet élément s'écrit

$$y = \sum_i \lambda_i v_i$$

avec $\lambda_i \geq 0$ quel que soit i. Posons $y' = \sum_i E(\lambda_i) v_i$. Alors $y - y'$ est dans N et aussi dans σ. Ainsi, $\sigma \cap N$ est engendré par $\{v_i\} \cup \{y'_y, y \in \sigma \cap N\}$. Or, cet ensemble est fini. En effet, il n'y a qu'un nombre fini de v_i et qu'un nombre fini de $y - y'$ car ce dernier ensemble est l'intersection de N qui est discret avec un compact. $\square$

REMARQUE **4.26** *Soit N un réseau et S un quasi-réseau de N. Alors, tout homomorphisme $\phi : N \mapsto \mathbb{C}^*$ induit un automorphisme de $\mathbb{C}[S]$ par $X^s \to \phi(s)X^s$. Cela induit même un morphisme de groupes de $Hom(N, \mathbb{C}^*)$ dans $Aut(\mathbb{C}[S])$.*

En particulier, le tore associé à un réseau agit naturellement sur $\mathbb{C}[S]$ pour tout quasi-réseau S de $N^\vee$.

5 Variétés toriques affines

Nous construisons ici, a partir de n'importe quel cône polyhedral fortement convexe rationnel, une variété algébrique affine normale, supportant une action d'un tore dont une orbite particulière sera un ouvert de Zariski de la variété.

5.1 Définition

Nous allons voir ici comment associer une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini à n'importe quel quasi-réseau rationnel, et nous étudierons ensuite son spectre maximal.

Définition **5.1** *On se donne un espace vectoriel réel V muni d'un réseau N et un cône polyhedral fortement convexe rationnel σ. On appelle S_σ l'intersection de $\sigma^\vee$ avec le dual $N^\vee$ de N.*

On remarque que S_σ est un quasi-réseau et a fortiori un semi-groupe. On considère alors l'anneau $\mathbb{C}[S_\sigma]$. Il est réduit (car c'est un sous-anneau de $\mathbb{C}[N^\vee]$) et de type fini sur $\mathbb{C}$ (car S_σ est engendré par un nombre fini d'éléments d'après le lemme 4.3).

Définition **5.2** *Le couple formé de l'anneau $\mathbb{C}[S_\sigma]$ et de son spectre maximal est une variété algébrique affine appelée variété torique affine associée au cône σ. On la notera U_σ.*

Exemple **5.1.1** *Commençons par le cône σ réduit à $\{0\}$. Il est clair que $S_\sigma = N' \simeq \mathbb{Z}^n$ est engendré par les éléments de la forme $(0, ..., 0, \pm 1, 0, ..., 0)$. Cela donne $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, ..., X_n, X_n^{-1}]$. Le spectre maximal de cet anneau se réduit au tore $(\mathbb{C}^*)^n$.*

Exemple **5.1.2** *Considérons maintenant le cône $\sigma = (\mathbb{R}_+)^n$. Il s'agit clairement d'un cône polyhedral convexe rationnel. Alors, $\sigma^\vee$ est l'ensemble des vecteurs qui ont toutes leurs coordonnées positives, et donc $\mathbb{C}[S_\sigma]$ est juste $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, ce qui donne $U_\sigma = \mathbb{C}^n$.*

Exemple **5.1.3** *Considérons maintenant le cône σ de $\mathbb{R}^2$ engendré par les éléments $(1, 0)$ et $(-1, 2)$. Son dual $\sigma^\vee$ verifie les équations $x \geq 0$ et $-x + 2y \geq 0$, soit $y \geq \frac{x}{2} \geq 0$. L'intersection S_σ de ce dernier cône avec $\mathbb{Z}^2$ est engendrée par les vecteurs $(0, 1)$, $(2, 1)$ et $(1, 1)$ et donc $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[Y, X^2Y, XY]$, que l'on peut voir aussi comme $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]/(X_3^2 - X_1X_2)$. La variété torique affine U_σ associée est donc la surface d'équation $z_3^2 = z_1z_2$ dans $\mathbb{C}^3$, qui est en fait un cône sur une conique. On peut vérifier que l'origine est un point singulier de cette variété. L'idéal maximal de $\mathbb{C}[Y, X^2Y, XY]$ associé à l'origine est engendré par Y, XY et X^2Y. Son carré est* *engendré par les multiples de Y^2 qu'il contient. Donc, l'espace cotangent en l'origine est $\mathbb{C}.Y \oplus \mathbb{C}.XY \oplus \mathbb{C}.X^2Y$, qui est donc de dimension 3 et l'origine est effectivement un point singulier.*

EXEMPLE **5.1.4** *Considérons maintenant le cône σ de $\mathbb{R}^3$ engendré par les éléments $(1, \pm 1, \pm 1)$. Le cône dual est de la forme $x \pm y \pm z \geq 0$, soit $x \geq |y| + |z|$, dont l'intersection avec $\mathbb{Z}^3$ est engendré par les vecteurs $(1,1,0)$, $(1,-1,0)$,$(1,0,1)$, $(1,0,-1)$ et $(1,0,0)$. On obtient donc $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X, XY, XY^{-1}, XZ, XZ^{-1}]$, que l'on peut voir aussi comme $\mathbb{C}[X_1, ..., X_5]/(X_1^2 - X_2X_3, X_1^2 - X_4X_5)$ et la variété associée est donc la 3-variété d'équation $z_1^2 = z_2z_3 = z_4z_5$ dans $\mathbb{C}^5$. Ici, l'espace cotangent en l'origine est de dimension 5 et l'origine est un point singulier de U_σ.*

EXEMPLE **5.1.5** *Produit de variétés toriques affines :*

Soient σ et σ' deux cônes polyhedraux convexes rationnels par rapport à deux réseau N et N' de deux espaces vectoriels V et V'. Alors, le produit $N \times N'$ est un réseau de $V \times V'$ et $\sigma \times \sigma'$ est un cône polyhedral convexe rationnel par rapport à $N \times N'$. De plus, la variété torique associée à ce cône s'identifie naturellement avec le produit de celles associées à σ et σ'.

En effet, si N est engendré par la base $v_1, ..., v_k$ de V et N' par la base $v'_1, ..., v'_{k'}$ de V', alors $N \times N'$ est engendré par la base $(v_1, 0), ..., (v_k, 0), (0, v'_1), ..., (0, v'_{k'})$ de $V \times V'$, et en est donc un réseau. D'autre part, si les $w_1, ..., w_j$ sont des éléments de N qui engendrent V et $w'_1, ..., w'_{j'}$ des éléments de N' qui engendrent V', alors $(w_1, 0), ..., (w_j, 0), (0, w'_1), ..., (0, w'_{j'})$ engendrent $\sigma \times \sigma'$. On a aussi $S_{\sigma\times\sigma'} = S_\sigma \times S_{\sigma'}$ et, d'après la proposition 2.9, $\mathbb{C}[S_{\sigma\times\sigma'} = \mathbb{C}[S_\sigma] \otimes \mathbb{C}[S_{\sigma'}]$. La variété $U_{\sigma\times\sigma'}$ s'identifie donc à $U_\sigma \times U_{\sigma'}$.

Donnons quelques propriétés des variétés toriques affines :

REMARQUE **5.1** *Une variété torique affine est irréductible.*

En effet, l'algèbre associée est une sous-algèbre de $\mathbb{C}[N^\vee]$ qui est isomorphe à $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$. Or, $\mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ est un localisé de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, donc est intègre.

REMARQUE **5.2** *Deux variétés toriques affines de même dimension sont birationnellment équivalentes.*

En effet, le corps des fractions d'une variété torique de dimension n est isomorphe à $\mathbb{C}(X_1, ..., X_n)$. Pour le voir, il suffit de constater que l'anneau des fonctions régulières sur une telle variété est inclus dans $\mathbb{C}[N^\vee]$, donc son corps des fractions est inclus dans celui de $\mathbb{C}[N^\vee]$, et que son corps des fractions contient $\mathbb{C}[N^\vee]$ car si $\alpha \in N^\vee$, on peut l'écrire comme différence de deux éléments de S_σ, donc contient aussi le corps des fractions de $\mathbb{C}[N^\vee]$, et est donc égal, et ainsi isomorphe à $\mathbb{C}(X_1, ..., X_n)$.

PROPOSITION **5.3** *Une variété torique affine est normale.*

PREUVE Nous devons montrer que l'anneau $\mathbb{C}[S_\sigma]$ est intégralemnt clos. C'est clair si σ est réduit à $\{0\}$ et on va donc supposer que ce n'est pas le cas. On sait déjà que S_σ engendre $N^\vee$ en tant que groupe, et donc le corps des fractions de S_σ est égal à celui de $\mathbb{C}[N^\vee]$. Dire qu'un élément de $N^\vee$ est dans S_σ revient à dire qu'il prend des valeurs positives en chaque face de dimension 1 de σ. Donc, si $v_1, ..., v_n$ forme un système générateur de Σ, on a que $\mathbb{C}[S_\sigma]$ est l'intersection des $\mathbb{C}[(v_i)^\vee]$. Or, quel que soit v_i non nul, $\mathbb{C}[(v_i)^\vee]$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X, X_1, X_1^{-1}, ..., X_n, X_n^{-1}]$. Un tel anneau est intégralement clos et donc $\mathbb{C}[S_\sigma]$ l'est aussi par intersection. $\square$

PROPOSITION **5.4** *La variété affine U_σ s'identifie canoniquement avec l'ensemble des morphismes de semi-groupes de S_σ dans $(\mathbb{C}, \times)$, autrement dit les applications f de S_σ dans $\mathbb{C}$ telles que $f(0) = 1$ et pour tous s_1 et s_2 de S_σ, $f(s_1 + s_2) = f(s_1)f(s_2)$.*

PREUVE On sait que U_σ s'identifie aux morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathbb{C}[S_\sigma]$ dans $\mathbb{C}$, qui sont les morphismes d'anneaux qui prolongent l'identité de $\mathbb{C}$. D'autre part, d'après la proposition 2.10, les morphismes d'anneaux prolongeant l'identité de $\mathbb{C}$ s'identifient aux morphismes de semi-groupes de S_σ dans $(\mathbb{C}, \times)$. $\square$

PROPOSITION **5.5** *Soit τ une face de σ. Alors la variété torique affine U_τ s'identifie canoniquement à un ouvert principal de la variété torique affine U_σ.*

PREUVE Soit τ une face de σ. Alors S_σ est inclus dans S_τ. Prenons un système générateur fini $v_1, ..., v_k$ de S_σ et posons $v = \sum_{v_i \perp \tau} v_i$. Alors, le semi-groupe engendré par S_σ et $-v$ est S_τ. Ainsi, $\mathbb{C}[S_\tau] \simeq \mathbb{C}[S_\sigma]_{[\frac{1}{X^v}]}$. Cela prouve que U_τ s'identifie à un ouvert principal de U_σ. $\square$

COROLLAIRE **5.6** *Toute variété torique affine contient un ouvert qui est un tore.*

PREUVE Clairement, le cône réduit à $\{0\}$ est une face de n'importe quel cône. Il suffit alors d'appliquer la proposition. $\square$

5.2 L'action du tore sur une variété torique affine

PROPOSITION **5.7** *Toute variété torique affine supporte une action naturelle du tore associé au réseau qui le définit, que l'on peut aussi identifier à sa sous-variété affine ouverte, où cette action s'identifie à l'action naturelle par translations. De plus, cette action est algébrique au sens où l'application définissant l'action est un morphisme de variétés algébriques affines. On appellera cette action une action torique.*

Preuve D'après la remarque 4.26, le tore T_N agit par automorphismes sur l'anneau $\mathbb{C}[S_\sigma]$, et cela induit une action par automorphismes de U_σ. En fait, si on a identifié les points de U_σ aux morphismes de semi-groupes de S_σ dans $\mathbb{C}$, l'action de T_N sur U_σ peut être vue simplement comme le produit des fonctions, soit si $t \in T_N$, $x \in U_\sigma$, $s \in S_\sigma$, on a $(t.x)(s) = t(s)x(s)$

Pour montrer qu'une telle action est algébrique, on montre qu'elle provient d'un morphisme de $\mathbb{C}[S_\sigma]$ dans $\mathbb{C}[N^\vee] \otimes \mathbb{C}[S_\sigma]$, précisément le morphisme f^* qui, pour α dans S_σ, envoie X^α sur $X^\alpha \otimes X^\alpha$. Vérifons que l'application f dont f^* est le comorphisme est bien l'application donnant l'action. Soit $(t,u) \in T_N \times U_\sigma$. Alors, on a pour tout α dans S_σ, $f^* X^\alpha(t,u) = X^\alpha(t) \cdot X^\alpha(u) = t(\alpha) \cdot u(\alpha)$ (on voit ici t et u comme des applications de S_σ dans $\mathbb{C}$) $= (t.u)(\alpha) = X^\alpha(t.u)$ qui doit aussi valoir $X^\alpha(f(t,u))$. Comme c'est vrai quel que soit α, on en conclut $f(t,u) = t.u$ et le morphisme de comorphisme f^* est bien l'application donnant l'action de T_N sur U_σ. $\square$

Ainsi, toute variété torique supporte l'action naturelle d'un tore et nous pouvons en caractériser les orbites :

Proposition **5.8** *On a une bijection canonique entre les orbites de cette action et les faces du cône auquel est associée la variété torique considérée.*

Preuve Nous allons en fait définir une application ψ de U_σ dans l'ensemble des faces de σ, surjective, et telle que deux éléments sont dans la même orbite si et seulement s'ils ont la même image.

