

CONSTRUCTION DE SUITES MINIMISANTES EN OPTIMISATION DE FORME

Olivier Pantz[†] & Karim L. Trabelsi^{*}

[†]CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, France.

^{*}LMCS, Institut Polytechnique des Sciences Avancées, Ivry-sur-Seine, France.

10ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées

Session Spéciale 4. Analyse non linéaire

Motivation

Optimisation de forme

Déterminer l'ouvert $\Omega^* \in \mathcal{U}_{ad}$ vérifiant

$$J(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega) :$$

- ▶ $\mathcal{U}_{ad} :=$ Espace des formes admissibles (i.e. ouverts de \mathbb{R}^N);
- ▶ $J : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} :=$ Fonction-coût.

Méthode de l'homogénéisation

Élargir l'espace des formes admissibles aux composites.

Post-traitement

Déterminer une forme optimale classique qui est proche de la forme composite optimale.

Motivation

Optimisation de forme

Déterminer l'ouvert $\Omega^* \in \mathcal{U}_{ad}$ vérifiant

$$J(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega) :$$

- ▶ $\mathcal{U}_{ad} :=$ Espace des formes admissibles (i.e. ouverts de \mathbb{R}^N);
- ▶ $J : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} :=$ Fonction-coût.

Méthode de l'homogénéisation

Élargir l'espace des formes admissibles aux composites.

Post-traitement

Déterminer une forme optimale classique qui est proche de la forme composite optimale.

Motivation

Optimisation de forme

Déterminer l'ouvert $\Omega^* \in \mathcal{U}_{ad}$ vérifiant

$$J(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega) :$$

- ▶ $\mathcal{U}_{ad} :=$ Espace des formes admissibles (i.e. ouverts de \mathbb{R}^N);
- ▶ $J : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} :=$ Fonction-coût.

Méthode de l'homogénéisation

Élargir l'espace des formes admissibles aux composites.

Post-traitement

Déterminer une forme optimale classique qui est proche de la forme composite optimale.

- ① Homogénéisation - Solides composites
- ② Minimization de la compliance
- ③ Projection d'une forme composite
- ④ Exemples numériques

Exemple: optimisation d'un corps élastique

Système de l'élasticité linéaire

Le déplacement de la structure u est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \operatorname{div}(Ae(u)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ est le tenseur métrique linéarisé.

But

Minimiser J de la forme

$$J(\Omega) = j(\Omega, u(\Omega)),$$

p.r. à Ω .

Exemple: optimisation d'un corps élastique

Système de l'élasticité linéaire

Le déplacement de la structure u est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} \operatorname{div}(Ae(u)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ est le tenseur métrique linéarisé.

But

Minimiser J de la forme

$$J(\Omega) = j(\Omega, u(\Omega)),$$

p.r.à Ω .

Problèmes dûs à l'approche classique

Petits problèmes

Le problème est mal-posé: généralement, il n'existe pas de minimiseur.

Gros problèmes

Les méthodes d'optimisation géométrique (variation de la frontière) mènent à des minima locaux. En plus, l'ajout de conditions de régularité à la frontière pour assurer l'existence de solutions peut engendrer la création d'un gros nombre de minima locaux!

Solution

La méthode d'homogénéisation résout ces problèmes (du moins partiellement).

Problèmes dûs à l'approche classique

Petits problèmes

Le problème est mal-posé: généralement, il n'existe pas de minimiseur.

Gros problèmes

Les méthodes d'optimisation géométrique (variation de la frontière) mènent à des minima locaux. En plus, l'ajout de conditions de régularité à la frontière pour assurer l'existence de solutions peut engendrer la création **d'un gros nombre de minima locaux!**

Solution

La méthode d'homogénéisation résout ces problèmes (du moins partiellement).

Problèmes dûs à l'approche classique

Petits problèmes

Le problème est mal-posé: généralement, il n'existe pas de minimiseur.

Gros problèmes

Les méthodes d'optimisation géométrique (variation de la frontière) mènent à des minima locaux. En plus, l'ajout de conditions de régularité à la frontière pour assurer l'existence de solutions peut engendrer la création d'un gros nombre de minima locaux!

Solution

La méthode d'homogénéisation résout ces problèmes (du moins partiellement).

Reformulation de ce problème

Les suites minimisantes Ω^ε de J ne convergent pas vers un ouvert, mais vers une forme composite contenant beaucoup de trous microscopiques.

L'idée de l'homogénéisation consiste à admettre ces formes composites de matière + vide.

Pour des raisons techniques, on introduit un matériau fictif très mou de loi de Hooke B pour représenter le vide, et on cherche A^* vérifiant

$$J(A^*) = \min \{ J(A^\varepsilon) := j(A^\varepsilon, u^\varepsilon) \},$$

dans l'ensemble des lois de Hooke A^ε tel que pour tout $x \in \Omega$,

$$A^\varepsilon(x) = A \quad \text{ou} \quad A^\varepsilon(x) = B,$$

où

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A^\varepsilon e(u^\varepsilon)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

H-convergence:

$$A^\varepsilon \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta}) \xrightarrow{H} A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$$

$$\text{ssi: } \forall f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N), \quad u^\varepsilon \xrightarrow{L^2} u,$$

où

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A^\varepsilon e(u^\varepsilon)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(A^* e(u)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta} = \{A \mid A\xi : \xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ et } A^{-1}\xi : \xi \geq \beta|\xi|^2, \forall \xi\}.$$

Indépendance vis-à-vis des CL

Si $A^\varepsilon \xrightarrow{H} A^*$, le résultat de convergence est encore valable avec n'importe quelles conditions sur la frontière.

Compacité

Chaque suite de lois de Hooke $A^\varepsilon \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ admet une sous-suite H-convergente.

H-convergence:

$$A^\varepsilon \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta}) \xrightarrow{H} A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$$

$$\text{ssi: } \forall f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N), \quad u^\varepsilon \xrightarrow{L^2} u,$$

où

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A^\varepsilon e(u^\varepsilon)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(A^* e(u)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta} = \{A \mid A\xi : \xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ et } A^{-1}\xi : \xi \geq \beta|\xi|^2, \forall \xi\}.$$

Indépendance vis-à-vis des CL

Si $A^\varepsilon \xrightarrow{H} A^*$, le résultat de convergence est encore valable avec n'importe quelles conditions sur la frontière.

Compacité

Chaque suite de lois de Hooke $A^\varepsilon \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ admet une sous-suite H-convergente.

H-convergence:

$$A^\varepsilon \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta}) \xrightarrow{H} A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$$

$$\text{ssi: } \forall f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N), \quad u^\varepsilon \xrightarrow{L^2} u,$$

où

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A^\varepsilon e(u^\varepsilon)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(A^* e(u)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta} = \{A \mid A\xi : \xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{ et } A^{-1}\xi : \xi \geq \beta|\xi|^2, \forall \xi\}.$$

Indépendance vis-à-vis des CL

Si $A^\varepsilon \xrightarrow{H} A^*$, le résultat de convergence est encore valable avec n'importe quelles conditions sur la frontière.

Compacité

Chaque suite de lois de Hooke $A^\varepsilon \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ admet une sous-suite H-convergente.

Solides composites

Étant donnés deux matériaux linéairement élastiques de lois A et B :

$A + B \implies$ un composite

Un solide composite := une structure linéairement élastique dont la loi de Hooke peut être obtenue comme H-limite des lois de Hooke A^ε vérifiant

$$\forall x \in \Omega, \quad A^\varepsilon(x) = A \quad \text{ou} \quad A^\varepsilon(x) = B.$$

Soit $\theta \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ la densité de matière (locale).

