Un résultat de finitude dans le spectre automorphe pour les formes intérieures de GL_n sur un corps global

Abstract : We prove that for an inner form of GL_n over a global field of zero characteristic there exists only a finite number of automorphic representations with fixed local factor (up to equivalence) at almost every place. What is new compairing to [BB] is the case when local factors are not fixed at the infinte places, and the statement of the result for the automorphic spectrum instead of the cuspidal one.

Résumé : Nous montrons que, pour une forme intérieure de GL_n sur un corps global, il existe un nombre fini de représentations automorphes à composante locale fixée (à équivalence près) à presque toutes les places. Ce qui est nouveau par rapport à [BB] est le cas où les composantes aux places infinies ne sont pas fixées, et l'énoncé du résultat pour le spectre automorphe en général.

Introduction, le théorème.

Soient F un corps global de caractéristique nulle et G une forme intérieure de GL_n sur F. Pour toute place v de F on note F_v la complétion de F en v et G_v le groupe $G(F_v)$. On note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F. Soit π une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ (voir [BJ]; l'irréductibilité fait partie de la définition). Alors π est un produit restreint de représentations irréductibles des groupes G_v sur toutes les places v (voir [Fl]). On notera dans ce cas π_v la composante locale de π en la place v. Soit S un ensemble fini de places de F. Pour toute place $v \notin S$ de F on fixe une représentation admissible irréductible σ_v de G_v. Soit A l'ensemble de représentations automorphes π de $G(\mathbb{A})$ telles que π_v soit équivalente à σ_v pour toute place $v \notin S$ de F. Le but de ce papier est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1. *L'ensemble A est fini.*

Si la restriction de ce théorème au spectre cuspidal était suffisante pour prouver la correspondance de Jacquet-Langlands locale, la variante automorphe nous semble essentielle pour toute tentative de preuve de la correspondance de Jacquet-Langlands globale plus générale qu'avec une algèbre à division. Une telle corespondance fera automatiquement intervenir le spectre résiduel aussi.

Le reste de cet article consiste en la rédaction de la preuve du théorème 1. Je remercie Guy Henniart qui m'a poussé à faire les calculs sur les places infinies complétant ainsi le résultat de [BB]. Je remercie Joachim Mahnkopf avec qui j'ai eu des discussions très instructives à ce sujet.

La preuve.

Une variante plus faible du théorème à été prouvée dans [BB]. Nous commençons par la

Proposition 2. *Le théorème 1 est vrai si S ne contient pas de place infinie.*

Démonstration. Dans [BB] nous montrons que, si S ne contient pas des places infinies, l'ensemble des représentations *cuspidales* π telles que π_v est équivalente à σ_v pour tout $v \notin S$ est fini. La démonstration marche directement pour les représentations automorphes en général, du moins en caractéristique nulle, en modifiant un argument : l'équation fonctionnelle globale ([GJ], cor.13.8) qu'on y utilise pour les représentations cuspidales, est vraie en général pour les automorphes ([Ja], th.6.2, qui est enoncé pour GL_n, mais le même argument vaut pour les formes intérieures). Ramarquons que le résultat de finitude en caractérsitique nulle 4.3(i) dans [BJ] qu'on utilise dans [BB] vaut pour les représentations automorphes en général. □

À ce stade, on voit bien que le théorème 1 se réduit à une investigation sur les places infinies contenues dans S. Plus précisément, pour montrer que ce théorème est vrai, il suffit de montrer que les représentations dans A n'ont qu'un nombre fini de choix quant aux classes d'équivalence de leurs composantes à l'infini. Si A est vide, le résultat est évident. On suppose dorénavant que A est non vide. Soit $\pi \in A$. Le facteur ϵ' de π_v est fixé pour toute place $v \notin S$. Par l'équation fonctionnelle globale de Godement et Jacquet ([GJ] pour les représentations cuspidales, [Ja] pour les automorphes en général), le produit $\prod_{v\in S} \epsilon'(\pi_v, \psi_v, s)$ est une fonction méromorphe M, la même pour toute représentations $\sigma \in A$. On a donc

$$(1) \qquad \prod_{v \text{ infinie } \in S} \epsilon'(\pi_v, \psi_v, s) \prod_{v \text{ finie } \in S} \epsilon'(\pi_v, \psi_v, s) = M(s).$$

Nous savons que les facteurs ϵ' apparaissant dans le produit sur les places finies sont du type quotient de polynômes en la variable q^s, où q est un entier positif. Les facteurs ϵ' apparaissant dans le produit sur les places infinies sont d'une nature essentiellement différente (quotients de fonction Γ) et c'est cette différence qui nous permettra de conclure que la relation 1 impose un nombre fini de possibilités pour les composantes locales à l'infini de π. Ceci explique l'approche suivante et l'énoncé de la proposition 3.