Soit x un élément de U_σ vu comme morphisme de semi-groupes de S_σ dans $\mathbb{C}$. On considère l'ensemble E_x des éléments de S_σ qui ne sont pas envoyés sur 0 par x. Alors, l'ensemble des éléments de σ qui sont dans le noyau de tous les éléments de E_x est une face de σ que l'on pose égale à $\psi(x)$.

Montrons déjà la surjectivité de ψ. Soit τ une face de σ. Posons x_τ l'application de S_σ dans $\mathbb{C}$ qui à un élément l de S_σ associe 1 si l est nulle sur τ et 0 sinon. Il s'agit clairement d'un morphisme de semi-groupes car si $l+l'$ est nulle sur τ avec l et l' dans S_σ, alors l et l' sont nulles sur τ car elles y sont positives. On voit donc x_τ comme élément de U_σ et $\psi(x_\tau) = \tau$. En effet, tous les éléments de S_σ ayant une image non nulle par x_τ s'annulent sur τ et, réciproquement, il existe une forme linéaire de S_σ qui définit τ, donc ne s'annule en aucun autre point de σ. Ainsi, ψ est surjective. Montrons maintenant que x et y sont dans la même orbite de T_N si et seulement si $\psi(x) = \psi(y)$.

Si x et y sont dans la même orbite, alors il est clair qu'ils s'annulent en les mêmes éléments de S_σ et donc ont la même image par ψ. Supposons réciproquement qu'on ait deux éléments x et y de U_σ qui ont la même image τ par ψ. Alors, prenons une base $v_1, ..., v_k$ de $\tau^\perp \cap N^\vee$ et complétons-la en une base $v_1, ..., v_n$ de $N^\vee$. Considérons alors l'élément t de T_N tel que $t(v_i) = \frac{v_i(y)}{v_i(x)}$ pour $1 \leq i \leq k$ et $t(v_i) = 1$ si $k < i \leq n$. Il est alors clair que $t.x = y$. $\square$

PROPOSITION **5.9** *Soit x un élément de U_σ et τ une face de σ. Alors, x est dans U_τ (identifié à un ouvert de U_σ) si et seulement si τ contient $\psi(x)$.*

PREUVE On sait que x correspond à un morphisme de semi-groupes de S_σ dans $\mathbb{C}$. Il appartient à U_τ si et seulement si ce morphisme peut être prolongé en un morphisme de semi-groupes de S_τ dans $\mathbb{C}$. Si τ contient $\psi(x)$, alors U_τ contient $U_{\psi(x)}$ et il suffit de voir que $x \in U_{\psi(x)}$. Prenons un élément u dans $S_{\psi(x)}$. Si u n'est pas nul sur $\psi(x)$, posons $\tilde{x}(u) = 0$. Si u est nul sur $\psi(x)$, il s'écrit $u_1 - u_2$ avec u_1 et u_2 dans S_σ et nuls sur $\psi(x)$. Posons alors $\tilde{x}(u) = \frac{x(u_1)}{x(u_2)}$, qui ne dépend pas du couple (u_1, u_2) choisi. Il est alors clair que $\tilde{x}$ est un morphisme de semi-groupes de $S_{\psi(x)}$ dans $\mathbb{C}$ qui prolonge x. Donc $x \in S_{\psi(x)}$.

Supposons réciproquement que τ ne contienne pas $\psi(x)$. Prenons alors un élément s de S_σ qui définit τ. On a alors $x(s) = 0$ car s n'est pas nul sur $\psi(x)$. Or, comme S_τ contient aussi $-s$, on ne peut pas prolonger x en un morphisme de semi-groupes de S_τ dans $\mathbb{C}$. $\square$

En récapitulant, l'image réciproque par ψ d'une face τ de σ est une orbite de l'action de T_N sur U_σ, que nous noterons O_τ et qui est égale au complémentaire dans U_τ de la réunion des $U_{\tau'}$ où τ' parcourt l'ensemble des faces propres de τ.

REMARQUE **5.10** *Si $x \in O_\tau$, alors le stabilisateur T_τ de l'action de T_N sur x est un tore, et plus précisément le tore associé à l'intersection de N avec l'espace vectoriel engendré par τ. En particulier, c'est un point fixe si et seulement si τ engendre V, et, si c'est le cas, on a clairement $\tau = \sigma$.*

En effet, il est clair qu'un élément t de T_N fixe un élément x de U_σ si et seulement si pour tout élément l de S_σ où x ne s'annule pas, on a $t(l) = 1$. Or, si x est dans O_τ, $x(l)$ est non nul si et seulement si l est dans l'orthogonal de τ. Donc, t fixe x si et seulement si il est constant de valeur 1 sur l'orthogonal de τ. On obtient ainsi que le stabilisateur de O_τ s'identifie aux morphismes de $N^\vee/(N^\vee \cap \tau^\perp)$ dans $\mathbb{C}$. Or, $N^\vee/(N^\vee \cap \tau^\perp)$ est le dual du groupe $N \cap Vect(\tau)$, ce qui prouve l'affirmation.

5.3 Morphismes toriques

On se donne deux variétés toriques affines U_σ et $U_{\sigma'}$, associées respectivement aux cônes σ et σ', espaces vectoriels V et V' et réseaux N et N'.

Soit ϕ un morphisme de groupes de N dans N' tel que $\phi_{\mathbb{R}}(\sigma) \subset \sigma'$. Alors, par dualité, ϕ induit un morphisme de $N'^\vee$ dans $N^\vee$ qui envoie $S_{\sigma'}$ dans S_σ. D'après la proposition 2.10, on peut assoicier à ϕ un morphisme de $\mathbb{C}[S_{\sigma'}]$ dans $\mathbb{C}[S_\sigma]$, qui induit un morphisme de variétés affines $\tilde{\phi}$ de U_σ dans $U_{\sigma'}$. Un tel morphisme s'appelle un *morphisme torique* de U_σ dans $U_{\sigma'}$.

EXEMPLE **5.3.1** *L'identification de U_τ à un ouvert de U_σ vue ci-dessus, pour une face τ de σ est le morphisme torique associé à l'identité du réseau (qui envoie évidemment τ dans σ).*

EXEMPLE **5.3.2** *Considérons les cônes $\sigma = (\mathbb{R}_+)^2$ de $\mathbb{R}^2$ et $\sigma' = \mathbb{R}_+$ de $\mathbb{R}$, les réseaux $\mathbb{Z}^2$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ et pour ϕ l'application $(x, y) \to x$ de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}$, qui envoie évidemment σ dans σ'. Dans ce cas, S_σ est engendré par les applications $(x, y) \to x$ et $(x, y) \to y$ de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}$, $S_{\sigma'}$ par l'identité de $\mathbb{Z}$. L'application induite de $\mathbb{C}[S_{\sigma'}]$ dans $\mathbb{C}[S_\sigma]$ est alors l'injection de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X, Y]$, qui est le comorphisme de la projection $(z, z') \to z$ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$.*

EXEMPLE **5.3.3** *Soit $n \geq 1$. On considère $\sigma = \sigma' = \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, $N = \mathbb{Z}$, $N' = \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ et ϕ l'injection canonique. Alors, le morphisme induit s'identifie à l'application $z \to z^n$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. En effet, S_σ est engendré par le morphisme qui envoie 1 sur 1 et $S_{\sigma'}$ est engendré par le morphisme qui envoie $\frac{1}{n}$ sur 1. La restriction à $\mathbb{Z}$ de ce dernier envoie 1 sur n. Le morphisme de $\mathbb{C}[S_{\sigma'}]$ dans $\mathbb{C}[S_\sigma]$ induit est donc l'application de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$ qui envoie X sur X^n. C'est le comorphisme de l'application $z \to z^n$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.*

EXEMPLE **5.3.4** *Considérons $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 0 \leq x \leq y\}$ et $\sigma' = (\mathbb{R}_+)^2$. Prenons pour ϕ l'identité de $\mathbb{Z}^2$. Alors $S_{\sigma'}$ est donné par $\mathbb{N}^2$ et S_σ par $\{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tq } 0 \leq v \text{ et } u + v \geq 0\}$. Donc, $S_{\sigma'}$ est engendré par $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et S_σ par $(1, 0)$ et $(-1, 1)$. L'application de $\mathbb{C}[S_{\sigma'}]$ dans $\mathbb{C}[S_\sigma]$ associée à ϕ est donc l'injection canonique de $\mathbb{C}[X, Y]$ dans $\mathbb{C}[X, X^{-1}Y]$ et le morphisme torique associé est donc l'application $(z, z') \to (z, zz')$ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$. Remarquons tout de même que l'action du tore sur le premier $\mathbb{C}^2 \simeq Spec_m\mathbb{C}[X, X^{-1}Y]$ est alors $(\alpha, \alpha') \cdot (z, z') = (\alpha z, \alpha^{-1}\alpha' z')$.*

EXEMPLE **5.3.5** *On considère ici un sous-réseau N' d'un réseau N d'un espace vectoriel V et un cône σ rationnel par rapport à N (et N'). On a alors clairement $N^\vee \subset N'^\vee$ et aussi $S_\sigma \subset S'_\sigma$, donc $\mathbb{C}[S_\sigma] \subset \mathbb{C}[S'_\sigma]$. Le morphisme torique associé à l'injection canonique de N' dans N est le morphisme $\tilde{i}$ dont le comorphisme est l'injection canonique de $\mathbb{C}[S_\sigma]$ dans $\mathbb{C}[S'_\sigma]$.*

On peut voir que V agit sur $\mathbb{C}[S'_\sigma]$ de la manière suivante : Si $v \in V$ et $s \in S'_\sigma$, on pose $\rho_v(X^s) = \exp(2i\pi s(v))X^s$. On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une action et on voit aussi que v agit trivialement si et seulement si $s(v)$ est entier quel que soit s dans S'_σ, soit si v est dans N' (car S'_σ engendre $N^\vee$). En restreignant cette action à N et en passant au quotient, on obtient une action de N/N' sur $\mathbb{C}[S'_\sigma]$ et cette action passe aux spectres maximaux en une action de N/N' sur U'_σ.

L'ensemble des éléments de $\mathbb{C}[S'_\sigma]$ invariants par cette action est le sous-anneau de $\mathbb{C}[S'_\sigma]$ engendré par les X^s pour lesquels on a $s(v) \in \mathbb{Z}$ quel que soit v dans N, soit exactement $\mathbb{C}[S_\sigma]$. On montre alors alors facilement que la variété torique affine U_σ s'identifie à l'espace des orbites de l'action de N/N' sur U'_σ et le morphisme $\tilde{i}$ est la projection canonique de U'_σ sur l'espace des orbites de l'action.

PROPOSITION **5.11** *Soit ϕ un morphisme de N dans N' envoyant σ dans σ' et ψ un morphisme de N' dans N'' envoyant σ' dans σ''. Alors le morphisme de U_σ dans $U_{\sigma''}$ induit par $\psi \circ \phi$ est la composée du morphisme de $U_{\sigma'}$ dans $U_{\sigma''}$ induit par ψ par le morphisme de U_σ dans $U_{\sigma'}$ induit par ϕ.*

Un morphisme torique commute avec les actions des tores sur les variétés.

PREUVE La première partie de la proposition est laissée en exercice.

Pour la seconde, remarquons déjà que ϕ envoie 0_N sur $0_{N'}$ et induit donc un morphisme $\tilde{\phi}$ du tore T_N sur le tore $T_{N'}$. Plus précisément, si $t \in T_N$ et $\alpha \in N'^\vee$, alors $[\tilde{\phi}(t)](\alpha) = t(\alpha \circ \phi)$.

Appelons $\phi_\#$ l'application de U_σ dans $U_{\sigma'}$ induite par ϕ et ${}^t\phi$ l'application de composition par ϕ de $N'^\vee$ dans $N^\vee$ (ou aussi sa restriction de $S_{\sigma'}$ dans S_σ). Pour x dans U_σ, on a $\phi_\#(x) = x \circ {}^t\phi$. Ainsi, pour t dans T_N, x dans U_σ, et α dans $S_{\sigma'}$, on a $[\phi_\#(t.x)](\alpha) = (t.x)(\alpha \circ \phi) = t(\alpha \circ \phi) \cdot x(\alpha \circ \phi) = [\tilde{\phi}(t)](\alpha) \cdot [\phi_\#(x)](\alpha) = [\tilde{\phi}(t).\phi_\#(x)](\alpha)$

Cela montre bien que $\phi_\#$ commute avec les actions toriques. $\square$

5.4 Singularités

Nous étudions ici les singularités d'une variété torique affine. Nous avons prouvé que tout point d'une variété torique affine appartenait à la variété associée à une face minimale du cône considéré.