L'ensemble des lois de Hooke des composites de densité θ

Les composites obtenus comme mélange des matériaux A et B en proportion locale $\theta(x)$ et $1 - \theta(x)$:

$$\mathcal{G}_\theta := \left\{ A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta}) : \exists \chi^\varepsilon \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}) \text{ tel que} \right. \\ \left. A^\varepsilon = \chi^\varepsilon A + (1 - \chi^\varepsilon) B \xrightarrow{H} A^* \quad \text{et} \quad \chi^\varepsilon \xrightarrow{L^\infty} \theta \right\}.$$

Solides composites

Étant donné deux matériaux linéairement élastiques de lois A et B :

$A + B \implies$ un composite

Un solide composite := une structure linéairement élastique dont la loi de Hooke peut être obtenue comme H-limite des lois de Hooke A^ε vérifiant

$$\forall x \in \Omega, \quad A^\varepsilon(x) = A \quad \text{ou} \quad A^\varepsilon(x) = B.$$

Soit $\theta \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ la densité de matière (locale).

L'ensemble des lois de Hooke des composites de densité θ

Les composites obtenus comme mélange des matériaux A et B en proportion locale $\theta(x)$ et $1 - \theta(x)$:

$$\mathcal{G}_\theta := \left\{ A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta}) : \exists \chi^\varepsilon \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}) \text{ tel que} \right. \\ \left. A^\varepsilon = \chi^\varepsilon A + (1 - \chi^\varepsilon) B \xrightarrow{H} A^* \quad \text{et} \quad \chi^\varepsilon \xrightarrow{L^\infty} \theta \right\}.$$

Solides composites

Étant donné deux matériaux linéairement élastiques de lois A et B :

$A + B \implies$ un composite

Un solide composite := une structure linéairement élastique dont la loi de Hooke peut être obtenue comme H-limite des lois de Hooke A^ε vérifiant

$$\forall x \in \Omega, \quad A^\varepsilon(x) = A \quad \text{ou} \quad A^\varepsilon(x) = B.$$

Soit $\theta \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ la densité de matière (locale).

L'ensemble des lois de Hooke des composites de densité θ

Les composites obtenus comme mélange des matériaux A et B en proportion locale $\theta(x)$ et $1 - \theta(x)$:

$$\mathcal{G}_\theta := \left\{ A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta}) : \exists \chi^\varepsilon \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}) \text{ tel que} \right. \\ \left. A^\varepsilon = \chi^\varepsilon A + (1 - \chi^\varepsilon) B \xrightarrow{H} A^* \quad \text{et} \quad \chi^\varepsilon \xrightarrow{L^\infty} \theta \right\}.$$

Solides composites

Étant donné deux matériaux linéairement élastiques de lois A et B :

$A + B \implies$ un composite

Un solide composite := une structure linéairement élastique dont la loi de Hooke peut être obtenue comme H-limite des lois de Hooke A^ε vérifiant

$$\forall x \in \Omega, \quad A^\varepsilon(x) = A \quad \text{ou} \quad A^\varepsilon(x) = B.$$

Soit $\theta \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ la densité de matière (locale).

L'ensemble des lois de Hooke des composites de densité θ

Les composites obtenus comme mélange des matériaux A et B en proportion locale $\theta(x)$ et $1 - \theta(x)$:

$$\mathcal{G}_\theta := \left\{ A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta}) : \exists \chi^\varepsilon \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}) \text{ tel que} \right. \\ \left. A^\varepsilon = \chi^\varepsilon A + (1 - \chi^\varepsilon) B \xrightarrow{H} A^* \quad \text{et} \quad \chi^\varepsilon \xrightarrow{L^\infty} \theta \right\}.$$

Une propriété de l'ensemble des solides composites

L'ensemble des lois de Hooke $A(x)$ faisables en un point x ne dépend pas de la valeur de $\theta(x)$

Ainsi, pour tout réel $\theta \in [0, 1]$, il existe un sous-espace fermé G_θ de $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ vérifiant

$$\mathcal{G}_\theta = \left\{ A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta}) : A^*(x) \in G_{\theta(x)} \right\}.$$

Conséquence

Cela permet, en particulier, de se contenter de l'étude des solides composites homogènes afin de déterminer les propriétés des matériaux composites.

Une propriété de l'ensemble des solides composites

L'ensemble des lois de Hooke $A(x)$ faisables en un point x ne dépend pas de la valeur de $\theta(x)$

Ainsi, pour tout réel $\theta \in [0, 1]$, il existe un sous-espace fermé G_θ de $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ vérifiant

$$\mathcal{G}_\theta = \left\{ A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta}) : A^*(x) \in G_{\theta(x)} \right\}.$$

Conséquence

Cela permet, en particulier, de se contenter de l'étude des solides composites homogènes afin de déterminer les propriétés des matériaux composites.

Une propriété de l'ensemble des solides composites

L'ensemble des lois de Hooke $A(x)$ faisables en un point x ne dépend pas de la valeur de $\theta(x)$

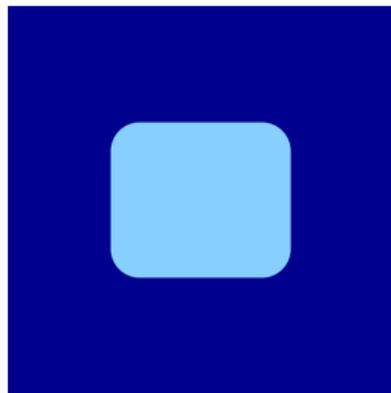
Ainsi, pour tout réel $\theta \in [0, 1]$, il existe un sous-espace fermé G_θ de $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ vérifiant

$$\mathcal{G}_\theta = \left\{ A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta}) : A^*(x) \in G_{\theta(x)} \right\}.$$

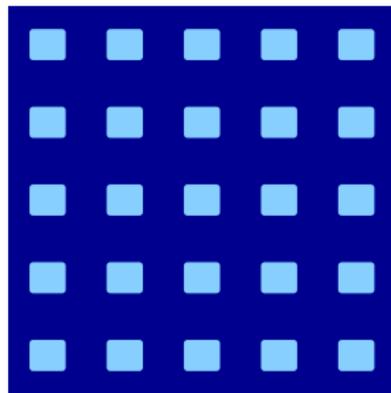
Conséquence

Cela permet, en particulier, de se contenter de l'étude des solides composites homogènes afin de déterminer les propriétés des matériaux composites.

Composites périodiques



Cellule de périodicité



Composite périodique

Composites périodiques

Soient $Y =]0, 1[^N$ et $\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^N; \{0, 1\})$ une fonction Y -périodique

$$\chi(x/\varepsilon)A + (1 - \chi(x/\varepsilon))B = A^\varepsilon(x) \xrightarrow{H} A^*,$$

où A^* , constante, est définie pour toute matrice symétrique σ d'ordre N par

$$A^{-*} \sigma \cdot \sigma = \min_{\substack{\tau \in L^2_{\#}(Y; \mathcal{M}_N^s) \\ \int_Y \tau \, dx = \sigma \\ \operatorname{div}(\tau) = 0}} \int_Y (\chi(x)A + (1 - \chi(x))B)^{-1} \tau \cdot \tau \, dx,$$

où $L^2_{\#}(Y; \mathcal{M}_N^s) := \{\text{fonctions } L^2, Y\text{-périodiques à valeurs dans } \mathcal{L}_N^s\}$.

Une propriété remarquable des composites périodiques P_θ

Tout composite peut être approximé par un matériau périodique:

$$\overline{P_\theta} = G_\theta.$$

Composites périodiques

Soient $Y =]0, 1[^N$ et $\chi \in L^\infty(\mathbb{R}^N; \{0, 1\})$ une fonction Y -périodique

$$\chi(x/\varepsilon)A + (1 - \chi(x/\varepsilon))B = A^\varepsilon(x) \xrightarrow{H} A^*,$$

où A^* , constante, est définie pour toute matrice symétrique σ d'ordre N par

$$A^{-*} \sigma \cdot \sigma = \min_{\substack{\tau \in L^2_{\#}(Y; \mathcal{M}_N^s) \\ \int_Y \tau \, dx = \sigma \\ \operatorname{div}(\tau) = 0}} \int_Y (\chi(x)A + (1 - \chi(x))B)^{-1} \tau \cdot \tau \, dx,$$

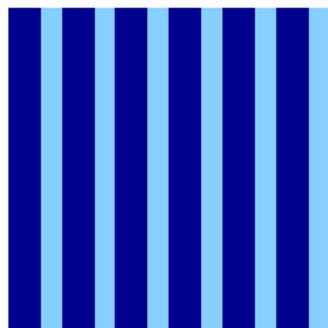
où $L^2_{\#}(Y; \mathcal{M}_N^s) := \{\text{fonctions } L^2, Y\text{-périodiques à valeurs dans } \mathcal{L}_N^s\}$.