Soient G_1, G_2... G_k des groupes tels que, pour tout i, on ait :

$$G_i = GL_{n_i}(H_i) \qquad n_i \in \mathbb{N}^*,\ H_i \in \{\mathbb{R}; \mathbb{C}; \mathbb{H}\},$$

où $\mathbb{H}$ est l'algèbre des quaternions sur $\mathbb{R}$.

Pour chaque i on pose
$\psi_i(x) = e^{2i\pi x}$ si $H_i = \mathbb{R}$,
$\psi_i(x) = e^{2i\pi(x+\bar{x})}$ si $H_i = \mathbb{C}$ et
$\psi_i(x) = e^{2i\pi(x+\bar{x})}$ où $^-$ désigne la conjugaison principale dans $\mathbb{H}$ si $H_i = \mathbb{H}$.

Les facteurs ϵ' de Godement-Jacquet des représentations de G_i seront calculés par raport aux ψ_i.

Soient $a_1, a_2 ... a_t$ des nombres réels positifs distincts deux à deux. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble formé de toutes les fonctions du type $\prod_{j=1}^t P_j(a_j^s)\big(\prod_{j=1}^t Q_j(a_j^s)\big)^{-1}$ où les P_j et les Q_j sont des polynômes complexes non nuls (on pense au produit sur les places finies dans l'équation 1). Soit X_M l'ensemble de tous les k-uplests $(\pi_1; \pi_2 ... \pi_k)$ tels que, pour tout i, π_i est une représentation admissible irréductible de G_i et il existe $f \in \mathcal{F}$ telle que

$$\prod_{i=1}^k \epsilon'(s; \pi_i; \psi_i) f(s) = M(s).$$

Proposition 3. *L'ensemble X_M est fini.*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que, par le théorème de Harish-Chandra, pour tout i il existe des représentations irréductibles $\chi_{i,1}, \chi_{i,2} ... \chi_{i,n_i}$ de H_i^* telles que π_i soit un sous-quotient de $ind_{P_i}^{G_i} \chi_{i,1} \otimes \chi_{i,2} ... \otimes \chi_{i,n_i}$, où P_i est le groupe des matrices triangulaires supérieures dans G_i et $\chi_{i,1} \otimes \chi_{i,2} ... \otimes \chi_{i,n_i}$ est vu comme une représentation du tore diagonal. Par le corollaire 8.9 de [GJ] on a dans ce cas :

$$\epsilon'(s; \pi_i; \psi_i) = \prod_{j=1}^{n_i} \epsilon'(s; \chi_{i,j}; \psi_i)$$

Finalement, $\prod_{i=1}^k \epsilon'(s; \pi_i; \psi_i)$ est égal à un produit $\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \epsilon'(s; \chi_{i,j}; \psi_i)$ où, pour tout i et tout j, $\chi_{i,j}$ est une représentation irréductible de H_i^*. Donc le théorème à démontrer serait une conséquence des deux faits suivants :

a) si on connaît l'ensemble $\{\chi_{i,j}\}_{i \in \{1,2...k\} j \in \{1,2...n_i\}}$, alors on a un nombre fini de possibilités pour les π_i;

b) connaissant M et sachant qu'il existe $f \in \mathcal{F}$ telle que

$$\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \epsilon'(s; \chi_{i,j}; \psi_i) f(s) = M(s),$$

il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour l'ensemble $\{\chi_{i,j}\}_{i,j}$.

Le point a) est évident, puisqu'il y a un nombre fini de choix de n_i caractères dans un ensemble fini $\{\chi_{i,j}\}_{i,j}$ (combinaisons avec répétition) et qu'une induite $ind_{P_i}^{G_i} \chi_{i,1} \otimes \chi_{i,2} ... \otimes \chi_{i,n_i}$ est de longueur finie. Reste à prouver le point b).