PROPOSITION **5.12** *Une variété torique affine U_σ est non singulière si et seulement si le cône σ qui la définit est engendré par une partie $(v_1, ..., v_k)$ qui peut être complétée en une base du réseau N. dans ce cas, U_σ est (toriquement) isomorphe à la variété $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$ où n est le rang de N.*

PREUVE La condition suffit clairement car alors on a un isomorphisme ϕ de N sur $\mathbb{Z}^n$ qui envoie caque v_i sur le i-ème vecteur de la base canonique. Clairement, $\phi_\mathbb{R}$ envoie σ sur $\mathbb{R}_+^k \times (\{0\})^{n-k}$. On a donc un isomorphisme torique entre les variétés affines définies par ces deux cônes et la seconde est $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$, qui est lisse.

Montrons la réciproque. Supposons déjà que σ engendre V. Dans ce cas, $\sigma^\vee$ est fortement convexe et donc, dans $\mathbb{C}[S_\sigma]$, l'ensemble M des éléments ayant un coefficient constant nul est un idéal maximal, et son carré est engendré par les monômes de la forme $X^{s+s'}$ où s et s' sont non nuls dans S_σ. Ainsi, M/M^2 est engendré en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel par les X^s où $s \in S_\sigma$ est non nul et n'est pas somme de deux éléments non nuls de S_σ. Or, l'ensemble de ces éléments engendre S_σ en tant que semi-groupe, et engendre a fortiori $N^\vee$ en tant que groupe. Si le point de U_σ associé est lisse, alors ces éléments sont au nombre de n et forment donc une base de $N^\vee$ qui engendre $\sigma^\vee$ en tant que cône. Leur base duale dans N forme alors un système générateur de σ.

Si σ n'engendre pas V, mais un sous-espace V' de dimension k de V, la variété U_σ est le produit de la variété U'_σ associée à σ en considérant l'espace vectoriel V' et son réseau $N' = N \cap V'$ par un tore de dimension $n - k$. Une telle variété est lisse si U'_σ l'est, donc seulement si σ est engendré par une base de N'. Or, une base de N' pouvant être complétée en une base de N, on peut conclure. $\square$

6 Variétés toriques générales

On se donne maintenant un ensemble (fini) de cônes polyhedraux convexes rationnels sur un espace vectoriel réel V. Nous allons voir que sous certaines conditions, il est possible de recoller les variétés toriques associées, de manière à obtenir à nouveau une variété algébrique. Toutefois, il ne s'agit plus alors de variétés algébriques affines, et il faut donc accepter des variétés algébriques plus générales.

6.1 Variétés algébriques générales

Définition **6.1** *On appelle variété algébrique la donnée d'un espace X et d'un recouvrement de X par des variétés algébriques affines $(U_i)_{i\in I}$, en nombre fini telles que, pour tout $(i,j) \in I \times I$, on ait $U_i \cap U_j$ ouvert de Zariski de U_i et $\{(x,x), x \in U_i \cap U_j\}$ sous-variété algébrique affine de $U_i \times U_j$.*

Les $(U_i)_{i\in I}$ s'appellent les ouverts définissants de la variété algébrique X.

Pour X et Y deux ensembles, nous pourrons noter $(X \cap Y)_\Delta$ l'ensemble $\{(x,x), x \in X \cap Y\}$, image du plongement diagonal de $X \cap Y$ dans $X \times Y$.

Exemple **6.1.1** *Si on prend une variété algébrique affine M, et le recouvrement formé de M seul, on obtient une variété algébrique car on sait que la diagonale est une sous-variété algébrique affine de $M \times M$.*

Exemple **6.1.2** *Considérons $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$. Nous avons dit que ce n'était pas une variété algébrique affine. C'est néanmoins une variété algébrique, obtenue par le recouvrement formé des deux ouverts principaux (donc affines) $O_1 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $O_2 = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ de $\mathbb{C}^2$. Leur intersection $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ est ou ouvert principal de chacun d'eux. Alors, $(O_1 \cap O_2)_\Delta = \{(z_1, z_2, z_1, z_2), z_{1,2} \neq 0\}$ qui est sous-variété algébrique affine de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ définie par les polynômes $X_1 - X_2$ et $Y_1 - Y_2$ de $\mathbb{C}[X_1, Y_1, Y_1^{-1}, X_2, X_2^{-1}, Y_2]$. Nous verrons que cet espace, le plan privé de l'origine, est une variété torique.*

Exemple **6.1.3** *Plus généralement, un ouvert N d'une variété algébrique affine M est une variété algébrique. Nous savons déjà qu'elle est recouverte par des ouverts principaux X_α de M, en nombre fini. Il reste juste à vérifier que l'intersection de deux ouverts principaux est une sous-variété de leur produit. En fait, il s'agit de la sous-variété de $X_\alpha \times X_\beta$ définie par les fonctions de la forme $g \otimes 1 - 1 \otimes g, g \in F(M)$, qui sont bien dans $F(X_\alpha \times X_\beta)$.*

Exemple **6.1.4** *Soit $n \geq 1$. Appelons $\mathbb{C}P^n$ l'ensemble des droites vectorielles du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{n+1}$. Prenons i un entier, $1 \leq i \leq n+1$. Alors, l'ensemble des droites vectorielles sur lesquelles l'application linéaire correspondant à la coordonnée d'indice* *i n'est pas nulle s'identifie à* $\mathbb{C}^n$ *par* $(z_1, ..., \widehat{z_i}, ..., z_{n+1}) \to \mathbb{C}.(z_1, ..., 1, ..., z_{n+1})$*. Cela fournit un recouvrement de* $\mathbb{C}P^n$ *par* $n+1$ *copies* $X_i, 1 \leq i \leq n+1$ *de* $\mathbb{C}^n$*. Il s'agit de plus d'une variété algébrique. En effet,* $X_i \cap X_j$ *s'identifie aux droites de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *dont ni la coordonnée d'indice i ni celle d'indice j ne sont nulles, et est donc un ouvert principal de* X_i *et de* X_j*. Le sous-ensemble de* $X_i \times X_j$ *correspondant à* $X_i \cap X_j$ *est donné par l'ensemble des* $(z_1, ..., \widehat{z_i}, .., z_{n+1}, z'_1, ..., \widehat{z'_j}, ..., z'_{n+1})$ *pour lesquels les polynômes* $X_jY_i - 1$ *et, pour* $k \neq i, j$, $X_kY'_i - Y_k$ *de* $\mathbb{C}[X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., X_{n+1}, Y_1, ..., \widehat{Y_j}, ..., Y_{n+1}]$ *s'annulent. En particulier, il s'agit bien d'une variété algébrique, que l'on appelle l'espace projectif de dimension n sur* $\mathbb{C}$*. Nous allons voir qu'il s'agit aussi d'une variété torique.*

De nombreuses notions concernant les variétés algébriques affines se transportent sur les variétés algébriques générales. Donnons-en certaines très importantes :

Les fonctions régulières : Une fonction de X dans $\mathbb{C}$ est dite régulière si sa restriction à chaque ouvert définissant l'est. L'anneau $F(X)$ des fonctions régulières sur X est une $\mathbb{C}$-algèbre réduite de type fini.

Les morphismes : Une application f d'une variété algébrique X dans une variété algébrique X' s'appelle un morphisme si pour tout élément x d'un ouvert définissant U_i de X, on peut trouver un ouvert principal U de U_i tel que la restriction de f à U ait son image incluse dans un ouvert définissant V de X' et que $f : U \to V$ soit un morphisme de variétés algébriques affines. La composée de deux morphismes est un morphisme.

Proposition **6.1** *Prenons une variété algébrique* X*, définie par des ouverts* $(U_i)_{i \in I}$*. Por chaque i, prenons des ouverts principaux* $V_{i,j}$ *de* U_i *dont la réunion est* U_i*. Alors, l'intersection de deux ensembles de la forme* $V_{i,j}$ *est un ouvert de chacun d'eux et l'injection diagonale d'une telle intersection dans le produit correspondant est un plongement. Ainsi, les* $V_{i,j}$ *forment les ouverts définissants d'une variété algébrique sur l'ensemble* X*. Alors, l'identité de* X *dans lui-même est un isomorphisme entre les deux variétés algébriques.*

Dans la pratique, deux telles variétés seront identifiées. Le recouvrement par les $V_{i,j}$ *s'appelle un raffinement du recouvrement par les* U_i*.*

Preuve Commençons par prouver que l'intersection de $V_{i,j}$ avec $V_{i',j'}$ est un ouvert de $V_{i,j}$. En fait, $U_i \cap V_{i',j'}$ est un ouvert de $U_i \cap U_j$ qui est lui-même un ouvert de U_i. L'intersection de cet ouvert de U_i avec $V_{i,j}$, qui est $V_{i,j} \cap V_{i',j'}$ est donc bien un ouvert de $V_{i,j}$.

Montrons que $(V_{i,j} \cap V_{i',j'})_\Delta$ est un fermé du produit $V_{i,j} \times V_{i',j'}$. En fait, la topologie de Zariski sur $V_{i,j} \times V_{i',j'}$ est la topologie induite par celle de $U_i \times U_{i'}$. Ainsi, l'adhérence de Zariski de $(V_{i,j} \cap V_{i',j'})_\Delta$ dans $V_{i,j} \times V_{i',j'}$ est incluse dans l'adhérence de Zariski de $(U_i \cap U_{i'})_\Delta$ dans $U_i \times U_{i'}$, et on sait que $(U_i \cap U_{i'})_\Delta$ est fermé dans $U_i \times U_{i'}$. Comme de plus $(U_i \cap U_{i'})_\Delta \cap V_{i,j} \times V_{i',j'} = (V_{i,j} \cap V_{i',j'})_\Delta$, on peut affirmer que $(V_{i,j} \cap V_{i',j'})_\Delta$ est fermé dans $V_{i,j} \times V_{i',j'}$.

Le reste de la proposition se vérifie immédiatement. □

Les sous-variétés : Une partie d'une variété algébrique est une sous-variété si son intersection avec chaque ouvert définissant est une sous-variété algébrique affine de cet ouvert définissant.

La topologie de Zariski : Ici encore, les sous-variétés d'une variété algébrique X forment les fermés d'une topologie, encore appelée topologie de Zariski, sur X. On remarque que chaque ouvert définissant est un ouvert de X pour cette topologie. D'autre part, tout morphisme est continu pour les topologies de Zariski sur les variétés correspondantes.

L'irréductibilité : Une variété algébrique X est dite irréductible si l'un de ses ouverts définissants est dense dedans et irréductible. Dans ce cas, tous le sont.

Les composantes irréductibles : Les adhérences, pour la topologie de Zariski des composantes irréductibles des ouverts définissants d'une variété algébrique X s'appellent les composantes irréductibles de X. Elles sont en nombre fini, sont des sous-variétés algébriques de X, sont irréductibles, ont X pour réunion, et aucune n'en contient strictement une autre.

Les fonctions rationnelles : Si une variété algébrique X est irréductible, alors tous ses ouverts définissants sont irréductibles et birationnellement équivalents ; ils ont donc même corps des fonctions rationnelles, qu'on appelle aussi corps des fonctions rationnelles sur X, noté $K(X)$

Attention : Si X n'est pas affine, alors $K(X)$ n'est pas forcément le corps des fractions de $F(X)$.

La dimension : Si une variété algébrique est irréductible, alors tous ses ouverts définissants sont irréductibles et ont même dimension, qu'on appelle dimension de la variété algébrique et est encore égale au degré de transcendence du corps des fonctions rationnelles sur cette variété.

Les points lisses et singuliers : Si on prend un point x d'une variété algébrique X, son caractère lisse ou singulier dans un ouvert définissant ne dépend pas de l'ouvert choisi. Il est alors dit lisse ou singulier suivant qu'il l'est ou non dans un tel ouvert.

La normalité : Si on prend un point x d'une variété algébrique X, son caractère normal ou non dans un ouvert définissant ne dépend pas de l'ouvert choisi. Il est alors dit normal s'il l'est dans un tel ouvert. Une variété algébrique est dite normale si tous ses points le sont. Une variété algébrique possède une normalisée, obtenue en remplaçant chaque ouvert définissant par sa normalisée.