Une propriété remarquable des composites périodiques P_θ

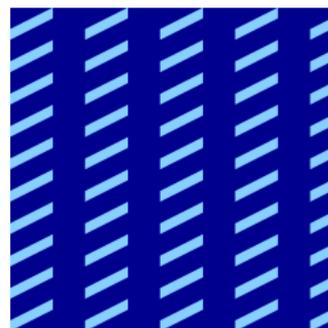
Tout composite peut être approximé par un matériau périodique:

$$\overline{P_\theta} = G_\theta.$$

Laminés séquentiels



Laminé de rang-1

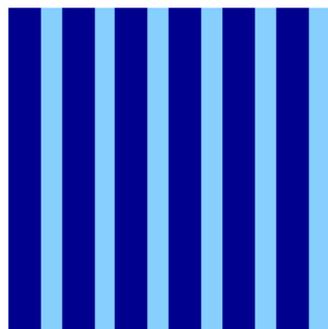


Laminé de rang-2

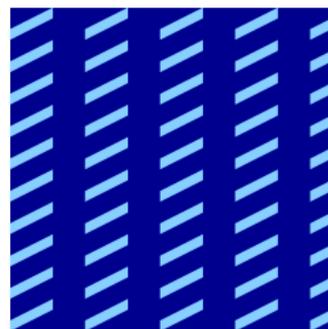
Un intérêt pratique

Formules explicites permettant le calcul des lois de Hooke associées.

Laminés séquentiels



Laminé de rang-1



Laminé de rang-2

Un intérêt pratique

Formules explicites permettant le calcul des lois de Hooke associées.

Loi de Hooke d'un laminé, cas $B = 0$

Si

$e_i =$ directions de lamination et $m_i =$ proportions of lamination,

alors

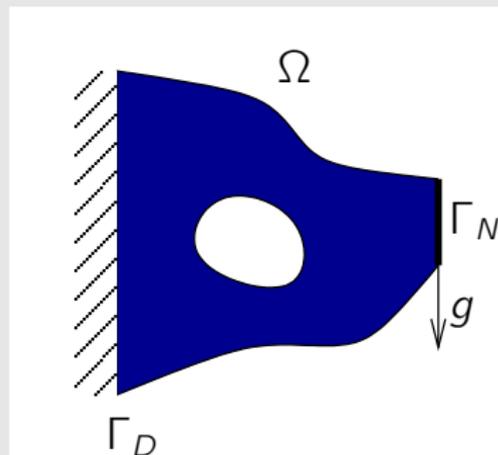
$$A^{*-1} = A^{-1} + \frac{1-\theta}{\theta} \left(\sum_{i=1}^p m_i f_A^c(e_i) \right)^{-1},$$

où $f_A^c(e_i)$ est un tenseur d'ordre 4 défini pour toute matrice symétrique ξ , par

$$f_A^c(e_i)\xi \cdot \xi = A\xi \cdot \xi - \frac{1}{\mu} |A\xi e_i|^2 + \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + \lambda)} ((A\xi)e_i \cdot e_i)^2,$$

λ and $\mu =$ coefficients de Lamé de A .

Optimization de la compliance



Ω = Corps élastique,
 g = Force surfacique,
 Γ_D = CL de Dirichlet,
 Γ_N = CL de Neumann.

$$\min_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega) := \int_{\Gamma_N} g \cdot u_{\Omega} \, dx,$$

où

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\Omega \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^N : \Gamma_N \cup \Gamma_D \subset \partial\Omega \text{ et } |\Omega| \leq V\}.$$

Relaxation par la méthode d'homogénéisation

Le problème de minimisation de la compliance $J(\Omega)$ sur \mathcal{U}_{ad} est **mal-posé**.

Le problème (homogénéisé) relaxé

Déterminer le corps composite solution de ce qui suit

$$\min_{\substack{0 \leq \theta \leq 1 \\ A^* \in \mathcal{G}_\theta \\ \int_D \theta \, dx \leq V}} \left\{ J(A^*, \theta) := \int_{\Gamma_D} g \cdot u_{A^*, \theta} \right\},$$

où $u_{A^*, \theta}$ est le déplacement du corps.

Le minimum est atteint dans l'ensemble des laminés de rang- N (= dimension de l'espace).

Relaxation par la méthode d'homogénéisation

Le problème de minimisation de la compliance $J(\Omega)$ sur \mathcal{U}_{ad} est **mal-posé**.

Le problème (homogénéisé) relaxé

Déterminer le corps composite solution de ce qui suit

$$\min_{\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 1 \\ A^* \in \overline{\mathcal{G}}_\theta \\ \int_D \theta \, dx \leq V \end{array} \right.} \left\{ J(A^*, \theta) := \int_{\Gamma_D} g \cdot u_{A^*, \theta} \right\},$$

où $u_{A^*, \theta}$ est le déplacement du corps.

Le minimum est atteint dans l'ensemble des laminés de rang- N (= dimension de l'espace).

Relaxation par la méthode d'homogénéisation

Le problème de minimisation de la compliance $J(\Omega)$ sur \mathcal{U}_{ad} est **mal-posé**.

Le problème (homogénéisé) relaxé

Déterminer le corps composite solution de ce qui suit

$$\min_{\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 1 \\ A^* \in \overline{\mathcal{G}}_\theta \\ \int_D \theta \, dx \leq V \end{array} \right.} \left\{ J(A^*, \theta) := \int_{\Gamma_D} g \cdot u_{A^*, \theta} \right\},$$

où $u_{A^*, \theta}$ est le déplacement du corps.

Le minimum est atteint dans l'ensemble des laminés de rang- N (= dimension de l'espace).

Résolution du problème homogénéisé

Le principe d'énergie complémentaire

$$J(A^*, \theta) = \min_{\begin{cases} \sigma \in L^2(D; \mathcal{M}_2^s) \\ \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ dans } D \\ \sigma \cdot n = g \text{ sur } \Gamma_N \end{cases}} \int_D A^{*-1} \sigma \cdot \sigma \, dx.$$

Minimisation de la compliance

On minimise l'énergie complémentaire sur l'ensemble des triplets (A^*, θ, σ) :

- ▶ $\int_D \theta \, dx \leq V$,
- ▶ $A^*(x) \in L_{\theta,2} = \{\text{laminés de rang-2}\}$,
- ▶ $\operatorname{div}(\sigma) = 0$ dans D et $\sigma \cdot n = g$ sur Γ_N .

Solution

Minimisations successives p.r.à σ et (A^*, θ) .

Résolution du problème homogénéisé

Le principe d'énergie complémentaire

$$J(A^*, \theta) = \min_{\begin{cases} \sigma \in L^2(D; \mathcal{M}_2^s) \\ \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ dans } D \\ \sigma \cdot n = g \text{ sur } \Gamma_N \end{cases}} \int_D A^{*-1} \sigma \cdot \sigma \, dx.$$

Minimisation de la compliance

On minimise l'énergie complémentaire sur l'ensemble des triplets (A^*, θ, σ) :

- ▶ $\int_D \theta \, dx \leq V$,
- ▶ $A^*(x) \in L_{\theta,2} = \{\text{laminés de rang-2}\}$,
- ▶ $\operatorname{div}(\sigma) = 0$ dans D et $\sigma \cdot n = g$ sur Γ_N .

Solution

Minimisations successives p.r.à σ et (A^*, θ) .