Proposition 4. *Soit χ une représentation irréductible de H_i^*. Alors, en notant Γ la fonction d'Euler, on a :*

- si $H_i = \mathbb{R}$ alors

$$\epsilon'(s; \chi; \psi_i) = K\pi^s \frac{\Gamma(-\frac{s}{2} + z)}{\Gamma(\frac{s}{2} + z')},$$

où K est un nombre complexe non nul, z et z' sont des nombres complexes ;

- si $H_i = \mathbb{C}$ alors

$$\epsilon'(s;\chi;\psi_i) = K(2\pi)^{2s}\frac{\Gamma(-s+z)}{\Gamma(s+z')},$$

où K est un nombre complexe non nul, z et z' sont des nombres complexes ;

- si $H_i = \mathbb{H}$ alors

$$\epsilon'(s;\chi;\psi_i) = K\pi^{2s}\frac{\Gamma(-\frac{s}{2}+z_1)\Gamma(-\frac{s}{2}+z_2)}{\Gamma(\frac{s}{2}+z_1')\Gamma(\frac{s}{2}+z_2')},$$

où K est un nombre complexe non nul, z_1, z_2, z_1' et z_2' sont des nombres complexes.

Démonstration. *Cas réel.*
Si $H_i = \mathbb{R}$ alors χ est forcément une représentation de dimension 1 de la forme

$$\chi(x) = |x|^u$$

ou de la forme

$$\chi(x) = x^{-1}|x|^u,$$

où u est un nombre complexe ([We], prop.9, page 117).

Dans le premier cas, on choisit pour le calcul du facteur ϵ' la fonction à décroissance rapide $\Phi(x) = e^{-\pi x^2}$. La transformée de Fourier de cette fonction est $\hat{\Phi}(x) = ke^{-\pi x^2}$, $k \in \mathbb{C}^*$ ([We], Prop.4, page 109; attention, dans les notations de Weil, $\mathbf{e}(-x)$ veut dire $\exp(2\pi i x)$). Dans [We], prop.8, page 200, Weil fait le calcul des intégrales qu'il nous faut. On a, avec ses définitions,

$$\epsilon'(s;\chi;\psi_i) = k'\frac{I(1-s+u)}{I(s+u)} = k'\frac{\pi^{-\frac{1-s+u}{2}}\Gamma(\frac{1-s+u}{2})}{\pi^{-\frac{s+u}{2}}\Gamma(\frac{s+u}{2})},$$

où k' est une constante complexe non nulle.

Si $\chi(x) = x^{-1}|x|^u$, on choisit $\Phi(x) = xe^{-\pi x^2}$, avec une transformée de Fourier $\hat{\Phi}(x) = kxe^{-\pi x^2}$, $k \in \mathbb{C}^*$ ([We], Prop.4, page 109), et on trouve comme plus haut :

$$\epsilon'(s;\chi;\psi_i) = k'\frac{I(1-s+u+2)}{I(s+u)} = k'\frac{\pi^{-\frac{3-s+u}{2}}\Gamma(\frac{3-s+u}{2})}{\pi^{-\frac{s+u}{2}}\Gamma(\frac{s+u}{2})},$$

où k' est une constante complexe non nulle.

Cas complexe.
Si $H_i = \mathbb{C}$ alors χ est forcément une représentation de dimension 1 donné par

$$\chi(x) = x^{-l}|x|^u$$

ou bien par

$$\chi(x) = \bar{x}^{-l}|x|^u$$

où u est un nombre complexe et l est un nombre entier positif ([We], prop.9, page 117).

Dans le premier cas, on choisit pour le calcul du facteur ϵ' la fonction à décroissance rapide $\Phi(x) = x^l e^{-\pi|x|^2}$. La transformée de Fourier de cette fonction est $\hat{\Phi}(x) = k\bar{x}^l e^{-\pi|x|^2}$, $k \in \mathbb{C}^*$ ([We], Prop.5, page 110). On trouve ([We], prop.8, page 200)

$$\epsilon'(s;\chi;\psi_i) = k'\frac{I(2l+1-s+u)}{I(s+u)} = k'\frac{(2\pi)^{-(2l+1-s+u)}\Gamma(2l+1-s+u)}{(2\pi)^{-(s+u)}\Gamma(s+u)},$$

où k' est une constante complexe non nulle.

Si $\chi(x) = \bar{x}^{-l}|x|^u$, on choisit $\Phi(x) = \bar{x}^l e^{-\pi x^2}$, avec une transformée de Fourier $\hat{\Phi}(x) = k^{-l}xe^{-\pi x^2}$, $k \in \mathbb{C}^*$ et après calcul on trouve le même résultat que plus haut (cela prouve en particulier que deux représentations différentes peuvent avoir le même facteur ϵ').