6.2 Définition et exemples

DÉFINITION **6.2** *Soit V une espace vectoriel réel dont N est un réseau. On appelle éventail un ensemble fini non vide Δ de cônes polyhedraux fortement convexes de V, rationnels par rapport à N tel que l'intersection de deux cônes quelconques de Δ soit une face de chacun d'eux et tel que toute face d'un cône de Δ soit aussi dans Δ.*

EXEMPLE **6.2.1** *Si on se place sur $\mathbb{R}$ (dimension 1), il n'y a que trois cônes : $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ et $\{0\}$. Tout sous-ensemble contenant le cône réduit à $\{0\}$ est un éventail.*

EXEMPLE **6.2.2** *Dans $\mathbb{R}^2$,avec réseau $\mathbb{Z}^2$, on peut considérer les quatre cadrans $\mathbb{R}_\pm \times \mathbb{R}_\pm$. Si on prend un certain nombre de ces cadrans, avec les quatre demi-droites de coordonnées et le cône réduit à l'origine, on obtient un éventail.*

EXEMPLE **6.2.3** *L'ensemble formé par les faces d'un cône polyhedral convexe d'un espace vectoriel rationnel par rapport à un réseau est bien sûr un éventail. Nous verrons bien vite que la variété qui sera associée à un tel éventail est la variété affine associée au cône considéré.*

EXEMPLE **6.2.4** *Si on retire de l'ensemble des faces d'un cône polyhedral convexe rationnel l'ensemble des faces qui contiennent une face particulière (autre que $\{0\}$), l'ensemble obtenu est aussi un éventail. nous verrons que dans ce cas, la variété associée est un ouvert de celle associée au cône.*

LEMME **6.1** *Prenons deux cônes σ_1 et σ_2 d'un éventail et soit τ leur face commune. Alors U_τ s'identifie à une sous-variété algébrique affine de $U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$ par l'application diagonale.*

PREUVE Il suffit de remarquer que son comorphisme, qui est l'application naturelle de $\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] \otimes \mathbb{C}[S_{\sigma_2}]$ dans $\mathbb{C}[S_\tau]$ donnée par $X^{s_1} \otimes X^{s_2} \to X^{s_1+s_2}$, est surjectif, ce qui résulte directement du fait que $S_\tau = S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}$. $\square$

THÉORÈME **6.2** *On peut associer une variété torique à chaque éventail en prenant pour ouverts définissants les variétés toriques affines associées aux cônes de l'éventail considéré.*

DÉMONSTRATION Soit Δ un éventail, σ et σ' deux cônes de Δ. On considère la réunion disjointe

$$\bigsqcup_{\sigma \in \Delta} U_\sigma$$

et on met dessus la relation d'équivalence engendrée par l'identification d'un point (x, τ) avec $\phi(x), \sigma$ pour τ face de σ et ϕ le plongement ouvert naturel de U_τ dans U_σ, et on appelle $X(\Delta)$ l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation. Nous avons déjà dit que l'intersection de U_σ avec $U_{\sigma'}$ s'identifiait avec $U_{\sigma\cap\sigma'}$, et que l'application naturelle de $U_{\sigma\cap\sigma'}$ dans $U_\sigma \times U_{\sigma'}$ était un plongement. Cela donne directement le théorème. $\square$

Remarque **6.3** *Dans la construction précédente, on peut se contenter de recoller les variétés affines associées aux cônes maximaux.*

Exemple **6.2.5** *Si on prend pour éventail l'ensemble des faces d'un cône polyhedral convexe σ rationnel par rapport à un réseau N d'un espace vectoriel V, alors la variété associée à cet éventail s'identifie à U_σ.*

En fait, dans ce cas, σ est le seul cône maximal et $X(\Delta)$ s'identifie donc à U_σ sans recollement.

Exemple **6.2.6** *Considérons $\mathbb{R}$ et son réseau $\mathbb{Z}$. Le seul éventail qui n'est pas l'ensemble des faces d'un certain cône est le cône formé des trois éléments $\{0\}$, $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$. Seuls $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ sont maximaux et la variété associée est formée de deux copies U_+ et U_- de $\mathbb{C}$ où un élément non nul de U_+ est recollé avec son inverse dans U_-. On obtient ainsi la droite projective $\mathbb{C}P^1$.*

Exemple **6.2.7** *Considérons $\mathbb{R}^2$, son réseau $\mathbb{Z}^2$ et l'éventail constitué des faces des deux cônes σ_1 engendré par $(1,0)$ et $(1,1)$ et σ_2 engendré par $(1,1)$ et $(0,1)$. On a S_{σ_1} engendré par y et $x-y$ et S_{σ_2} engendré par x et $y-x$. On a donc $\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] = \mathbb{C}[Y, XY^{-1}] = \mathbb{C}[U,V]$ et $\mathbb{C}[S_{\sigma_2}] = \mathbb{C}[X, YX^{-1}] = \mathbb{C}[U',V']$. Ainsi, U_{σ_1} et U_{σ_2} sont isomorphes à $\mathbb{C}^2$ et la variété torique associée à l'éventail est donnée par le recollement $(u,v) \sim (uv, \frac{1}{v})$ le long de chaque $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.*

Nous montrerons qu'il s'agit en fait de l'éclaté en l'origine du plan complexe.

6.3 Propriétés des variétés toriques

Nous donnons ici quelques propriétés des variétés toriques, qui généralisent les propriétés des variétés toriques affines :

Proposition **6.4** *Une variété torique supporte une action algébrique naturelle du tore associé.*

Preuve Il faut juste s'assurer de la compatibilité de l'action vis-à-vis des recollements. Cela résulte simplement de la définition et du fait que les injections naturelles des sous-variétés affines, qui sont des morphismes toriques, commutent avec les actions toriques. $\square$

PROPOSITION **6.5** *On a une bijection naturelle entre les orbites de l'action du tore sur la variété torique et les éléments de l'éventail qui définit la variété.*

PREUVE Cela résulte du fait que les orbites O_τ associées à une même face τ de deux cônes σ et σ' sont identifiées par la relation d'équivalence, et que deux orbites O_τ et $O_{\tau'}$ associées à des faces τ et τ' distinctes ne peuvent pas être identifiées lors d'un tel recollement. $\square$

6.4 Varietés toriques complètes

DÉFINITION **6.3** *On appelle support d'un éventail Δ, que l'on note $|\Delta|$, la réunion des cônes de Δ.*

On dit qu'un éventail est complet si son support est égal à tout l'espace vectoriel V.

REMARQUE **6.6** *Comme Δ est fini, sa complétude équivaut à ce que tout élément de N soit dans un de ses cônes.*

EXEMPLE **6.4.1** *L'espace projectif. Soit $n \geq 1$. Considérons $n+1$ éléments de somme nulle qui engendrent un espace vectoriel V de dimension n, par exemple les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ auxquels on ajoute $(-1, -1, ..., -1)$, ainsi que le réseau N qu'ils engendrent ($\mathbb{Z}^n$ dans le cas particulier). Toute partie propre de ces $n+1$ éléments engendre un cône rationnel (par rapport à N) fortement convexe, et l'ensemble de ces cônes forme un éventail complet de V. En effet, si un élément de $\mathbb{Z}^n$ a toutes ses coordonnées positives, il est dans l'éventail engendré par la base canonique, et s'il possède au moins une coordonnée strictement négative, il est dans l'éventail ne contenant pas l'élément de la base canonique associé à sa (ses) plus petite(s) cordonnée(s).*

La variété torique associée s'appelle l'espace projectif de dimension n, noté $\mathbb{C}P^n$, et est la réunion de $n+1$ variétés affines (correspondant aux cônes maximaux) isomorphes à $\mathbb{C}^n$.

EXEMPLE **6.4.2** *Si on se donne deux éventails complets Δ_1 et Δ_2 dans deux espaces vectoriels V_1 et V_2, alors, l'ensemble formé par les produits d'un élément de Δ_1 par un élément de Δ_2 forme un éventail complet de $V_1 \times V_2$, et la variété torique associée est le produit des deux variétés associées aux deux éventails.*

EXEMPLE **6.4.3** *L'espace projectif à poids.*

Comme pour l'espace projectif, on part de $n+1$ vecteurs de somme nulle $v_1, ..., v_{n+1}$, qui engendrent V de dimension n, et on se donne aussi $n+1$ entiers $d_1, ..., d_{n+1}$ appelés poids. On considère alors le réseau N de V engendré par les vecteurs $\frac{1}{d_i} v_i$.

On reprend alors l'éventail formé de tous les cônes engendrés par une partie propre des v_i, qui est encore un éventail complet, et la variété torique associée s'appelle l'espace projectif à poids de dimension n et de poids $d_1, ..., d_{n+1}$, noté $\mathbb{C}P^n(d_1, ..., d_{n+1})$. C'est une variété complète, et on peut voir que c'est le quotient de $\mathbb{C}P^n$ par l'action d'un groupe abélien fini.

Exemple **6.4.4** *Les surfaces de Hirzebruch. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'éventail complet de $\mathbb{R}^2$ possédant quatre cônes maximaux : $(\mathbb{R}_-)^2$, $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 0 \leq nx \leq y\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 0 \leq x \text{ et } y \leq nx\}$. La surface associée se projette sur la droite projective réelle par la première projection de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{Z}$.*

6.5 Morphismes toriques

Prenons deux réseaux N et N' d'espaces vectoriels V et V', Δ et Δ' deux éventails dans V et V' et ϕ un morphisme de N dans N' tel que tout cône de Δ soit envoyé par $\phi_{\mathbb{R}}$ dans un cône de Δ'. Alors ϕ induit naturellement un morphisme de $X(\Delta)$ dans $X(\Delta')$ qui commute avec les actions de T_N et $T_{N'}$.

En effet, pour tout σ de Δ, U_σ est envoyé sur la variété torique $U_{\sigma'}$ associée à un cône σ' de Δ' qui contient $\phi_{\mathbb{R}}(\Delta)$. Or, $U_{\sigma'}$ est elle-même un ouvert de $X(\Delta')$ et on a ainsi une application de U_σ dans $X(\Delta')$. Cette application commute avec les actions de T_N et $T_{N'}$ car c'était déjà vrai de l'application de U_σ dans $U_{\sigma'}$. De plus, l'image d'un point de $X(\Delta)$ par une telle application ne dépend pas du choix des cônes σ et σ'.

Exemple **6.5.1** *On considère l'éventail Δ dans $\mathbb{C}^n$ formé de toutes les faces propres du cône $\mathbb{R}_+^{n+1}$, et dans $\mathbb{R}^n$ l'éventail Δ' donnant l'espace projectif défini dans l'exemple 6.4.1. L'application $(x_0, x_1, ..., x_n) \to (x_1 - x_0, ..., x_n - x_0)$ envoie N sur N' et chaque face de Δ sur une face de Δ'. On obtient donc un morphisme torique de $X(\Delta) \simeq \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{(0, ..., 0)\}$ sur $X(\Delta') \simeq \mathbb{C}P^n$. Ce morphisme torique s'identifie en fait à la projection canonique.*

6.5.1 Éclatement d'une sous-variété torique

Nous introduisons ici un important exemple de morphisme torique, appelé éclatement. Il s'agit, à partir d'un éventail et d'un de ses cônes, de construire un autre éventail, ce qui, à partir d'une variété torique, en donnera une autre, et cette dernière sera munie d'un morphisme torique birationnel sur la première.

Commençons par le cas d'un seul cône. Prenons un cône polyhedral fortement convexe σ rationnel par rapport à un réseau N et non réduit à $\{0\}$. Appelons $v_1, ..., v_k$ les générateurs primitifs de ses faces de dimension 1, et v leur somme (remarquons que v ne peut se situer sur aucune facette de σ). Alors, l'ensemble Δ formé par des faces propres de σ et des cônes engendrés par v et une face propre de σ est un éventail. Si F est une face propre de σ, on notera F_v le cône engendré par F et v.

En effet, chaque cône de Δ est fortement convexe, car inclus dans σ, et rationnel par rapport à N car engendré par certains v_i et éventuellement v. L'intersection de deux tels cônes est soit une face propre de σ (si un des deux cônes l'est), soit $(F_1 \cap F_2)_v$ si ces deux cônes sont $(F_1)_v$ et $(F_2)_v$. De plus, pour une face propre F de σ, une face de $F_v$est soit de la forme F', soit de la forme F'_v, avec F' face de F, suivant qu'elle contient v ou non.

On dit alors que l'éventail Δ est obtenu par *éclatement* du cône σ et que la variété torique $X(\Delta)$ est obtenu à partir de U_σ par *éclatement* de la sous-variété torique O_σ. On remarque immédiatement que $X(\Delta)$ n'est pas affine.

Interessons-nous maintenant à un type plus général d'éclatement. On considère un éventail Δ et un cône maximal σ de Δ. On peut alors retirer de l'éventail ce cône, et le remplacer par les faces de son éclaté qui sont de la forme F_v. Cela fournit a nouveau un éventail. Nous pouvons même encore généraliser cette construction :

PROPOSITION **6.7** *Prenons un cône σ d' un éventail Δ et supposons que si un cône ξ contient σ, alors les droites contenant les faces de dimension 1 de ξ qui ne sont pas dans σ et l'espace vectoriel engendré par σ sont en somme directe et on note $w_1, ..., w_k$ les générateurs primitifs de ces demi-droites (cette condition est clairement vide si σ est maximal). On considère alors l'ensemble Δ' formé des cônes de Δ qui ne contiennent pas σ, ainsi que des cônes engendrés par une face propre de σ, le vecteur v et une partie des w_i d'un certain cône ξ contient σ. Il s'agit alors d'un éventail et on dit qu'on l'obtient à partir de Δ par éclatement du cône σ. La variété torique associée est dite obtenue par éclatement de l'adhérence de O_σ.*

De plus, le support de Δ' est le même que celui de Δ et l'application identité du réseau sous-jacent induit un morphisme torique de $X(\Delta')$ sur $X(\Delta)$.