Résolution du problème homogénéisé

Le principe d'énergie complémentaire

$$J(A^*, \theta) = \min_{\begin{cases} \sigma \in L^2(D; \mathcal{M}_2^s) \\ \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ dans } D \\ \sigma \cdot n = g \text{ sur } \Gamma_N \end{cases}} \int_D A^{*-1} \sigma \cdot \sigma \, dx.$$

Minimisation de la compliance

On minimise l'énergie complémentaire sur l'ensemble des triplets (A^*, θ, σ) :

- ▶ $\int_D \theta \, dx \leq V$,
- ▶ $A^*(x) \in L_{\theta,2} = \{\text{laminés de rang-2}\}$,
- ▶ $\operatorname{div}(\sigma) = 0$ dans D et $\sigma \cdot n = g$ sur Γ_N .

Solution

Minimisations successives p.r.à σ et (A^*, θ) .

Minimisation p.r.à (A^*, θ)

Directions de lamination optimales

Valeurs propres du tenseur des contraintes σ .

Proportions de lamination optimales

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}.$$

Densité de matière optimale

$$\min_{A^* \in L_{\theta,2}} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma = A^{-1} \sigma \cdot \sigma + \frac{1-\theta}{\theta} g^*(\sigma), \quad g^*(\sigma) = \frac{\kappa + \mu}{2\mu\kappa} (|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2$$

$$\Rightarrow \theta_{\text{opt}} = \min \left(1, \sqrt{\frac{\kappa + \mu}{4\mu\kappa\ell}} (|\sigma_1| + |\sigma_2|) \right).$$

Minimisation p.r.à (A^*, θ)

Directions de lamination optimales

Valeurs propres du tenseur des contraintes σ .

Proportions de lamination optimales

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}.$$

Densité de matière optimale

$$\min_{A^* \in L_{\theta,2}} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma = A^{-1} \sigma \cdot \sigma + \frac{1-\theta}{\theta} g^*(\sigma), \quad g^*(\sigma) = \frac{\kappa + \mu}{2\mu\kappa} (|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2$$

$$\Rightarrow \theta_{\text{opt}} = \min \left(1, \sqrt{\frac{\kappa + \mu}{4\mu\kappa\ell}} (|\sigma_1| + |\sigma_2|) \right).$$

Minimisation p.r.à (A^*, θ)

Directions de lamination optimales

Valeurs propres du tenseur des contraintes σ .

Proportions de lamination optimales

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}.$$

Densité de matière optimale

$$\min_{A^* \in L_{\theta,2}} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma = A^{-1} \sigma \cdot \sigma + \frac{1-\theta}{\theta} g^*(\sigma), \quad g^*(\sigma) = \frac{\kappa + \mu}{2\mu\kappa} (|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2$$

$$\Rightarrow \theta_{\text{opt}} = \min \left(1, \sqrt{\frac{\kappa + \mu}{4\mu\kappa\ell}} (|\sigma_1| + |\sigma_2|) \right).$$

Minimisation p.r.à (A^*, θ)

Directions de lamination optimales

Valeurs propres du tenseur des contraintes σ .

Proportions de lamination optimales

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}.$$

Densité de matière optimale

$$\min_{A^* \in L_{\theta,2}} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma = A^{-1} \sigma \cdot \sigma + \frac{1-\theta}{\theta} g^*(\sigma), \quad g^*(\sigma) = \frac{\kappa + \mu}{2\mu\kappa} (|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2$$

$$\implies \theta_{\text{opt}} = \min \left(1, \sqrt{\frac{\kappa + \mu}{4\mu\kappa\ell}} (|\sigma_1| + |\sigma_2|) \right).$$

Projection d'une forme composite

But: Construire une suite de formes Ω^ε

$A^\varepsilon = \chi_{\Omega^\varepsilon} A \xrightarrow{H} A^*$, où A^* est le composite optimal.

Vers une alternative à la pénalisation de la densité

Zoom avant et après la création d'un trou par une méthode 3-en-1 (homogénéisation + variation de la frontière + "gradient topologique")

Idée

Reproduire au niveau macroscopique la microstructure sous-jacente du composite optimal.

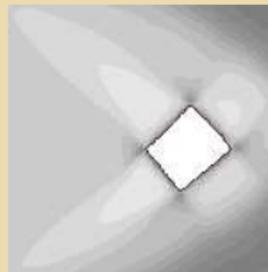
Projection d'une forme composite

But: Construire une suite de formes Ω^ε

$$A^\varepsilon = \chi_{\Omega^\varepsilon} A \xrightarrow{H} A^*, \quad \text{où } A^* \text{ est le composite optimal.}$$

Vers une alternative à la pénalisation de la densité

Zoom avant et après la création d'un trou par une méthode 3-en-1 (homogénéisation + variation de la frontière + "gradient topologique")



Idée

Reproduire au niveau macroscopique la microstructure sous-jacente du composite optimal.

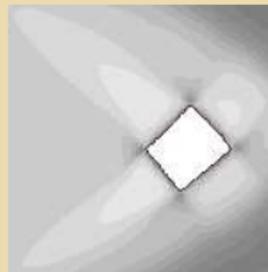
Projection d'une forme composite

But: Construire une suite de formes Ω^ε

$$A^\varepsilon = \chi_{\Omega^\varepsilon} A \xrightarrow{H} A^*, \quad \text{où } A^* \text{ est le composite optimal.}$$

Vers une alternative à la pénalisation de la densité

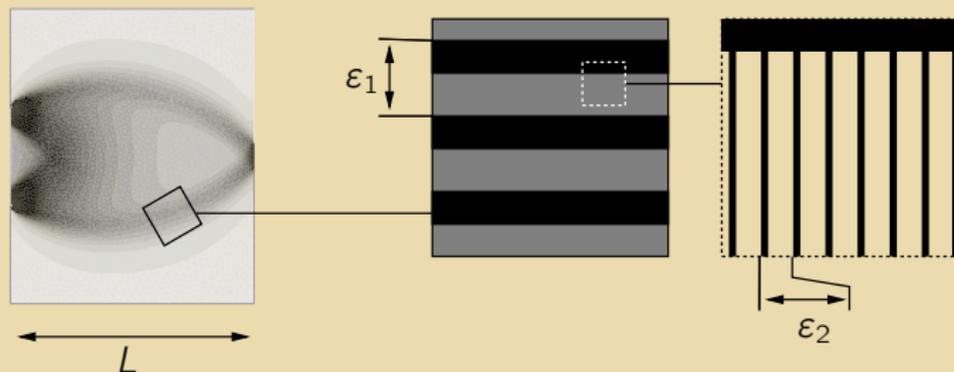
Zoom avant et après la création d'un trou par une méthode 3-en-1 (homogénéisation + variation de la frontière + "gradient topologique")



Idée

Reproduire au niveau macroscopique la microstructure sous-jacente du composite optimal.

Le laminé de rang-2 comporte deux échelles

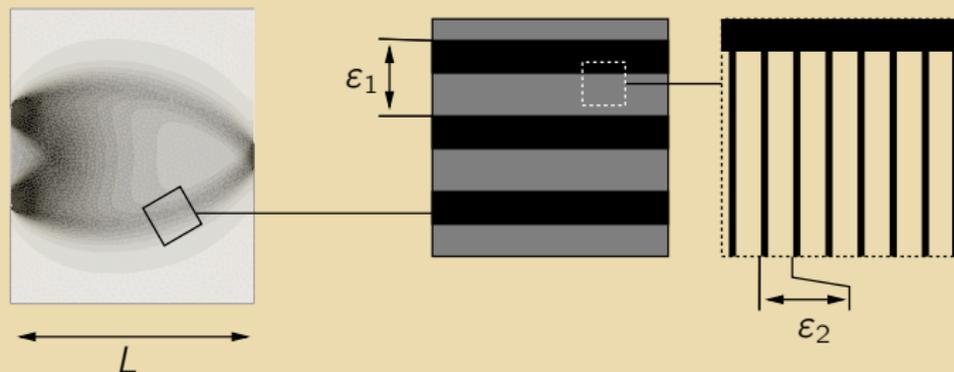


$$L \gg \varepsilon_1 \gg \varepsilon_2!$$

Utilisation d'un mélange matériau + vide

Nous ne disposons pas du même résultat que dans le cas non dégénéré!