Les quaternions. Si $H = \mathbb{H}_i$, alors, en utilisant les résultats de [JL] on a que le facteur ϵ' de χ est égal, à une constante non nulle prés, au facteur ϵ' d'une série discrète π de $GL_2(\mathbb{R})$. D'autre part, il existe deux représentations irréductibles χ_1 et χ_2 de $\mathbb{R}^*$ telles que le facteur ϵ' de π soit égal au produit des facteurs ϵ' de χ_1 et χ_2, (π étant sous-quotient d'une induite à partir de $\chi_1 \otimes \chi_2$). Le résultat dans ce cas est alors une conséquence du cas réel plus haut. $\square$

Pour le cas complexe, on peut transformer la formule du facteur ϵ' trouvée par le lemme en appliquant la formule $\Gamma(s) = \pi^{-\frac{1}{2}}2^{s-1}\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})$. Ainsi, dans les trois cas on trouve des fonctions Γ "en $\frac{s}{2}$".

Ceci implique que M peut s'écrire sous la forme suivante :

$$M(s) = Ka^s\frac{\prod_{i=1}^{k}\Gamma(-\frac{s}{2}+z_i)}{\prod_{i'=1}^{k'}\Gamma(\frac{s}{2}+z_{i'})}f(s),$$

où k et k' sont des entiers strictement positifs, $K \in \mathbb{C}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, z_i, $z_{i'} \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{F}$.

Lemme 5. *Il existe un ensemble fini A_M, construit à partir de M, tel que, pour toute écriture comme plus haut, tous les z_i et les $z_{i'}$ se trouvent dans A_M.*

Démonstration. Donnons d'abord un exemple : la fonction $g(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(-s)}$ est aussi égale à $-\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(-s+1)}$, tenant compte de la relation classique $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. En prenant, par exemple, les carrés de ces deux écritures, le signe moins disparaît et donc la fonction g^2 peut s'écrire au moins de deux façons différentes sous la forme de quotient de produit de fonctions Γ. Il n'y a donc pas unicité; le lemme à montrer n'est qu'un résultat de finitude.

On écrit

$$M(2s) = Ka^{2s}\frac{\prod_{i=1}^{k}\Gamma(-s+z_i)}{\prod_{i'=1}^{k'}\Gamma(s+z_{i'})}f(2s),$$

et alors

$$M(2s+2) = Ka^{2s+2}\frac{\prod_{i=1}^{k}\Gamma(-s+z_i-1)}{\prod_{i'=1}^{k'}\Gamma(s+z_{i'}+1)}f(2s+2).$$

En utilisant maintenant les relation

$$\Gamma(-s+z_i) = (-s+z_i-1)\Gamma(-s+z_i-1)$$

et

$$\Gamma(s+z_{i'}+1) = (s+z_{i'})\Gamma(s+z_{i'})$$

on trouve que

$$\text{(2)} \qquad \frac{M(2s)}{M(2s+2)} = a^{-2}\prod_{i=1}^{k}(-s+z_i-1)\prod_{i'=1}^{k'}(s+z_{i'})\frac{f(2s)}{f(2s+2)}.$$

La fonction $\frac{f(2s)}{f(2s+2)} \in \mathcal{F}$ a une propriété très forte : si elle admet x pour zéro ou pôle, alors, pour au moins un a_j elle admettra aussi $x + m\pi i(\ln a_j)^{-1}$ pour zéro ou pôle pour presque tout m entier. Dès lors il est assez clair que le polynôme $\prod_{i=1}^{k}(-s+z_i-1)\prod_{i'=1}^{k'}(s+z_{i'})$ est uniquement déterminé par la connaissance de la fonction $\frac{M(2s)}{M(2s+2)}$. J'en donne toutefois une preuve.

Soit U l'ensemble des x tels que x est un zéro ou un pôle de $\frac{M(2s)}{M(2s+2)}$. Pour chaque j on note U_j le sous-ensemble de U formé de ces x pour lesquels, pour tout entier m excepté peut être un nombre fini, on a $x + m\pi i(\ln a_j)^{-1} \in U$. Pour chaque j, on note u_j un système de représentants dans U_j pour la relation d'équivalence $x \cong y$ si $x - y$ est un multiple entier de $\pi i(\ln a_j)^{-1}$. L'egalité 2 implique :

1) L'ensemble $U \setminus \bigcup_{1\le j\le t} U_j$ est fini.