PREUVE En effet, si on prend deux cônes de Δ ne contenant pas σ, il en est de même de leur intersection. Notons $F_{v,I}$ le cône de Δ' engendré par la face propre F de σ, v et les $w_i, i \in I$ où $I \subset \{1, ..., n\}$. Si F' est un cône de Δ qui ne contient pas σ, alors $F_{v,I} \cap F'$ est égale à l'intersection de F' avec le cône engendré par F et les $w_i, i \in I$, donc à l'intersection de deux cônes de Δ, donc est un cône de Δ ne contenant pas σ, et donc un cône de Δ'. Si on regarde maintenant l'intersection de la face $F_{v,I}$ avec une face de la forme $F'_{v,J}$ associée à une face propre F' de σ et des $w'_j, j \in J$ d'un cône ξ' contenant σ, alors cette face est engendrée par l'intersection de F et de F', qui est une face propre de F, le vecteur v et les w_i qui sont aussi des w'_j. En effet, cette intersection est incluse dans $\xi \cap \xi'$, et cette intersection est engendrée par σ et les w qui sont aussi des w', car il s'agit à la fois d'une face de ξ et d'une face de ξ' qui contient σ. Ainsi, l'intersection de deux cônes de Δ' est encore un cône de Δ'.

De même, une face d'un cône de Δ' est clairement dans Δ' si cette face est dans Δ et ne contient pas σ. D'autre part, toute face d'un cône de la forme $F_{v,I}$ est un cône de Δ ne contenant pas σ si elle ne contient pas v et est engendrée par une face de F, v et les $w_i, i \subset I'$ avec $I' \subset I$ si elle contient v. Dans les deux cas, c'est un élément de Δ'.

L'ensemble Δ' est donc bien un éventail.

De plus, il est clair que le cône $F_{v,I}$ de Δ' est inclus dans le cône ξ de Δ. Comme les autres cônes de Δ' sont eux-même des cônes de Δ. Cela prouve que le morphisme torique demandé existe bien, et remarquons que c'est clairement l'identité sur T_N, et même sur le complémentaire de O_σ dans $X(\Delta)$.

Vérifions que les deux éventails ont même support. Celui de Δ' est clairement inclus dans celui de Δ. Prenons maintenant un élément du support de Δ. S'il est sur un cône qui ne contient pas σ, alors il est dans le support de Δ'. Sinon, il est, dans un cône ξ contenant σ et donc somme d'un élément v_0 de σ et d'une somme de $\alpha_i w_i$ où les α_i sont positifs. Or, pour λ assez grand, $v_0 - \lambda v$ n'est plus dans σ, et donc il existe λ_0 tel que $v_0 - \lambda_0 v$ soit sur une face propre F_0 de σ. Il est clair qu'alors le point choisi est dans le cône de Δ' engendré par F_0, v et les w_i de ξ.

Ainsi, les éventails Δ et Δ' ont même support. Nous allons voir que cela implique que le morphisme torique associé est propre, et, comme il est aussi dominant, il est surjectif. $\square$

Nous allons nous atteler à prouver le théorème suivant :

THÉORÈME **6.8** *Une variété torique est complète si et seulement si elle est compacte quand elle est munie de sa topologie de variété complexe.*

En fait, nous allons obtenir ce théorème comme cas particulier d'une proposition un peu plus générale. Introduisons pour cela quelques notions.

DÉFINITION **6.4** *On dit qu'un morphisme de variétés algébriques est propre si l'image réciproque de tout compact (pour la topologie complexe) est un compact.*

Nous avons alors :

PROPOSITION **6.9** *Soient N et N' deux réseaux, Δ, Δ' deux éventails associés, et ϕ : $N \mapsto N'$ qui induit un morphisme torique de $X(\Delta)$ dans $X(\Delta')$. Alors ce morphisme est propre si et seulement si l'image réciproque par $\phi_{\mathbb{R}}$ du support de Δ' est réduite au support de Δ.*

Pour obtenir le théorème à partir de la proposition, il suffit juste de considérér que V' est l'epace vectoriel réduit à $\{0\}$, avec son unique variété torique qui est un point. Montrons alors la proposition.

Remarquons de plus qu'outre le théorème, la proposition montre qu'une éclatement torique est un morphisme propre.

Preuve Un sens est facile. S'il y a des points de $\phi^{-1}(N' \cap |\Delta'|)$ qui ne sont pas dans $|\Delta|$, on rajoute à Δ la demi-droite correspondant à un tel point, ce qui donne un éventail Δ'', on obtient une variété torique $X(\Delta'')$ dont $X(\Delta)$ est un ouvert principal, qui le contient strictement, et un morphisme torique $\tilde{\phi}''$de $X(\Delta'')$ dans $X(\Delta')$ qui prolonge $\tilde{\phi}$, qui ne peut donc pas être propre, car si $v \in X(\Delta'') \backslash X(\Delta)$, alors l'image réciproque par $\tilde{\phi}$ d'un voisinage compact de $\tilde{\phi}''(v)$ possède v dans son adhérence.

Montrons à présent la réciproque. Considérons une application ϕ de N dans N' et considérons deux éventails Δ et Δ' tels que tout cône de Δ est envoyé dans un cône de Δ' par $\phi_{\mathbb{R}}$ et $\phi_{\mathbb{R}}^{-1}(|\Delta'|) = |\Delta|$. Prenons une suite (x_n) d'éléments de $X(\Delta)$ dont l'image (y_n) par le morphisme torique induit par ϕ est incluse dans un compact de $X(\Delta')$ et prouvons que (x_n) possède des sous-suites convergentes. Comme l'image de (y_n) est incluse dans un compact, elle possède des suites extraites convergentes, et on peut donc la supposer elle-même convergente, de limite y. On peut alors trouver un cône σ' de Δ' tel que y soit un morphisme de $S_{\sigma'}$ dans $\mathbb{C}$. Soit ϕ_* l'application de $(N')^\vee$ dans $N^\vee$ associée à ϕ. Alors, en supposant que (x_n) est à valeurs dans T_N (ce qu'on peut toujours faire car T_N est dense dans $X(\Delta)$), on a que pout tout élément u de $S_{\sigma'}$, la suite $(x_n(\phi_*(u)))$ converge vers $y(u)$. Ainsi, la suite (x_n) est une suite de morphismes de groupes de $N^\vee$ dans $\mathbb{C}^*$ qui converge vers $y(u)$ en $\phi_*(u)$. Il est alors possible d'extraire de (x_n) une sous-suite qui converge en tout point d'un demi-espace H de V^* contenant $\phi_*(S_{\sigma'})$ (sauf si ce dernier ensemble est tout $N^\vee$, mais dans ce cas, il est clair que (x_n) converge) et on notera $x(h)$ cette limite en un point h de H. L'ensemble des éléments de V qui sont positifs sur tout H est une demi-droite de V qui s'envoie alors dans σ' par $\phi_{\mathbb{R}}$, et, par hypothèse, se trouve donc dans un certain cône σ de Δ. Alors, H contient S_σ. La restriction de x à S_σ fournit donc un élément de $X(\Delta)$, et la suite extraite de (x_n) choisie converge bien vers cet élément.

Cela prouve la proposition et le théorème qui en découle. $\square$

7 Diviseurs et fibrés toriques

7.1 Fibrés en droites

Définition **7.1** *Soit M une variété algébrique. On appelle fibré en droites sur M la donnée d'une variété algébrique W et d'un morphisme ϕ de W dans M pour lequel on peut trouver un recouvrement ouvert U_α de M et pour chaque α un isomorphisme h_α de $\phi^{-1}(U_\alpha)$ dans $U_\alpha \times \mathbb{C}$ tel que :*
i) Pour tout α, $\pi_1 \circ h_\alpha = \phi$;
ii) Pour tous α, β, l'application $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ de $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}$ dans lui-même est de la forme $(x, z) \to (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot z)$, avec $g_{\alpha\beta}$ fonction régulière inversible sur $U_\alpha \cap U_\beta$.

Remarque **7.1** *Si W est un fibré en droites sur M, alors pour tout x de M, la fibre $\phi^{-1}(x)$ s'identifie à une droite vectorielle complexe. D'où le nom.*

On remarque en outre que le groupe (tore) $\mathbb{C}^*$ agit naturellement sur W, par multiplication dans chaque fibre. On montre facilement qu'une telle action est algébrique.

Exemple **7.1.1** *Pour une variété algébrique M, la variété $M \times \mathbb{C}$, munie de la première projection est un fibré en droites sur M. On l'appelle le fibré trivial (ou parfois fibré produit) sur M.*

Exemple **7.1.2** *Considérons une sous-variété M' d'une variété M et un fibré en droites W sur M. Alors, $\phi^{-1}(M')$ est un fibré en droites sur M'. Il suffit en effet de prendre pour recouvrement celui donné par les intersections des U_α avec M' et, pour applications h'_α, les restrictions naturelles des h_α.*

Exemple **7.1.3** *Considérons, dans $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$, l'ensemble T constitué des couples $(D, (z_1, z_2))$ tels que $(z_1, z_2) \in D$, ainsi que la projection naturelle π de T sur $\mathbb{C}P^1$ (restriction de la première projection de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$).*

La variété T est bien une variété algébrique car sous-variété de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$ et π est bien un morphisme car restriction d'un morphisme de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}P^1$. Posons $U_1 = \mathbb{C}$, $U_2 = \mathbb{C}P^1 \backslash \{0\}$, $h_1 : \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_1) & \mapsto & U_1 \times \mathbb{C} \\ (D, (z_1, z_2)) & \to & (D, z_2) \end{array}$, $h_2 : \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_2) & \mapsto & U_2 \times \mathbb{C} \\ (D, (z_1, z_2)) & \to & (D, z_1) \end{array}$

Il est facile de voir que h_1 et h_2 sont des isomorphismes et il est évident que $\pi_1 \circ h_1$ et $\pi_1 \circ h_2$ valent π. De plus, si D est dans $\mathbb{C}^*$, alors $h_1 \circ h_2^{-1}(D, z) = h_1(D, (z, \frac{z}{D})) = (D, \frac{z}{D})$, et la fonction inverse est bien une fonction régulière sur $\mathbb{C}^*$.

Ainsi, le couple (T,π) est un fibré en droites sur $\mathbb{C}P^1$ appelé fibré tautologique sur $\mathbb{C}P^1$ (et parfois noté $\mathcal{O}(-1)$).

Proposition **7.2** *La donnée d'un fibré en droites sur une variété M est équivalente à la donnée d'un recouvrement (U_α) de M par des ouverts affines et pour chaque* *couple (α, β), d'une fonction régulière $f_{\alpha,\beta}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$, qui ne s'annule pas, et telle que pour tous α, β, γ, on ait sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$:*

$$f_{\alpha,\gamma} = f_{\alpha,\beta} f_{\beta,\gamma} \tag{1}$$

Preuve En effet, il est clair qu'un fibré en droites fournit de telles données. Il suffit pour cela de poser $f_{\alpha,\beta} = g_{\alpha\beta}$. Réciproquement, si on possède de telles données, on met sur la réunion disjointe des $U_\alpha \times \mathbb{C}$ la relation d'équivalence $(x_\alpha, z) \sim (y_\beta, z')$ si $x = y$ et $f_{\alpha,\beta}(x)z = z'$. D'après la relation 1, il s'agit bien d'une relation d'équivalence et aucun élément de la forme (x_α, z) ne peut être équivalent à (x_α, z') si $z' \neq z$, donc chaque $U_\alpha \times \mathbb{C}$ se plonge dans l'ensemble W des classes d'équivalence pour cette relation et nous appellerons h_α^{-1} cette application de $U_\alpha \times \mathbb{C}$ dans l'ensemble des classes d'équivalence de ses éléments, et h_α la bijection réciproque de h_α^{-1}. L'ensemble W est recouvert par les $U_\alpha \times \mathbb{C}$, qui sont des variétés affines. On a $U_\alpha \times \mathbb{C} \cap U_\beta \times \mathbb{C} = (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}$ est bien un ouvert de $U_\alpha \times \mathbb{C}$. De plus, $((U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C})_\Delta$ est une sous-variété algébrique affine de $U_\alpha \times \mathbb{C} \times U_\beta \times \mathbb{C}$. En effet, si $(U_\alpha \cap U_\beta)_\Delta$ est défini par les g_j de $F(U_\alpha) \otimes F(U_\beta)$, alors $((U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C})_\Delta$ est définie par les g_j et $(X \otimes 1) - (1 \otimes \phi_{\alpha\beta} X')$ de $F(U_\alpha)[X] \otimes F(U_\beta)[X']$. Ainsi, W est bien une variété algébrique.

