Structure de l'espace des tenseurs d'élasticité en 2D

Géry de Saxcé[a] Claude Vallée[b]

[a] LML (UMR CNRS 8107), Villeneuve d'Ascq
[b] LMS (UMR CNRS 6610), Poitiers

10ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées
Poitiers, 26-31 août 2010

Contexte du travail

- CITV (Colloque International de Théories Variationnelles)
  http://citv.iam.rwth-aachen.de/citv

Contexte du travail

- CITV (Colloque International de Théories Variationnelles) http://citv.iam.rwth-aachen.de/citv
- Programme PEPS Maths-ST2I 09-99 "Classification des matériaux élastiques et calcul des invariants"

Contexte du travail

- CITV (Colloque International de Théories Variationnelles) http://citv.iam.rwth-aachen.de/citv
- Programme PEPS Maths-ST2I 09-99 "Classification des matériaux élastiques et calcul des invariants"
- Partenaires : LATP (Marseille), LML, LIFL (Lille), MSME (Paris-Est), LMS (Poitiers), LMS (Palaiseau), IAM (Aachen), FAST (Paris-Sud)

Origine du problème

- En élasticité, les matériaux sont décrits par les orbites de l'action du groupe des rotations sur l'espace des systèmes de coefficients élastiques. Leur description s'effectue par la détermination d'un système fini d'invariants polynomiaux qui séparent les orbites.

Origine du problème

- En élasticité, les matériaux sont décrits par les orbites de l'action du groupe des rotations sur l'espace des systèmes de coefficients élastiques. Leur description s'effectue par la détermination d'un système fini d'invariants polynomiaux qui séparent les orbites.
- Quoique le problème en 3D a déja fait l'objet d'études par Pratz (1983), Cowin (1988), Boehler, Kirillov Jr et Onat (1993), Ostrasablin (1998), Bona, Bucataru et Slawinski (2008), l'ambition est de le résoudre de manière exhaustive.

Origine du problème

- Les retombées attendues sont nombreuses concernant les matériaux composites, biologiques et les géomatériaux.

Origine du problème

- Les retombées attendues sont nombreuses concernant les matériaux composites, biologiques et les géomatériaux.
- Toutefois, l'étude du cas 2D est intéressante *per se*. L'identification du comportement élastique d'un matériau anisotrope dont la symétrie matérielle est *a priori* inconnue est par exemple un problème de première importance en géotechnique.

Objectif

- Loi de Hooke $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$

Objectif

- Loi de Hooke $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$
- Espace $\mathbb{E}(d) = \mathbb{S}^2\mathbb{S}^2\mathbb{R}^d$ des systèmes de coefficients élastiques $C = (C_{ijkl})_{1\leq i,j,k,l\leq d}$

Objectif

- Loi de Hooke $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$
- Espace $\mathbb{E}(d) = \mathbb{S}^2\mathbb{S}^2\mathbb{R}^d$ des systèmes de coefficients élastiques $C = (C_{ijkl})_{1 \leq i,j,k,l \leq d}$
- Pour la représentation linéaire de $\mathbb{SO}(d)$ dans $\mathbb{E}(d)$

$$C' = \rho(r) C \qquad \Longleftrightarrow \qquad C'_{ijkl} = r_i^p r_j^q r_k^r r_l^s C_{pqrs} \ ,$$

Objectif

- Loi de Hooke $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$
- Espace $\mathbb{E}(d) = \mathbb{S}^2\mathbb{S}^2\mathbb{R}^d$ des systèmes de coefficients élastiques $C = (C_{ijkl})_{1\leq i,j,k,l\leq d}$
- Pour la représentation linéaire de $\mathbb{SO}(d)$ dans $\mathbb{E}(d)$

$$C' = \rho(r)C \qquad \Longleftrightarrow \qquad C'_{ijkl} = r_i^p r_j^q r_k^r r_l^s C_{pqrs} \ ,$$

- Objectif : Etude de la structure géométrique sous-jacente de l'espace quotient $\mathbb{E}la(d) = \mathbb{E}(d)/\mathbb{SO}(d)$

Démarche

- Etape 1 : choix d'un système de paramètres faisant apparaître la décomposition en sous-espaces irréductibles

Démarche

- Etape 1 : choix d'un système de paramètres faisant apparaître la décomposition en sous-espaces irréductibles
- Etape 2 : détermination des invariants de l'orbite

Démarche

- Etape 1 : choix d'un système de paramètres faisant apparaître la décomposition en sous-espaces irréductibles
- Etape 2 : détermination des invariants de l'orbite
- Etape 3 : détermination de la structure géométrique sous-jacente de $\mathbb{E}la(2)$

Démarche

- Etape 1 : choix d'un système de paramètres faisant apparaître la décomposition en sous-espaces irréductibles
- Etape 2 : détermination des invariants de l'orbite
- Etape 3 : détermination de la structure géométrique sous-jacente de $\mathbb{E}la(2)$
- Etape 4 : détermination d'une tranche linéaire globale et séparation des orbites