Le laminé de rang-2 comporte deux échelles



$$L \gg \varepsilon_1 \gg \varepsilon_2!$$

Utilisation d'un mélange matériau + vide

Nous ne disposons pas du même résultat que dans le cas non dégénéré!

Construction de composites localement périodiques

Composite périodique

$$\Omega^\varepsilon = D \cap \omega^\varepsilon, \quad \omega^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon^{-1}x \in \omega\},$$

où ω est un ouvert Y -périodique.

Cellule de périodicité dépendant de x

$$\Omega^\varepsilon = \{x \in D : \varepsilon^{-1}x \in \omega(x)\}.$$

Composite localement périodique

$$\Omega_\varphi^\varepsilon = \{x \in D : x \in \varphi^{-1}(\varepsilon\omega(x))\},$$

avec $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ tel que $\det(D\varphi(x)) \neq 0$.

Construction de composites localement périodiques

Composite périodique

$$\Omega^\varepsilon = D \cap \omega^\varepsilon, \quad \omega^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon^{-1}x \in \omega\},$$

où ω est un ouvert Y -périodique.

Cellule de périodicité dépendant de x

$$\Omega^\varepsilon = \{x \in D : \varepsilon^{-1}x \in \omega(x)\}.$$

Composite localement périodique

$$\Omega_\varphi^\varepsilon = \{x \in D : x \in \varphi^{-1}(\varepsilon\omega(x))\},$$

avec $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ tel que $\det(D\varphi(x)) \neq 0$.

Construction de composites localement périodiques

Composite périodique

$$\Omega^\varepsilon = D \cap \omega^\varepsilon, \quad \omega^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon^{-1}x \in \omega\},$$

où ω est un ouvert Y -périodique.

Cellule de périodicité dépendant de x

$$\Omega^\varepsilon = \{x \in D : \varepsilon^{-1}x \in \omega(x)\}.$$

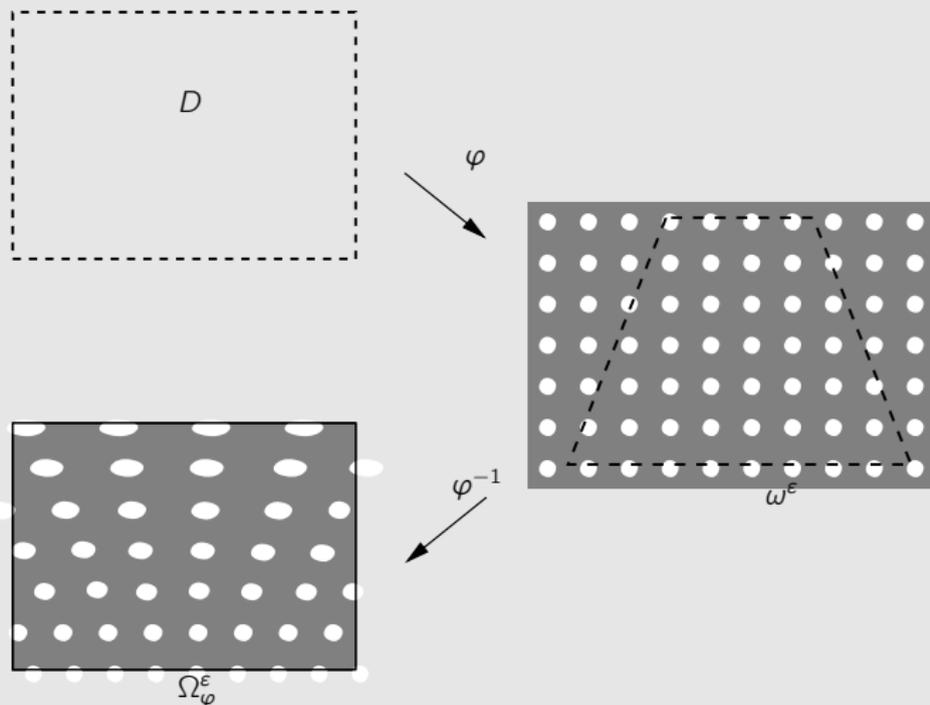
Composite localement périodique

$$\Omega_\varphi^\varepsilon = \{x \in D : x \in \varphi^{-1}(\varepsilon\omega(x))\},$$

avec $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ tel que $\det(D\varphi(x)) \neq 0$.

Construction de composites localement périodiques

Pratiquement,



Choix d'un matériau de substitution (cas $N = 2$)

$\Omega_\varphi^\varepsilon$ défini par un élément $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ de

$$\mathcal{F}_e = \left\{ \varphi : \det(D_x \varphi) \neq 0, D_x \varphi^{-1}((1, 0)) \wedge e_1(x) = 0 \right. \\ \left. \text{et } D_x \varphi^{-1}((0, 1)) \wedge e_2(x) = 0 \right\}.$$

Cellule de périodicité

$$\omega_{\theta, m} \cap Y = \\ \{x \in Y : 2|x_i - 1/2| > p_i\} \\ 1 - p_1 p_2 = \theta, \\ (1 - p_1)m_2 = (1 - p_2)m_1.$$

Loi de Hooke associée $\mathcal{A}_\varphi^\varepsilon$

$$\mathcal{A}_\varphi^\varepsilon = \chi_{\Omega_\varphi^\varepsilon} \mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathcal{A}_\varphi^\varepsilon \oplus \mathcal{A}^c$$

Autour: Une construction explicite des quarts $\Omega_\varphi^\varepsilon$

Choix d'un matériau de substitution (cas $N = 2$)

$\Omega_\varphi^\varepsilon$ défini par un élément $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ de

$$\mathcal{F}_e = \left\{ \varphi : \det(D_x \varphi) \neq 0, D_x \varphi^{-1}((1, 0)) \wedge e_1(x) = 0 \right. \\ \left. \text{et } D_x \varphi^{-1}((0, 1)) \wedge e_2(x) = 0 \right\}.$$

Cellule de périodicité

$$\omega_{\theta, m} \cap Y = \\ \{x \in Y : 2|x_i - 1/2| > p_i\} \\ 1 - p_1 p_2 = \theta, \\ (1 - p_1)m_2 = (1 - p_2)m_1.$$

Loi de Hooke associée A_φ^*

$$A_\varphi^\varepsilon = \chi_{\Omega_\varphi^\varepsilon} A \xrightarrow{H} A_\varphi^* \simeq A^*.$$

Atout: Une construction explicite des ouverts $\Omega_\varphi^\varepsilon$!

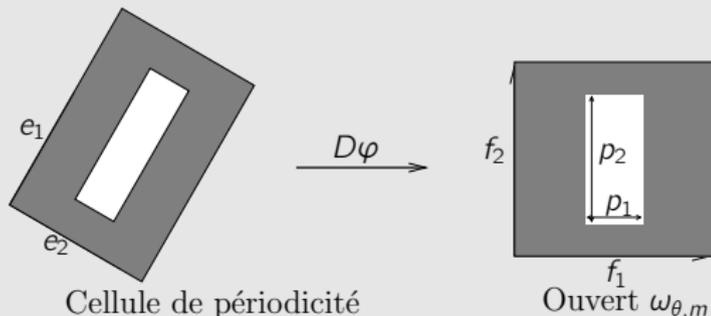
Choix d'un matériau de substitution (cas $N = 2$)

$\Omega_\varphi^\varepsilon$ défini par un élément $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ de

$$\mathcal{F}_e = \left\{ \varphi : \det(D_x \varphi) \neq 0, D_x \varphi^{-1}((1, 0)) \wedge e_1(x) = 0 \right. \\ \left. \text{et } D_x \varphi^{-1}((0, 1)) \wedge e_2(x) = 0 \right\}.$$

Cellule de périodicité

$$\omega_{\theta, m} \cap Y = \\ \{x \in Y : 2|x_i - 1/2| > p_i\} \\ 1 - p_1 p_2 = \theta, \\ (1 - p_1)m_2 = (1 - p_2)m_1.$$



Loi de Hooke associée A_φ^*

$$A_\varphi^\varepsilon = \chi_{\Omega_\varphi^\varepsilon} A \xrightarrow{H} A_\varphi^* \simeq A^*.$$

Atout: Une construction explicite des ouverts $\Omega_\varphi^\varepsilon$!