On a la projection naturelle de W sur M qui, à la classe d'un élément (x_α, z), associe x, car la compatibilité avec la relation d'équivalence est immédiate. De plus, si on prend (x_β, z) dans $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}$, alors $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}(x_\beta, z) = (x_\alpha, \phi_{\beta\alpha} z)$, qui est bien de la forme désirée.

Ainsi, W est bien un fibré en droites sur M. $\square$

Définition **7.2** *Soient (W_1, ϕ_1) et (W_2, ϕ_2) deux fibrés en droites sur une variété algébrique M. On dit que ces deux fibrés sont équivalents (ou isomorphes) s'il existe un isomorphisme (de variétés algébriques) θ de W_1 dans W_2 tel que $\phi_2 \circ \theta = \phi_1$ et tel que pour tout x de M, si on prend $(U_1)_\alpha$ et $(U_2)_\beta$ contenant x, l'application $(h_2)_\beta \circ \theta \circ (h_1)_\alpha^{-1}$ de $\phi_1^{-1}(x)$ dans $\phi_2^{-1}(x)$ est linéaire.*

Il s'agit bien sûr d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des fibrés.

Définition **7.3** *Produit de deux fibrés en droites. On considère deux fibrés en droites W et W' sur une variété algébrique M. Alors on définit leur produit (ou produit tensoriel) de la façon suivante : Le fibré W peut être donné par un recouvrement de M par des ouverts affines (U_α) et des fonctions de transitions $f_{\alpha,\beta}$; le fibré W' peut être donné par un recouvrement de M par des ouverts affines (V_γ) et des fonctions de transitions $g_{\gamma,\delta}$. Alors, on prend le recouvrement de M formé des intersections $(U_\alpha \cap V_\gamma)$ et des fonctions de transition $h_{(\alpha,\gamma),(\beta,\delta)} = f_{\alpha,\beta} g_{\gamma,\delta}$. Il s'agit clairement d'un fibré en droites sur M.*

DÉFINITION **7.4** *Si $\mathcal{O}$ est un fibré en droites sur une variété M, alors en prenant le même recouvrement et les fonctions $f'_{\alpha,\beta} = \frac{1}{f_{\alpha,\beta}}$, alors on obtient un fibré en droites qu'on note $\mathcal{O}^*$ et qu'on appelle le dual de $\mathcal{O}$.*

Le fibré produit de $\mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}^*$ donne un fibré en droites trivial su M.

PROPOSITION **7.3** *On a une structure de groupe (abélien) sur l'ensemble des classes d'équivalence de fibrés en droites sur une variété algébrique irréductible M donnée par le produit, où l'élément neutre est le fibré trivial et l'inverse (de la classe) d'un fibré est (la classe de) son dual. Ce groupe s'appelle le groupe de Picard de M.*

DÉFINITION **7.5** *Soit W un fibré en droites sur une variété M, ϕ la projection de W sur M. On appelle section (régulière) de W un morphisme s de M dans W tel que $\phi \circ s = Id_M$. L'ensemble de ces sections régulières sera noté $\Gamma(W, M)$.*

EXEMPLE **7.1.4** *Pour tout fibré en droites W sur M, l'application qui à un élément x de M fait correspondre $s(x) = h_\alpha^{-1}(x_\alpha, 0)$ est une section, appelée section nulle du fibré W. Il est en effet clair que l'élément ne dépend pas du α choisi et qu'en restriction à chaque U_α, c'est un morphisme, donc c'est bien un morphisme de M dans W, et il est de plus clair que $\phi \circ s = Id_M$.*

EXEMPLE **7.1.5** *Prenons le fibré trivial sur une variété M. On a alors la section "constante" $x \to (x, 1)$.*

EXEMPLE **7.1.6** *Considérons le dual du fibré tautologique sur $\mathbb{C}P^1$. Alors, l'application qui à un élément z de $\mathbb{C}$ associe (z, z) et à un élément z' de $\mathbb{C}P^1 \backslash \{0\}$ associe $(z', 1)$ est une section. Elle n'est pas la section nulle, mais s'annule en 0.*

On peut montrer que le fibré tautologique, quant à lui, ne possède aucune section en dehors de la section nulle.

EXEMPLE **7.1.7** *Si on prend une section s d'un fibré W sur M et une section s' d'un fibré W' sur M, alors on définit une section du fibré $W \otimes W'$ en associant à chaque élément x de M l'élément $(x, s(x) \otimes s'(x))$. On vérifie aisément que c'est bien une section.*

REMARQUE **7.4** *Si s est une section d'un fibré en droites W sur une variété M et si f est une fonction régulière sur M, alors le produit de f par s (i.e. l'application qui à tout x associe dans sa fibre le produit du nombre complexe $f(x)$ par l'élément $s(x)$ de la droite $\phi^{-1}(x)$) est également une section du fibré W.*

Remarque **7.5** *Un fibré est équivalent à un fibré trivial si et seulement si il possède une section qui ne s'annule pas.*

En effet, il est clair que sous une équivalence de fibrés l'image de la section constante égale à 1 *est une section qui ne s'annule pas. Réciproquement, si un fibré* W *possède une section* s *qui ne s'annule pas, tout élément* y *de* W *est, dans la fibre* $\phi^{-1}(x)$ *correspondante, le produit de* $s(x)$ *avec un élément* $\psi(y)$ *de* $\mathbb{C}$*. On montre facilement que l'application* $y \to (\phi(y), \psi(y))$ *est une équivalence de fibrés entre* W *et un fibré trivial.*

Définition **7.6** *Soit* W *un fibré en droites sur une variété algébrique irréductible* M*,* ϕ *la projection de* W *sur* M*. On appelle section rationnelle de* W *la donnée, pour chaque* U_α*, d'une fonction rationnelle* s_α *sur* U_α *telle que pour tous* α, β*, on ait*

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta$$

En particulier, toute section régulière de W peut être vue comme une section rationnelle. En effet, soit s une section régulière de W. Pour tout α, l'application $h_\alpha \circ s$ de U_α dans $U_\alpha \times \mathbb{C}$ est de la forme $x \to (x_\alpha, s_\alpha(x))$. Le point $h_\alpha^{-1}(x_\alpha, s_\alpha(x))$ doit donc être égal à $h_\beta^{-1}(x_\beta, s_\beta(x))$, ce qui donne $s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta$, ce qui montre que s est bien une section rationnelle.

Remarque **7.6** *Soit* W *un fibré en droites sur une variété algébrique irréductible* M*. Toute fonction rationnelle sur un ouvert* U_{α_0} *de* M *détermine une section rationnelle de* W*. En effet, on définit alors pour tout* α *la fonction rationnelle* $s_\alpha = g_{\alpha\alpha_0} s_{\alpha\alpha_0}$*. La compatibilité se vérifie directement et on a bien une section rationnelle du fibré* W *sur* M*.*

Réciproquement, une section rationnelle de W *détermine par définition une fonction rationnelle sur* U_{α_0}*.*

De plus, on peut faire naturellement le produit d'une fonction rationnelle sur M *est d'une section rationnelle de* W*. Finalement, l'espace des sections rationnelles de* W *est naturellement muni d'une structure de droite vectorielle sur le corps* $K(M)$*.*

7.2 Diviseurs

Définition **7.7** *On appelle diviseur de Weil d'une variété algébrique irréductible une somme formelle de sous-variétés irréductibles de codimension* 1 *de cette variété.*

Définition **7.8** *On appelle diviseur de Cartier d'une variété algébrique irréductible la donnée d'un recouvrement de cette variété par des ouverts affines* (U_α) *et d'une fonction rationnelle non nulle* f_α *sur* U_α*, appelée équation locale telle que sur chaque* $U_\alpha \cap U_\beta$*, le quotient* $\frac{f_\alpha}{f_\beta}$ *soit une fonction régulière inversible.*

Deux données (U_α, f_α) et (V_β, g_β) définissent le même diviseur de Cartier si on peut trouver des fonctions régulières inversibles $\phi_{\alpha,\beta}$ sur $U_\alpha \cap V_\beta$ telles que sur cet ouvert $f_\alpha = \phi_{\alpha,\beta} g_\beta$

PROPOSITION **7.7** *À tout diviseur de Cartier D de M, on peut associer un fibré en droites sur M, que nous noterons $\mathcal{O}(D)$ de la façon suivante : On prend le recouvrement qui définit le fibré et les fonctions de transition sont les $\frac{f_\alpha}{f_\beta}$.*

On remarque qu'alors le diviseur de Cartier s'identifie à une section rationnelle du fibré associé. Réciproquement, toute section rationnelle d'un fibré en droites définit un diviseur de Cartier auquel est associé un fibré équivalent au fibré de départ.

De plus, cette section est régulière si les fonctions f_α qui définissent le diviseur de Cartier le sont. Un tel diviseur de Cartier sera dit *effectif.*

DÉFINITION **7.9** *On appelle diviseur principal un diviseur de Cartier auquel est associé un fibré équivalent au fibré trivial.*

DÉFINITION **7.10** *Soit M une variété algébrique affine, V une sous-variété algébrique irréductible de M. Plongeons $F(M)$ dans son localisé en l'idéal premier $I(V)$, que nous noterons $F(M)_V$. Pour f dans $F(M)$, on appelle ordre d'annulation de f le long de V, noté $O_V(f)$, le plus grand entier k tel que $f \in (\mathcal{M}_V)^k$ où $\mathcal{M}_V$ désigne l'idéal maximal de $F(M)_V$.*

THÉORÈME **7.8** *Soit M une variété algébrique affine, V une sous-variété algébrique irréductible de M, f et g deux fonctions régulières non nulles sur M. On fait en outre les deux hypothèses suivantes :*
i) La variété M est irréductible et normale ;
ii) la sous-variété V est de codimension 1.

Alors $O_V(fg) = O_V(f) + O_V(g)$

DÉMONSTRATION Remarquons que si V est de codimension 1, alors l'idéal $I(V)$ ne contient aucun idéal premier non nul (sinon un tel idéal serait celui d'une sous-variété de M de dimension strictement incluse entre celle de V et celle de M, ce qui n'existe pas). Ainsi, le localisé $\tilde{F}$ de $F(M)$ en $I(V)$ ne possède aucun idéal premier non nul excepté son idéal maximal $\tilde{I}$, et donc aussi aucun autre idéal radical non nul, car il est noethérien. L'anneau $\tilde{F}$ est de plus intégralement clos, comme localisé d'un anneau qui l'est.

Plaçons-nous dans le corps des fractions K de $\tilde{F}$, et considérons

$$\tilde{I}^{-1} = \{y \in K \text{ tq } y\tilde{I} \subset \tilde{F}\}$$

Cet ensemble contient clairement $\tilde{F}$ mais ne lui est pas égal. En effet, prenons un élément non nul a de $\tilde{I}$. Comme $\sqrt{< a >} = \tilde{I}$, qui est de type fini, il existe une puissance finie minimale k telle que $\tilde{I}^k \subset < a >$. En prenant alors b dans $\tilde{I}^{k-1} \backslash < a >$, on voit facilement que $\frac{b}{a}$ est dans $\tilde{I}^{-1}$, mais pas dans $\tilde{F}$.

Dans ce cas, l'ensemble $\frac{b}{a}\tilde{I}$ est un idéal de $\tilde{F}$. S'il était inclus dans $\tilde{I}$, on aurait pour tout n, $x_n = a \cdot (\frac{b}{a})^n \in \tilde{I}$. L'idéal de $\tilde{F}$ engendré par tous ces éléments étant de type fini, on pourrait trouver n_0 tel que x_{n_0} soit dans l'idéal engendré par les x d'indices strictement inférieurs. On écrirait alors $x_{n_0} = \sum_{i<n_0} c_i x_i$ avec les c_i dans $\tilde{F}$. En divisant par a cette égalité, on constate que $\frac{b}{a}$ est entier sur $\tilde{F}$, ce qui contredit le fait que $\tilde{F}$ est intégralement clos.

Ainsi, l'idéal $\frac{b}{a}\tilde{I}$ de $\tilde{F}$ n'est pas inclus dans $\tilde{I}$, qui est l'unique idéal maximal de $\tilde{F}$. C'est donc $\tilde{F}$ et l'inverse m de $\frac{b}{a}$ dans K est donc dans $\tilde{F}$ et, n'y étant pas inversible, est dans $\tilde{I}$. Alors, comme $\frac{1}{m} \in \tilde{I}^{-1}$, on a que m engendre $\tilde{I}$, qui est donc principal.

Tout élément non nul x de $\tilde{F}$ s'écrit alors de façon unique sous la forme $x = u \cdot m^{v(x)}$, où $v(x)$ est un entier et u est inversible dans $\tilde{F}$ ($v(x) = 0$ si x est inversible), et, si $f \in F(M)$, on a $O_V(f) = v(f)$.