2) Pour chaque j, u_j est fini.

3) Pour chaque $x \in U_j$, il existe un entier $m_{\infty,j}(x)$ tel que, pour tout entier m sauf un nombre fini, la multiplicité algébrique du zéro ou pôle $x + \pi m i(\ln a_j)^{-1}$ pour $\frac{M(2s)}{M(2s+2)}$ est égale à $m_{\infty,j}(x)$.

Posons $g(s) = \prod_{1\le j\le t}\prod_{x\in u_j}(a_j^s - a_j^x)^{m_{\infty,j}(x)}$. Toujours la relation 2 montre que $\frac{M(2s)}{M(2s+2)}(g(s))^{-1}$ est un polynôme, multiple scalaire de $\prod_{i=1}^{k}(-s+z_i-1)\prod_{i'=1}^{k'}(s+z_{i'})$. La fonction $g(s)$ a été construite à partir de $\frac{M(2s)}{M(2s+2)}$. Connaissant M, on connaît donc $\frac{M(2s)}{M(2s+2)}(g(s))^{-1}$. $\square$

Rappelons qu'on est en train de montrer le point b), page 3. Partons de la relation

$$f(s)\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i}\epsilon'(s;\chi_{i,j};\psi_i)=M(s).$$

Fixons un couple (i,j). Si $H_i=\mathbb{R}$, par exemple, alors ou bien $\chi_{i,j}(x)=|x|^u$ ou bien $\chi_{i,j}(x)=x^{-1}|x|^u$. Dans les deux cas on doit avoir, en particulier, en appliquant le lemme plus haut à f, que $u/2\in A_M$. Cela donne un nombre fini de possibilités pour u, et donc un nombre fini de possibilités, maximum deux fois plus, pour $\chi_{i,j}$. Le cas $H_i=\mathbb{C}$ se traite pareillement. Si $H_i=\mathbb{H}$, alors, par [JL], $\chi_{i,j}$ est uniquement déterminé par la connaissance de la série discrète π de $GL_2(\mathbb{R})$ qui lui correspond. Celle-ci est uniquement déteminée par la connaissance de deux représentations irréductibles χ_1 et χ_2 de $\mathbb{R}^*$ telle que π est sous-quotient de l'induite parabolique de $\chi_1\otimes\chi_2$. Le poduit des facteurs ϵ' de χ_1 et χ_2 est égal au facteur ϵ' de $\chi_{i,j}$ et figure donc dans le produit plus haut. Pareil que pour le cas réel – voir quelques lignes plus haut – on montre alors qu'on a un nombre fini de choix possibles pour le couple $(\chi_1;\chi_2)$ et donc pareil pour $\chi_{i,j}$. Le théorème est démontré. $\square$

Commentaire : On sait déjà par [GJ] que les facteurs ϵ' calculés dans la proposition 4 sont du type exponentielle, multipliée par quotient de polynômes, multiplié par quotient de fonctions Γ. Ce résultat était insuffisant pour nous, car un produit de polynôme par fonction Γ peut s'écrire d'une infinité de façons différentes comme un produit de polynôme par fonction Γ ! Il fallait faire le calculs effectifs de la prop. 4 pour trouver qu'en fait il n'y a pas de polynômes (ou plutôt on peut s'arranger pour qu'il n'y en ait pas).

Bibliographie.

[BB] A.I.Badulescu, P.Broussous, Un théorème de finitude, *Compositio Mathematica* 132, no. 2, 2002, 177-190.

[BJ] A.Borel, H.Jacquet, Automorphic forms and automorphic representations, in *Automorphic forms, representations and L-functions, Part 1, Proc. of Symp. in Pure Math. 33*, AMS, 1979, 189-202.

[Fl] D.Flath, Decomposition of representations into tensor products, in *Automorphic forms, representations and L-functions, Part 1, Proc. of Symp. in Pure Math. 33*, AMS, 1979, 179-183.

[GJ] R.Godement, H.Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, S.L.N. 260 (1972).

[JL] H.Jacquet, R.P.Langlands, *Automorphic forms on GL(2)*, L.N.M. 114, Springer-Verlag 1970.

[Ja] H.Jacquet, Principal L-functions of the linear group, in *Automorphic forms, representations and L-functions, Part 2, Proc. of Symp. in Pure Math. 33*, AMS, 1979, 63-86.

[We] A.Weyl, *Basic Number Theory*, Classics in Math., Springer-Verlag 1973.