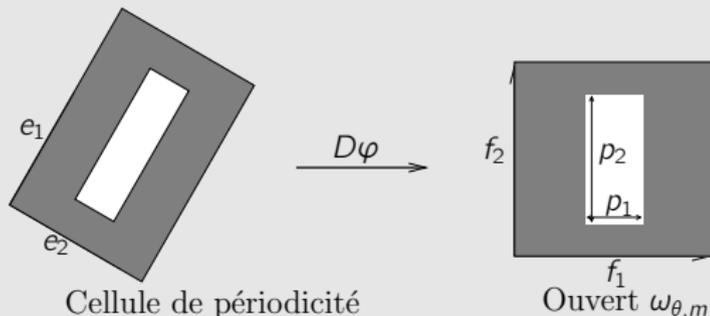
Choix d'un matériau de substitution (cas $N = 2$)

$\Omega_\varphi^\varepsilon$ défini par un élément $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ de

$$\mathcal{F}_e = \left\{ \varphi : \det(D_x \varphi) \neq 0, D_x \varphi^{-1}((1, 0)) \wedge e_1(x) = 0 \right. \\ \left. \text{et } D_x \varphi^{-1}((0, 1)) \wedge e_2(x) = 0 \right\}.$$

Cellule de périodicité

$$\omega_{\theta, m} \cap Y = \\ \{x \in Y : 2|x_i - 1/2| > p_i\} \\ 1 - p_1 p_2 = \theta, \\ (1 - p_1)m_2 = (1 - p_2)m_1.$$



Loi de Hooke associée A_φ^*

$$A_\varphi^\varepsilon = \chi_{\Omega_\varphi^\varepsilon} A \xrightarrow{H} A_\varphi^* \simeq A^*.$$

Atout: Une construction explicite des ouverts $\Omega_\varphi^\varepsilon$!

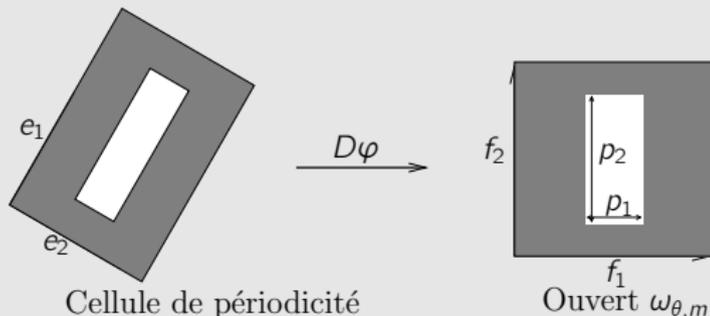
Choix d'un matériau de substitution (cas $N = 2$)

$\Omega_\varphi^\varepsilon$ défini par un élément $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ de

$$\mathcal{F}_e = \left\{ \varphi : \det(D_x \varphi) \neq 0, D_x \varphi^{-1}((1, 0)) \wedge e_1(x) = 0 \right. \\ \left. \text{et } D_x \varphi^{-1}((0, 1)) \wedge e_2(x) = 0 \right\}.$$

Cellule de périodicité

$$\omega_{\theta, m} \cap Y = \\ \{x \in Y : 2|x_i - 1/2| > p_i\} \\ 1 - p_1 p_2 = \theta, \\ (1 - p_1)m_2 = (1 - p_2)m_1.$$



Loi de Hooke associée A_φ^*

$$A_\varphi^\varepsilon = \chi_{\Omega_\varphi^\varepsilon} A \xrightarrow{H} A_\varphi^* \simeq A^*.$$

Atout: Une construction explicite des ouverts $\Omega_\varphi^\varepsilon$!

Calcul d'un élément de \mathcal{F}_e

Lemme d'existence

Si les directions de lamination e_1 et e_2 sont régulières, et si D est simplement connexe, alors $\mathcal{F}_e \neq \emptyset$.

Nous avons choisi φ solution de

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}_e} I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_D |\nabla \varphi_1 - e_1|^2 + |\nabla \varphi_2 - e_2|^2 dx.$$

La suite $\Omega_\varphi^\varepsilon$ est définie par

$$\Omega_\varphi^\varepsilon = \left\{ x \in D : \begin{aligned} &\cos(\varphi_1(x)/\varepsilon) > \cos(\pi(1 - p_1)) \\ &\text{ou } \cos(\varphi_2(x)/\varepsilon) > \cos(\pi(1 - p_2)) \end{aligned} \right\}.$$

Calcul d'un élément de \mathcal{F}_e

Lemme d'existence

Si les directions de lamination e_1 et e_2 sont régulières, et si D est simplement connexe, alors $\mathcal{F}_e \neq \emptyset$.

Nous avons choisi φ solution de

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}_e} I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_D |\nabla \varphi_1 - e_1|^2 + |\nabla \varphi_2 - e_2|^2 dx.$$

La suite $\Omega_\varphi^\varepsilon$ est définie par

$$\Omega_\varphi^\varepsilon = \left\{ x \in D : \begin{aligned} &\cos(\varphi_1(x)/\varepsilon) > \cos(\pi(1 - p_1)) \\ &\text{ou } \cos(\varphi_2(x)/\varepsilon) > \cos(\pi(1 - p_2)) \end{aligned} \right\}.$$

Calcul d'un élément de \mathcal{F}_e

Lemme d'existence

Si les directions de lamination e_1 et e_2 sont régulières, et si D est simplement connexe, alors $\mathcal{F}_e \neq \emptyset$.

Nous avons choisi φ solution de

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}_e} I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_D |\nabla \varphi_1 - e_1|^2 + |\nabla \varphi_2 - e_2|^2 dx.$$

La suite $\Omega_\varphi^\varepsilon$ est définie par

$$\Omega_\varphi^\varepsilon = \left\{ x \in D : \begin{aligned} &\cos(\varphi_1(x)/\varepsilon) > \cos(\pi(1 - p_1)) \\ &\text{ou } \cos(\varphi_2(x)/\varepsilon) > \cos(\pi(1 - p_2)) \end{aligned} \right\}.$$

Calcul d'un élément de \mathcal{F}_e

Lemme d'existence

Si les directions de lamination e_1 et e_2 sont régulières, et si D est simplement connexe, alors $\mathcal{F}_e \neq \emptyset$.