Démarche

- Etape 1 : choix d'un système de paramètres faisant apparaître la décomposition en sous-espaces irréductibles
- Etape 2 : détermination des invariants de l'orbite
- Etape 3 : détermination de la structure géométrique sous-jacente de $\mathbb{E}la(2)$
- Etape 4 : détermination d'une tranche linéaire globale et séparation des orbites
- Etape 5 : stratification de l'espace des orbites et classes de matériaux

Représentation de Kelvin

- en 2D :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & \sqrt{2}C_{2212} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & 2C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$s = c\ e$$

Représentation de Kelvin

- en 2D :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & \sqrt{2}C_{2212} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & 2C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$s = c\ e$$

- Notation suggérée par Kelvin, réintroduite et utilisée par Walpote, Rychlewski, Mohrabadi et Cowin

Représentation de Kelvin

- en 2D :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & \sqrt{2}C_{2212} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & 2C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$s = c\ e$$

- Notation suggérée par Kelvin, réintroduite et utilisée par Walpote, Rychlewski, Mohrabadi et Cowin
- Théorème : dans la représentation de Kelvin, toute matrice orthogonale, $r \in \mathbb{O}(2)$ agit sur $\sigma \in \mathbb{S}^2\mathbb{R}^2$ comme une matrice orthogonale $R \in \mathbb{O}(3)$ agissant sur $s \in \mathbb{R}^3$.

Paramétrisation de l'espace des tenseurs de contraintes

- Idée-clé : le changement de variable $\tilde{s} = P^{-1}s$, avec $p = \frac{s_1+s_2}{\sqrt{2}}$, $\kappa' = \frac{s_1-s_2}{\sqrt{2}}$

$$\begin{pmatrix} p \\ \kappa' \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} .$$

Paramétrisation de l'espace des tenseurs de contraintes

- Idée-clé : le changement de variable $\tilde{s} = P^{-1}s$, avec $p = \frac{s_1+s_2}{\sqrt{2}}$, $\kappa' = \frac{s_1-s_2}{\sqrt{2}}$

$$\begin{pmatrix} p \\ \kappa' \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} .$$

- induit sur le tenseur d'élasticité le changement de variable

$$\tilde{c} = P^{-1}\, c\, P = \begin{pmatrix} 2(\lambda+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \eta & \alpha \\ \eta & 2\gamma & -2\beta \\ \alpha & -2\beta & \gamma \end{pmatrix}$$

Paramétrisation de l'espace des tenseurs d'élasticité

- où apparaissent les coefficients de Lamé :

$$\lambda = \frac{1}{8}\left(c_{11} + c_{22} + 6c_{12} - 2c_{33}\right) ,$$

$$2\mu = \frac{1}{4}\left(c_{11} + c_{22} - 2c_{12} + 2c_{33}\right) ,$$

Paramétrisation de l'espace des tenseurs d'élasticité

- où apparaissent les coefficients de Lamé :

$$\lambda = \frac{1}{8}\left(c_{11} + c_{22} + 6c_{12} - 2c_{33}\right) ,$$

$$2\mu = \frac{1}{4}\left(c_{11} + c_{22} - 2c_{12} + 2c_{33}\right) ,$$

- et d'autres variables :

$$\eta = \frac{c_{11} - c_{22}}{2}, \qquad \gamma = \frac{1}{8}\left(2c_{33} + 2c_{12} - c_{11} - c_{22}\right)$$

$$\alpha = \frac{c_{23} + c_{13}}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = \frac{c_{23} - c_{13}}{2\sqrt{2}} .$$

Décomposition en sous-espaces irréductibles

- Le choix des nouvelles variables révèle la décomposition irréductible :

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \\ \eta' \\ \alpha' \\ \gamma' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos2\theta & sin2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -sin(2\theta) & cos2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & cos4\theta & sin4\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -sin4\theta & cos4\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \eta \\ \alpha \\ \gamma \\ \beta \end{pmatrix}$$

Invariants de chaque sous-espace irréductible

- Sous-espace $\mathbb{E}_0$: un invariant λ

Invariants de chaque sous-espace irréductible

- Sous-espace $\mathbb{E}_0$: un invariant λ
- Sous-espace $\mathbb{E}'_0$: un invariant μ

Invariants de chaque sous-espace irréductible

- Sous-espace $\mathbb{E}_0$: un invariant λ
- Sous-espace $\mathbb{E}'_0$: un invariant μ
- Sous-espace $\mathbb{E}_2$: un invariant $I_2^2 = \eta^2 + \alpha^2$

Invariants de chaque sous-espace irréductible

- Sous-espace $\mathbb{E}_0$: un invariant λ
- Sous-espace $\mathbb{E}'_0$: un invariant μ
- Sous-espace $\mathbb{E}_2$: un invariant $I_2^2 = \eta^2 + \alpha^2$
- Sous-espace $\mathbb{E}_4$: un invariant $I_4^2 = \gamma^2 + \beta^2$
- Mais attention ! Quand $\mathbb{SO}(2)$ agit sur $\mathbb{E}(2)$, L'orbite circulaire $\mathcal{O}_4$ dans $\mathbb{E}_4$ est parcouru deux foix plus vite que l'orbite circulaire $\mathcal{O}_2$ dans $\mathbb{E}_2$ (ces orbites sont "couplées")

Invariants joints

- Ce couplage est pris en compte par des invariants joints que l'on peut déterminer simplement en travaillant avec $z_2 = \eta + i\ \alpha$ et $z_4 = \gamma + i\ \beta$.