Le théorème en découle. □

Remarque **7.9** *L'hypothèse de normalité de la variété M est indispensable. Prenons en effet la courbe de $\mathbb{C}^2$ d'équation $X^2 = Y^2(Y+1)$. Nous avons déjà dit que le point $(0,0)$ n'était pas un point normal. Les fonctions régulières $\overline{X-Y}$ et $\overline{X+Y}$ ont toutes deux un ordre d'annulation égal à 1 en ce point. Leur produit, qui vaut $\overline{X^2-Y^2} = \overline{Y^3}$ a un ordre d'annulation qui y est égal à 3.*

Définition **7.11** *Soit M une variété algébrique affine normale irréductible, V une sous-variété algébrique irréductible de codimension 1 de M, $f = \frac{g}{h}$ une fonction rationnelle sur M, on appelle alors ordre d'annulation de f le long de V l'entier $O_V(g) - O_V(h)$, qui, d'après la proposition ci-dessus, ne dépend pas du représentant choisi.*

Si on ne suppose plus M affine, l'ordre d'annulation de f le long de V sera l'ordre d'annulation de sa restriction à U_α le long de $U_\alpha \cap V$, pour un ouvert affine U_α qui rencontre V. Cet ordre ne dépend alors pas de l'ouvert U_α choisi.

L'ordre d'annulation d'une fonction régulière (resp. rationnelle) non nulle le long d'une sous-variété irréductible est un entier naturel (resp. relatif). En effet, l'anneau $F(M)_V$ étant local et noethérien, l'intersection de toutes les puissances de $\mathcal{M}_V$ est réduite à $\{0\}$.

On constate qu'une fonction réguliře sur M s'annule à un ordre ≥ 1 si et seulement si elle est dans $I(V)$. En fait, si elle est dans $I(V)^k$, elle s'annule à l'ordre au moins k le long de V. Mais attention, la réciproque est fausse. En voici un contre-exemple :

Exemple **7.2.1** *Prenons pour M le quotient de $\mathbb{C}^2$ par $\pm Id$. Il s'agit du spectre maximal de l'anneau $\mathbb{C}[X^2, XY, Y^2]$. Soit V la sous-variété de M définie par X^2 (on y pense comme le quotient de la droite d'équation $X = 0$ par $\pm Id$). Alors, $I(V)$ est engendré par X^2 et XY. La fonction régulière X^2 sur M n'est pas dans $I(V)^2$. Toutefois, elle s'écrit $\frac{(XY)^2}{Y^2}$ et, dans le localisé de $\mathbb{C}[X^2, XY, Y^2]$ en $I(V)$, elle est dans le carré de l'idéal maximal. Elle s'annule donc à l'ordre 2 le long de V.*

Proposition **7.10** *À tout diviseur de Cartier D sur une variété normale, on peut associer un diviseur de Weil comme suit : Pour toute sous-variété irréductible V de codimension 1 de M, on associe l'ordre d'annulation $O_V(D)$ de la fonction f_α le long de V, qui ne dépend pas du α choisi. Le diviseur de Weil associé est alors*

$$\sum_V O_V(D)V$$

la somme étant prise sur toutes les sous-variétés irréductibles de codimension 1 de M, dont seules un nombre fini ont un $O_V(D)$ non nul.

De plus, on constate facilement grâce au théorème 7.8 que l'application qui à un diviseur de Cartier associe le diviseur de Weil correspondant est un morphisme de groupes.

On constate aussi que si le diviseur de Cartier D est effectif, alors $O_V(D)$ est positif quel que soit V.

7.3 Diviseurs toriques

Désormais, nous identifierons un diviseur de Cartier avec le diviseur de Weil qui lui est associé.

Sur une variété torique, il existe des diviseurs de Weil particuliers, qu'on appelle diviseurs toriques ou T-diviseurs de Weil, qui sont ceux qui sont stables par l'action torique, et donnés par les adhérences des orbites de codimension 1, soit celles correspondant aux demi-droites de l'éventail définissant la variété, ou des sommes entières de tels diviseurs. Notons $\tau_1, ..., \tau_n$ les cônes de dimension 1 de Δ, et pour chaque i, notons v_i le vecteur primitif de N qui engendre τ_i et D_i l'adhérence de O_{τ_i}. Un T-diviseur de Weil est donc de la forme

$$\sum_i n_i D_i, n_i \in \mathbb{Z}$$

On notera en particulier que le rang du groupe des T-diviseurs de Weil d'une variété torique est égal au nombre de faces de dimension 1 contenues dans l'éventail qui la définit.

Essayons de déterminer lesquels de ces diviseurs correspondent à des diviseurs de Cartier, qu'on appelle alors T-diviseurs de Cartier.

Considérons d'abord les variétés toriques affines. Nous avons dans ce cas :

PROPOSITION **7.11** *Un T-diviseur de Cartier d'une variété torique affine est donné par une fonction rationnelle qui est un monôme dans $\mathbb{C}[N^\vee]$.*

Le T-diviseur de Cartier associé au monôme X^u, où $u \in \mathbb{C}[N^\vee]$ est

$$\sum_i u(v_i) D_i$$

PREUVE Prenons un T-diviseur de Cartier d'une variété torique affine U_σ. Considérons un ouvert définissant U_α qui rencontre l'orbite O_σ, ainsi que la fonction f_α dessus. Cet ouvert rencontre alors toutes les orbites de U_σ, en particulier l'orbite ouverte T_N, et on peut regarder la restriction de f_α à $U_\sigma \cap T_N$. Comme il s'agit d'un ouvert de T_N, qui est birationnellemnt équivalent à T_N, la fonction f_α peut être vue comme une fonction rationnelle sur T_N. Comme le diviseur de Cartier considéré est un T-diviseur, f_α ne peut ni s'annuler ni avoir de singularité dans T_N, et elle est alors régulière et inversible sur T_N. Une telle fonction est alors un monôme de $\mathbb{C}[N^\vee]$. De plus, comme U_α rencontre D_i quel que soit i, l'ordre d'annulation du diviseur considéré le long de D_i est le même que celui de f_α.

Prenons alors un monôme (unitaire) X^u et soit τ_i une face de dimension 1 de σ. Alors, l'ordre d'annulation de X^u le long de D_i est égal à $u(v_i)$. En effet, si on complète v_i en une base $\mathcal{B} = (w_1 = v_i, w_2, ..., w_n)$ de N, alors on peut poser pour $1 \leq j \leq n$, $W_j = X^{w_j^*}$ ù les w_j^* forment la base duale de $\mathcal{B}$. Alors, $X^u = W_1^{u(w_1)} ... W_n^{u(w_n)}$ et l'ordre d'annulation de X^u le long de D_i est alors $u(v_i) O_{D_i}(W_1) + ... + u(w_n) O_{D_i}(W_n)$, et comme $O_{D_i}(W_j)$ vaut 1 si $j = 1$ et 0 sinon, il reste $O_{D_i}(X^u) = u(v_i)$.

La formule de la proposition en découle. $\square$

COROLLAIRE **7.12** *Prenons un T-diviseur de Weil $\sum_i n_i D_i$. Alors, c'est un T-diviseur de Cartier si et seulement si pour tout cône maximal σ de Δ, il existe un élément u_σ de $\sigma^\vee$ tel que pour toute face τ_i de dimension 1 de σ, on ait $u_\sigma(v_i) = n_i$.*

COROLLAIRE **7.13** *Sur une variété torique lisse, tout T-diviseur de Weil est un T-diviseur de Cartier.*

En effet, dans ce cas, pour tout cône σ, les v_i correspondants forme une partie d'une base de $N^\vee$ et le corollaire précédent s'applique.

EXEMPLE **7.3.1** *Plaçons-nous sur $\mathbb{C}^n$, variété torique lisse donnée par le cône $(\mathbb{R}_+)^n$ de $\mathbb{R}^n$ muni du réseau $\mathbb{Z}^n$. Les faces de dimension 1 de ce cône sont les demi-droites* *engendrées par les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, vecteurs qui sont primitifs. Le diviseur de Weil associé à la demi-droite d'indice i est $\mathbb{C}^{i-1} \times \{0\} \times \mathbb{C}^{n-i}$, soit a pour équation $z_i = 0$ dans $\mathbb{C}^n$.*

Si on se donne un diviseur de Weil torique $\sum_i n_i D_i, n_i \in \mathbb{Z}$, on voit que c'est le diviseur de Weil associé au diviseur de Cartier donné sur tout $\mathbb{C}^n$ par $\prod_i z_i^{n_i}$.

Exemple **7.3.2** *Considérons la variété lisse donnée par le réseau $\mathbb{Z}^2$ de $\mathbb{R}^2$ et l'éventail ayant pour cônes maximaux $\sigma = (\mathbb{R}_+)^2$ et le cône $\sigma' : 0 \leq -x \leq y$. La variété est lisse et l'éventail possède trois cônes de dimension 1 engendrés par les vecteurs primitifs respectifs $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ et $v_3 = (-1,1)$.*

Le diviseur D_1 associé à v_1 peut être donné par une fonction qui le définit sur U_σ, soit X, et par une fonction constante (disons 1) sur $U_{\sigma'}$. En effet, l'intersection de ces deux variétés est la variété torique associé à la demi-droite engendrée par v_1, qui correspond à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ dans $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^2$. Ainsi, le quotient des deux fonctions est bien une fonction régulière inversible sur $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

De même, le diviseur D_3 peut être défini par une fonction qui le définit sur $U_{\sigma'}$, et par une fonction constante sur U_σ.

Pour D_2, qui est l'adhérence d'une orbite incluse dans chacune des deux variétés affines, on prend pour le définir une fonction qui définit le diviseur correspondant sur U_σ, ce qui donne Y et sur $U_{\sigma'}$, ce qui donne XY. À nouveau, sur l'intersection, le quotient de ces deux fonctions, qui est X ou X^{-1} est bien une fonction régulière inversible.

Tous les T-diviseurs de Weil sont bien des T-diviseurs de Cartier.

Si on ne prend plus une variété lisse, même affine, les T-diviseurs de Weil ne sont plus forcément des T-diviseurs de Cartier.

Exemple **7.3.3** *Considérons la variété torique affine M définie par le réseau $N = \mathbb{Z}^2$ de $\mathbb{R}^2$ et le cône suivant :*

$$\begin{cases} x & \geq & 0 \\ 2x - y & \geq & 0 \end{cases}$$

Alors, soient $v = (1,0)$ et $v' = (1,2)$ les générateurs primitifs des arêtes de ce cône. On remarque que si $l \in N^\vee$, alors $l(v') - l(v) = 2l(0,1)$. Donc, si on appelle D_1 le diviseur de Weil torique associé à v et D_2 celui associé à v', et si $n_1 D_1 + n_2 D_2$ est un diviseur de Cartier de M, on doit avoir n_1 et n_2 de même parité. Réciproquement, si on prend deux entiers n_1 et n_2 de même parité, il est facile de constater que la forme linéaire valant n_1 sur v et n_2 sur v' est dans $N^\vee$ et qu'alors $n_1 D_1 + n_2 D_2$ est bien un diviseur de Cartier de M.

Exemple **7.3.4** *Considérons la variété torique affine M définie par le réseau $N = \mathbb{Z}^3$ de $\mathbb{R}^3$ et le cône donné par $x = \max(|x|, |y|, |z|)$. Ce cône possède quatre faces de dimension 1, de générateurs primitifs $v_{\pm 1,\pm 1} = (1, \pm 1, \pm 1)$ auxquel on associe les quatre diviseurs de Weil $D_{\pm 1,\pm 1}$. Si on prend une forme linéaire l sur $\mathbb{R}^3$, elle vérifie $l(v_{1,1}) + l(v_{-1,-1}) = l(v_{1,-1}) + l(v_{-1,1})$.*

Réciproquement, toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ vérifiant les égalités précédentes et à valeurs entières et de même parité en les $v_{\pm 1,\pm 1}$ est dans $N^\vee$.

Ainsi, un diviseur de Weil $\sum n_{\pm 1,\pm 1} v_{\pm 1,\pm 1}$ est un diviseur de Cartier de M si et seulement si tous les $n_{\pm 1,\pm 1}$ ont même parité et si $n_{1,1} + n_{-1,-1} = n_{1,-1} + n_{-1,1}$.

En fait, nous avons le simple résultat suivant :

Proposition **7.14** *Le rang du groupe des T-diviseurs de Cartier d'une variété torique affine est égal à la dimension du cône qui la définit.*

Preuve En fait, il s'agit simplement du rang de l'image de l'application linéaire de $\sigma^\vee$ dans $\mathbb{Z}^r$, qui à $u \in \sigma^\vee$ associe $u(v_1), ..., u(v_r)$ où les v_i sont les générateurs primitifs des faces de dimension 1 de σ. Il s'agit donc de la dimension de l'espace engendré par les v_i, qui n'est autre que la dimension de σ. □

7.4 Géométrie des sections

Nous nous intéressons ici aux sections régulières des fibrés et a leurs conséquences quant à la géométrie des variétés toriques.

Rappelons qu'à tout diviseur de Cartier D d'une variété torique correspond un fibé en droite $\mathcal{O}(D)$ qui a une section rationnelle qu'on peut identifier à D.

En fait, tout fibré en droites sur une variété torique est de la forme $\mathcal{O}(D)$ pour un diviseur de Cartier torique D bien choisi. (Nous admettron ce fait qui résulte de l'existence de sections rationnelles). Déterminons les sections régulières d'un tel fibré.