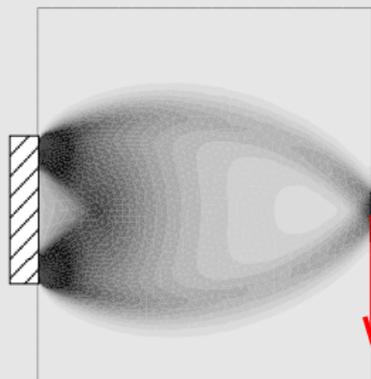
Nous avons choisi φ solution de

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}_e} I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_D |\nabla \varphi_1 - e_1|^2 + |\nabla \varphi_2 - e_2|^2 dx.$$

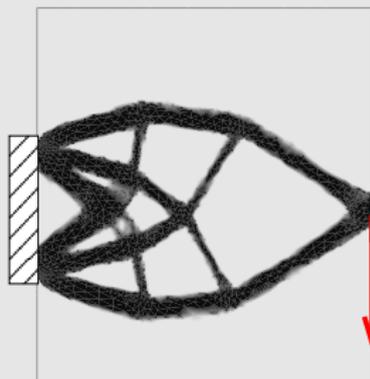
La suite $\Omega_\varphi^\varepsilon$ est définie par

$$\Omega_\varphi^\varepsilon = \left\{ x \in D : \begin{aligned} &\cos(\varphi_1(x)/\varepsilon) > \cos(\pi(1 - p_1)) \\ &\text{OU } \cos(\varphi_2(x)/\varepsilon) > \cos(\pi(1 - p_2)) \end{aligned} \right\}.$$

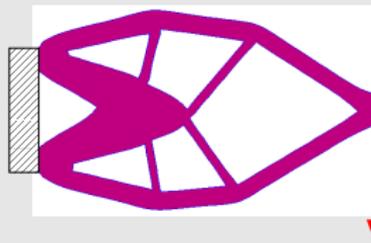
Un exemple numérique: cantilever - comparaison



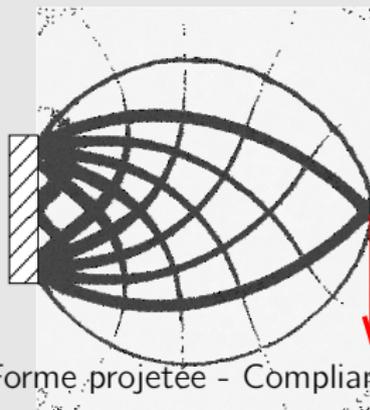
Forme optimale - Compliance=16.3



Forme pénalisée - Compliance=16.95



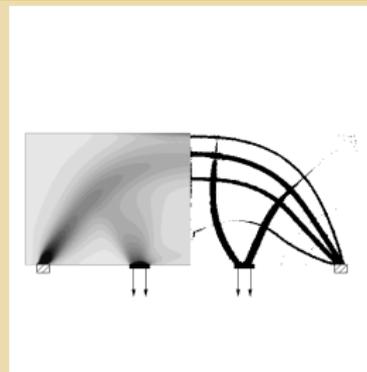
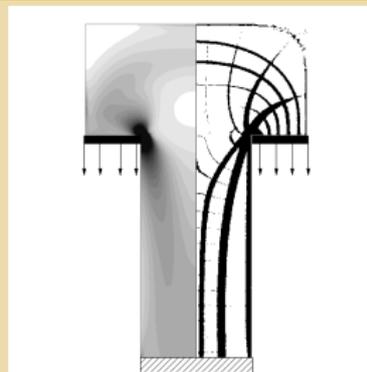
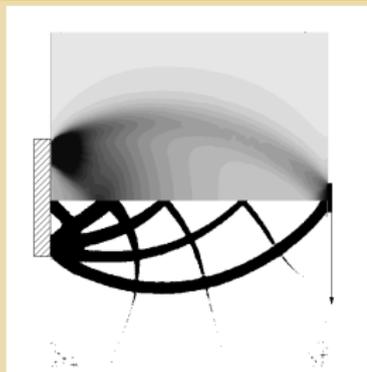
Forme 3-en-1 - Compliance=17.3



Forme projetée - Compliance=17.15

Exemples numériques: conclusion

Autres formes optimales composites & leurs projections



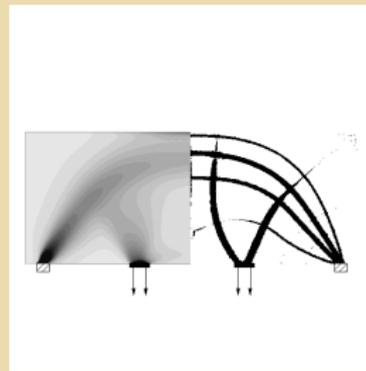
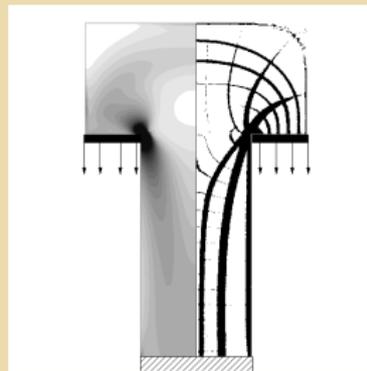
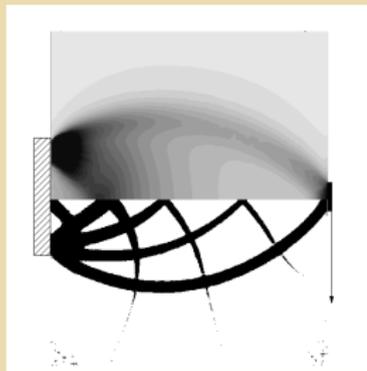
↔ 70 itérations $\approx 2\times$ plus rapide que la pénalisation!

Ponts obtenus pour différentes valeurs du paramètre de fréquence ε

↔ Le niveau de détail est contrôlé par le paramètre de fréquence!

Exemples numériques: conclusion

Autres formes optimales composites & leurs projections



↪ 70 itérations $\approx 2\times$ plus rapide que la pénalisation!

Ponts obtenus pour différentes valeurs du paramètre de fréquence ε



↪ Le niveau de détail est contrôlé par le paramètre de fréquence!

Un mot sur les singularités des champs e_i

- ▶ Génériquement, une singularité consiste en un nombre fini de points x où $\sigma(x) = \alpha \text{Id}$.
 - ▶ Le champ des vecteurs propres n'est pas orientable (il effectue des demi-tours autour des singularités.)

↔ Le réseau n'est pas difféomorphe à un réseau carré.

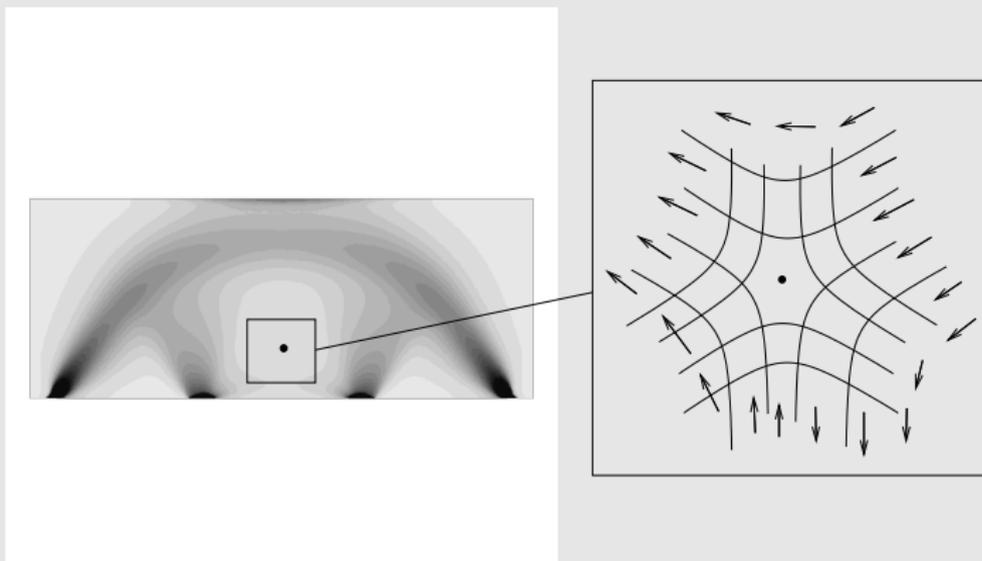
Un mot sur les singularités des champs e_i

- ▶ Génériquement, une singularité consiste en un nombre fini de points x où $\sigma(x) = \alpha \text{Id}$.
 - ▶ Le champ des vecteurs propres n'est pas orientable (il effectue des demi-tours autour des singularités.)

↔ Le réseau n'est pas difféomorphe à un réseau carré.