Considérons le fibré $\mathcal{O}(D)$, où $D = \sum_i n_i D_i$ est un diviseur de Cartier de U_σ. Prenons une section rationnelle de $\mathcal{O}(D)$ et, pour tout i, regardons-la sur un ouvert définissant U_{α_i} qui rencontre D_i. La fonction s_{α_i} ainsi obtenue peut être vue comme fonction rationnelle sur T_N et nous avons :

Proposition **7.15** *La section rationnelle considérée ci-dessus est une section régulière de $\mathcal{O}(D)$ si et seulement si on a pour tout i, $O_{D_i}(s_{\alpha_i}) \geq -n_i$.*

Preuve Si on a, pour tout i, $O_{D_i}(s_\alpha) \geq -n_i$, alors le quotient de s_α par le diviseur D (vu comme fonction) est une fonction régulière dans chaque ouvert définissant, donc aussi sur la variété torique, et le produit d'une fonction régulière par une section régulière est une section régulière.

Réciproquement, si pour un certain i, on a $O_{D_i}(s_\alpha) < -n_i$, alors la section n'est pas régulière sur D_i. $\square$

On peut dire les choses autrement : Si on considère dans V^* l'ensemble P_D des formes linéaires u pour lesquelles on a, pour tout i, $u(v_i) \geq n_i$ (remarquons que cet ensemble est une intersection de demi-espaces fermés de V^*), alors l'ensemble des sections régulières du fibré considéré est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les $X^u, u \in P_D \cap N^\vee$.

Corollaire **7.16** *Si les vecteurs v_i engendrent V en tant que cône, alors l'espace des sections régulières de n'importe quel fibré sur $X(\Delta)$ est de dimension finie.*

C'est le cas en particulier si $X(\Delta)$ est complète.

En effet, dans ce cas, l'ensemble P_D est compact et son intersection avec un réseau de V^* est donc finie.

Nous nous intéressons maintenant au cas où tous les cônes maximaux sont de dimension n, en particulier le cas des variétés toriques complètes. On se donne un T-diviseur de Cartier $D = \sum_i n_i D_i$ d'une telle variété torique.

Définition **7.12** *On appelle ψ_D la fonction sur $|\Delta|$ qui, sur chaque cône maximal σ de Δ, coïncide avec la forme linéaire u_σ.*

On dira que ψ_D est concave si, pour tout cône maximal σ de Δ, on a $\psi_D \leq u_\sigma$ (sur $|\Delta|$).

Remarque **7.17** *Si Δ est complet, alors la fonction ψ_D est concave si et seulement si on a, pour tous x et y de V, et $t \in [0;1]$, $\psi_D(tx+(1-t)y) \geq t\psi_D(x)+(1-t)\psi_D(y)$. Autrement dit ψ_D est concave si et seulement si elle l'est "au sens classique".*

En effet, si ψ_D est concave, alors soit σ' un cône maximal de Δ contenant $z = tx + (1-t)y$, qui existe par complétude de Δ. Alors $\psi_D(z) = u_{\sigma'}(z) = t(u_{\sigma'}(x)) + (1-t)(u_{\sigma'}(y)) \geq t(\psi_D(x)) + (1-t)(\psi_D(y))$.

Réciproquement, si on peut trouver σ et y tels que $\psi_D(y) > u_\sigma(y)$, alors pour x dans l'intérieur de σ et t strictement positif assez petit, on aura $tx + (1-t)y$ dans σ et alors $\psi_D(tx + (1-t)y) = u_\sigma(tx + (1-t)y) = t(u_\sigma(x)) + (1-t)(u_\sigma(y)) < t(\psi_D(x)) + (1-t)(\psi_D(y))$.

Définition **7.13** *Un fibré en droites sur une variété M est dit engendré par ses sections si, pour tout point x de M, il existe une section régulière de ce fibré qui ne s'annule pas au point x.*

REMARQUE **7.18** *Si un fibré en droites W sur une variété M est engendré par ses sections, et si l'espace de ses sections est de dimension finie, alors le fibré définit un morphisme de M dans un espace projectif complexe comme suit : Pour tout x de M, l'évaluation en x d'une section est une application de l'ensemble des sections du fibré dans la fibre au-dessus de x, qui est une droite vectorielle. Si on la compose avec un isomorphisme de cette fibre dans $\mathbb{C}$, on obtient une forme linéaire γ_x sur $\Gamma(W, M)$, qui ne dépend que de x à multiple près, et qui n'est nulle pour aucun x car W est engendré par ses sections. Ainsi, l'image de γ_x dans le projectifié du dual de $\Gamma(W, M)$ est bien définie et on obtient ainsi un morphisme de M dans $\mathbb{P}(\Gamma(W))^*$. Ce morphisme sera noté ϕ_W.*

On a alors :

PROPOSITION **7.19** *Soit Δ un éventail dont tous les cônes maximaux sont de dimension n, $X(\Delta)$ la variété torique associée, D un T-diviseur de Cartier de $X(\Delta)$. Alors, le fibré $\mathcal{O}(D)$ est engendré par ses sections si et seulement si la fonction ψ_D est concave.*

PREUVE Supposons que $\mathcal{O}(D)$ soit engendré par ses sections, avec $D = \sum_i n_i D_i$. Alors, pour tout cône maximal σ de Δ, il existe une section s de W qui n'est pas nulle au point fixe associé à σ, ce qui correspond à une fonction linéaire u sur V telle que $u(v_i) \geq -n_i$ pour tout i et pour laquelle on a l'égalité si $v_i \in \sigma$. Comme σ est de dimension n, cette fonction ne peut qu'être u_σ, et donc on a, pour tout i, $u_\sigma(v_i) \geq -n_i$. Si maintenant un point x est dans un cône σ' de Δ, alors on peut l'écrire $\sum \lambda_i v_i$ où les v_i sont dans σ'. Alors, $u_\sigma(x) = \sum \lambda_i u_\sigma(v_i) \geq \sum \lambda_i(-n_i) = \sum \lambda_i u_{\sigma'}(v_i) = u_{\sigma'}(x) = \psi_D(x)$. Donc ψ_D est bien concave.

Supposons réciproquement que ψ_D soit concave. Alors, si on se fixe un point x d'un cône σ, la section rationnelle associée à u_σ est régulière par concavité de ψ_D et est non nulle en x. Donc le fibré $\mathcal{O}(D)$ est bien engendré par ses sections. $\square$

On suppose maintenant que Δ est complet et que $\mathcal{O}(D)$ est engendré par ses sections. D'après la remarque ci-dessus, ce fibré définit un morphisme de $X(\Delta)$ dans un certain espace projectif. On se demande à quelle condition ce morphisme est un plongement, auquel cas le diviseur D et le fibré $\mathcal{O}(D)$ sont dits *très amples*.

DÉFINITION **7.14** *Une application f de Δ dans $\mathbb{R}$ qui est linéaire sur chaque cône est dite fortement concave si elle est concave et si, quels que soient x et y dans v et $t \in]0; 1[$, $f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y)$ implique que x et y appartiennent à un même cône de Δ.*

On obtient alors :

Proposition **7.20** *Un diviseur torique D d'une variété torique complète $X(\Delta)$ est très ample si et seulement si ψ_D est fortement concave et si, pour tout cône maximal σ de Δ, l'ensemble $\{u - u_\sigma, u \in P_D \cap N^\vee\}$ engendre S_σ.*

Preuve L'espace des sections $\Gamma(\mathcal{O}(D), X(\Delta)$ est engendré par les X^u pour u dans $P_D \cap N^\vee$. Le projectifié de son dual est alors défini par les V_u, où V_u est l'ouvert affine correspondant aux formes qui n'annulent pas X^u. De plus, la section X^{u_σ} ne s'annule pas sur l'ouvert affine U_σ de $X(\Delta)$, mais s'annule sur tous les autres points de $X(\Delta)$, par forte concavité de ψ_D. En effet, si $v_i \notin \sigma$, alors $u_\sigma(v_i) > \psi_D(v_i)$ et donc la section X^{u_σ} est nulle le long de D_i. Or la réunion de ces D_i est le complémentaire de U_σ dans $X(\Delta)$.

L'image réciproque par l'application ϕ_W de l'ouvert V_{u_σ} est donc U_σ, et dire que l'application ϕ_W induit un plongement de U_σ dans V_{u_σ} revient à dire que l'application de $\mathbb{C}[Y_u, u \in P_D \cap N^\vee]$ dans $\mathbb{C}[S_\sigma]$ qui à Y_u fait correspondre X^{u-u_σ} est surjective, ce qui revient à ce que $\{u - u_\sigma, u \in P_D \cap N^\vee\}$ engendre S_σ. $\square$

Définition **7.15** *Un diviseur de Cartier torique D et le fibré $\mathcal{O}(D)$ associé sont dits amples s'il existe un entier $n_0 > 0$ tel que $n_0 D$ soit très ample. Dans ce cas, pour tout entier n assez grand, le fibré nD sera très ample.*

Corollaire **7.21** *Un diviseur torique D d'une variété torique complète $X(\Delta)$ est ample si et seulement si ψ_D est fortement concave.*

De plus, tout diviseur ample d'une variété torique complète lisse est très ample.

En particulier, un fibré ample sur une telle variété torique est forcément engendré par ses sections, et ceci n'est pas forcément vrai dans un autre cadre que le cadre torique.

Preuve On a, pour tous D et n, $\psi_{nD} = n\psi_D$. Ainsi, sii un diviseur de Cartier torique D est ample, alors $n\psi_D$ est fortement concave pour un certain $n > 0$, et donc ψ_D l'est.

Réciproquement, si ψ_D est fortement concave, alors ψ_{nD} l'est pour tout $n > 0$, et, pour tout cône σ, P_{nD} contient $nu_\sigma + A_n$ où A_n est l'intersection de $sigma^\vee$ avec les formes linéaires positives sur σ et valant au moins $-n$ sur chaque v_i hors de σ. Il est clair que la réunion des A_n fait $sigma^\vee$ et, comme S_σ est engendré par un nombre fini d'éléments, on peut trouver n_0 tel que $A_{n_0} \cap N^\vee$ engendre S_σ et alors $\{u - nu_\sigma, u \in P_{nD} \cap N^\vee\}$ engendre bien S_σ pour tout $n \geq n_0$.

Dans le cas où $X(\Delta)$ est lisse, chaque cône maximal σ est engendré par une base $(v_1, ..., v_n)$ de N, et S_σ est engendré par la base duale $(u_1, ..., u_n)$ de celle-ci. Or, si ψ_D est fortement concave, on a, pour $1 \leq i \leq n$, $u_\sigma + u_i$ dans P_D. En effet, si on considère le cône $\sigma(i)$ qui contient la facette de σ ne contenant pas v_i, alors

$u_{\sigma(i)} = u_\sigma + nu_i$ où $n = u_{\sigma(i)}(v_i) - u_\sigma(v_i)$ est entier strictement positif. Donc, $\psi_D \leq \min(u_\sigma, u_\sigma + nu_i) \leq u_\sigma + u_i$.

La proposition nous assure alors que D est très ample. □

Exemple **7.4.1** *Voici un exemple de variété torique complète, et lisse, qui ne peut pas se plonger dans un espace projectif. Considérons les vecteurs suivants de* $\mathbb{R}^3$: $v_i, 1 \leq i \leq 3$ *sont les vecteurs de la base canonique,* w *est l'opposé de leur somme et* $u_i = v_i + w, 1 \leq i \leq 3$. *On considère l'éventail* Δ*formé des cônes suivants :* σ *le cône engendré par les* v_i, $\sigma'_i, 1 \leq i \leq 3$ *engendré par* w *et deux des* u_i, $\tau_i, 1 \leq i \leq 3$ *engendré par* u_i, v_i *et* u_{i+1} *et* $\tau'_i, 1 \leq i \leq 3$ *engendré par* u_i, v_i *et* v_{i-1}, *où on prend les indices modulo* 3.

On vérifie facilement que la variété $X(\Delta)$ *est lisse et complète. D'autre part, si on avait une fonction strictement concave* ψ *compatible avec* Δ, *on aurait, pour* x *valant* u_i, v_i *ou* u_{i+1}, $\psi(x) = u_{\tau_i}(x)$ *et* $\psi(v_{i+1}) < u_{\tau_i}(v_{i+1})$. *Comme* $u_i + v_{i+1} = u_{i+1} + v_i$, *on peut affirmer que* $\psi(u_i) + \psi(v_{i+1}) < \psi(u_{i+1}) + \psi(v_i)$, *et ce pour* $1 \leq i \leq 3$. *La somme de ces trois inégalités strictes apporte une contradiction.*

Une telle fonction ψ *ne pouvant exister, aucun fibré de la forme* $\mathcal{O}(D)$ *ne peut être ample et comme tous les fibrés en droites sur* $X(\Delta)$ *sont de cette forme,* $X(\Delta)$ *ne peut pas se plonger dans un espace projectif.*