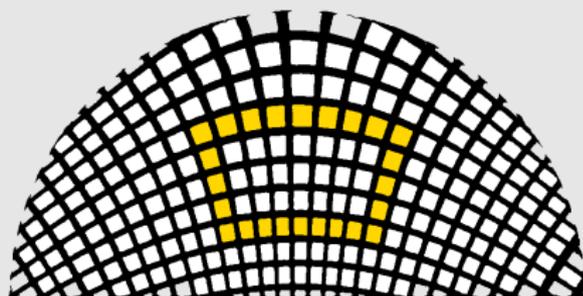
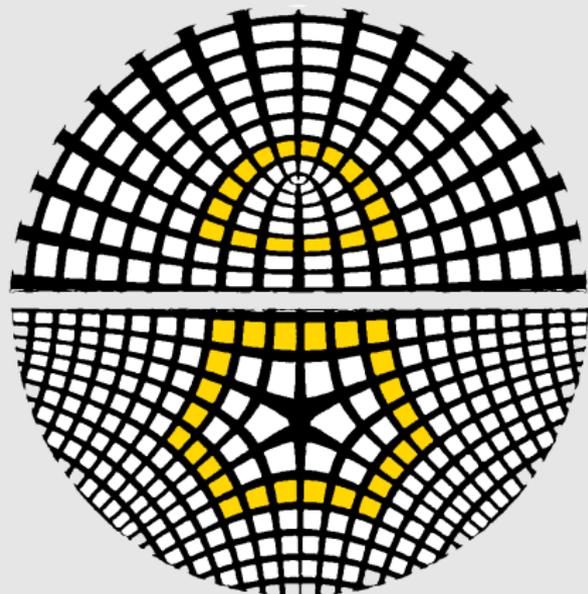
Un mot sur les singularités des champs e_i

- ▶ Génériquement, une singularité consiste en un nombre fini de points x où $\sigma(x) = \alpha \text{Id}$.
 - ▶ Le champ des vecteurs propres n'est pas orientable (il effectue des demi-tours autour des singularités.)



↔ Le réseau n'est pas difféomorphe à un réseau carré.

Un mot sur les singularités des champs e_i

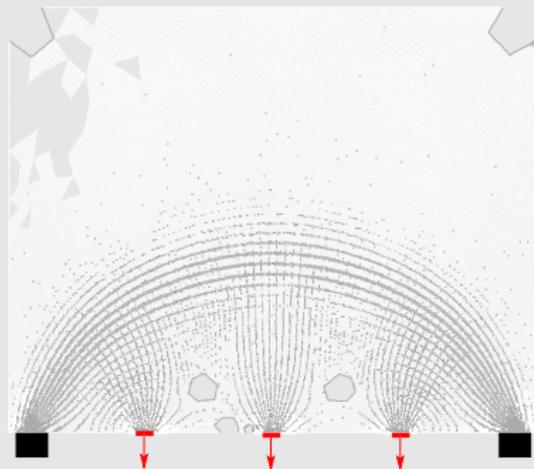
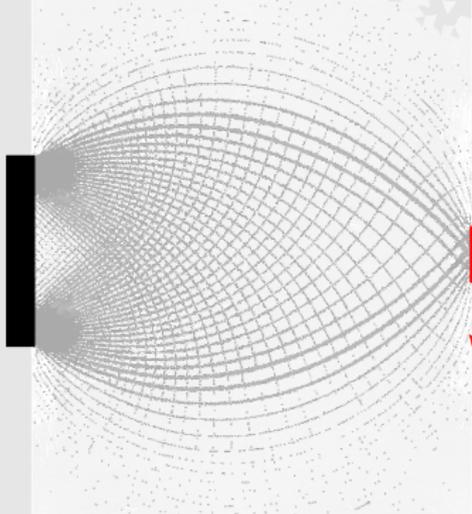


- ▶ Affiner les formes projetées par une méthode d'optimisation géométrique (level set, p.e.).
- ▶ Étendre la méthode à d'autres fonctions-coûts.
- ▶ Une alternative possible au gradient topologique.
- ▶ Étendre l'algorithme au cas tridimensionnel.

- ▶ Affiner les formes projetées par une méthode d'optimisation géométrique (level set, p.e.).
- ▶ Étendre la méthode à d'autres fonctions-coûts.
- ▶ Une alternative possible au gradient topologique.
- ▶ Étendre l'algorithme au cas tridimensionnel.

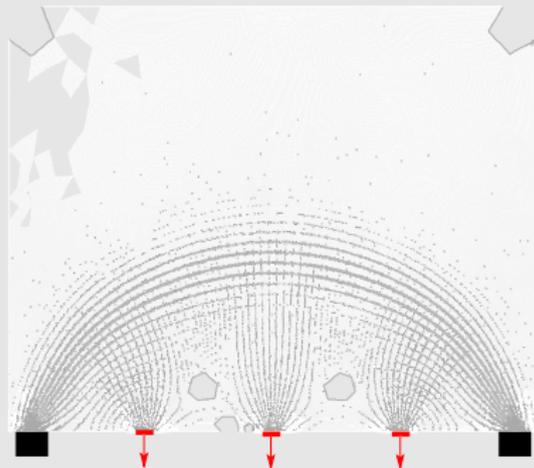
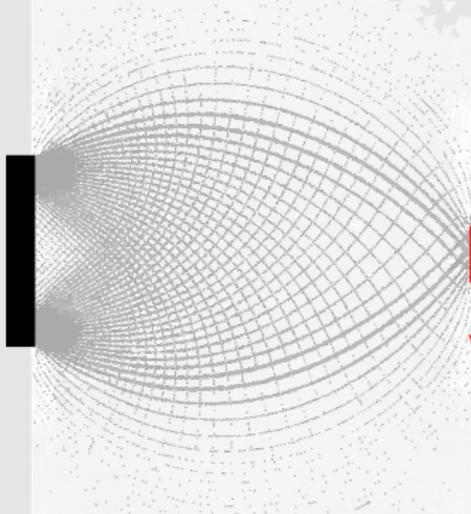
- ▶ Affiner les formes projetées par une méthode d'optimisation géométrique (level set, p.e.).
- ▶ Étendre la méthode à d'autres fonctions-coûts.
- ▶ Une alternative possible au gradient topologique.
- ▶ Étendre l'algorithme au cas tridimensionnel.

- ▶ Affiner les formes projetées par une méthode d'optimisation géométrique (level set, p.e.).
- ▶ Étendre la méthode à d'autres fonctions-coûts.
- ▶ Une alternative possible au gradient topologique.
- ▶ Étendre l'algorithme au cas tridimensionnel.



MERCI POUR VOTRE ATTENTION!

- ▶ Simultaneous shape, topology and homogenized properties optimization, *Struct. Multidiscip. Optim.*, 34 (2007) no.4, 361-365;
- ▶ A post-treatment of the homogenization method for shape optimization, *SIAM J. Control Optim.*, 47 (2008) no.3, 1380-1398;
- ▶ A post-treatment of the homogenization method in shape optimization, *8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO 2009)*, Centre for Mechanical Design, Instituto Superior Técnico, Lisbon, Portugal, 1-5 Juin 2009;
- ▶ Construction of Minimization Sequences for Shape Optimization, *15th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2010 - IEEE)*, Amber Baltic Hotel, Miedzyzdroje, Poland, 23 - 26 August, 2010.



MERCI POUR VOTRE ATTENTION!

- ▶ Simultaneous shape, topology and homogenized properties optimization, *Struct. Multidiscip. Optim.*, 34 (2007) no.4, 361-365;
- ▶ A post-treatment of the homogenization method for shape optimization, *SIAM J. Control Optim.*, 47 (2008) no.3, 1380-1398;
- ▶ A post-treatment of the homogenization method in shape optimization, *8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO 2009)*, Centre for Mechanical Design, Instituto Superior Técnico, Lisbon, Portugal, 1-5 Juin 2009;
- ▶ Construction of Minimization Sequences for Shape Optimization, *15th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2010 - IEEE)*, Amber Baltic Hotel, Miedzyzdroje, Poland, 23 - 26 August, 2010.