Invariants joints

- Ce couplage est pris en compte par des invariants joints que l'on peut déterminer simplement en travaillant avec $z_2 = \eta + i\ \alpha$ et $z_4 = \gamma + i\ \beta$.
- On obtient un invariant complexe $\zeta = \frac{z_2^2}{z_4}\ I_4^2 = z_2^2 \bar{z}_4 = (\eta + i\ \alpha)^2 (\gamma + i\ \beta)$

Invariants joints

- Ce couplage est pris en compte par des invariants joints que l'on peut déterminer simplement en travaillant avec $z_2 = \eta + i\ \alpha$ et $z_4 = \gamma + i\ \beta$.
- On obtient un invariant complexe $\zeta = \frac{z_2^2}{z_4}\ I_4^2 = z_2^2 \bar{z}_4 = (\eta + i\ \alpha)^2(\gamma + i\ \beta)$
- Mais attention ! Il est lié aux autres par $\mid \zeta \mid^2 = I_4^2 I_2^4$

Invariants joints

- Ce couplage est pris en compte par des invariants joints que l'on peut déterminer simplement en travaillant avec $z_2 = \eta + i\ \alpha$ et $z_4 = \gamma + i\ \beta$.
- On obtient un invariant complexe $\zeta = \frac{z_2^2}{z_4}\ I_4^2 = z_2^2 \bar{z}_4 = (\eta + i\ \alpha)^2 (\gamma + i\ \beta)$
- Mais attention ! Il est lié aux autres par $\mid \zeta \mid^2 = I_4^2 I_2^4$
- D'où deux invariants réels :

$$\zeta_r = \Re\zeta = 2\alpha\beta\eta\ + \gamma\ (\eta^2 - \alpha^2)\ ,$$

$$\zeta_i = \Im\zeta = 2\alpha\gamma\eta - \beta\ (\eta^2 - \alpha^2)\ .$$

Structure de l'espace des tenseurs d'élasticité

- Si $I_2 > 0$ et $I_4 > 0$, les orbites (génériques) sont des lignes compactes. Leur ensemble $\mathbb{E}la_g$, de dimension 5, peut être paramétrisé par les coordonnées $(\lambda, \mu, I_2, I_4, \zeta_r)$ ou $(\lambda, \mu, I_2, I_4, \zeta_i)$.

Structure de l'espace des tenseurs d'élasticité

- Si $I_2 > 0$ et $I_4 > 0$, les orbites (génériques) sont des lignes compactes. Leur ensemble $\mathbb{E}la_g$, de dimension 5, peut être paramétrisé par les coordonnées $(\lambda, \mu, I_2, I_4, \zeta_r)$ ou $(\lambda, \mu, I_2, I_4, \zeta_i)$.
- Si $I_2 = 0$ et $I_4 > 0$, $\zeta_r = \zeta_i = 0$, les orbites sont des cercles de rayon I_4. Leur ensemble est un volume $\mathbb{E}la_4$ qui peut être paramétrisé par les coordonnées (λ, μ, I_4).

Structure de l'espace des tenseurs d'élasticité

- Si $I_2 > 0$ et $I_4 > 0$, les orbites (génériques) sont des lignes compactes. Leur ensemble $\mathbb{E}la_g$, de dimension 5, peut être paramétrisé par les coordonnées $(\lambda, \mu, I_2, I_4, \zeta_r)$ ou $(\lambda, \mu, I_2, I_4, \zeta_i)$.
- Si $I_2 = 0$ et $I_4 > 0$, $\zeta_r = \zeta_i = 0$, les orbites sont des cercles de rayon I_4. Leur ensemble est un volume $\mathbb{E}la_4$ qui peut être paramétrisé par les coordonnées (λ, μ, I_4).
- Si $I_2 > 0$ et $I_4 = 0$, $\zeta_r = \zeta_i = 0$, les orbites sont des cercles de rayon I_2. Leur ensemble est un volume $\mathbb{E}la_2$ qui peut être paramétrisé par les coordonnées (λ, μ, I_2).

Structure de l'espace des tenseurs d'élasticité

- Si $I_2 > 0$ et $I_4 > 0$, les orbites (génériques) sont des lignes compactes. Leur ensemble $\mathbb{E}la_g$, de dimension 5, peut être paramétrisé par les coordonnées $(\lambda, \mu, I_2, I_4, \zeta_r)$ ou $(\lambda, \mu, I_2, I_4, \zeta_i)$.
- Si $I_2 = 0$ et $I_4 > 0$, $\zeta_r = \zeta_i = 0$, les orbites sont des cercles de rayon I_4. Leur ensemble est un volume $\mathbb{E}la_4$ qui peut être paramétrisé par les coordonnées (λ, μ, I_4).
- Si $I_2 > 0$ et $I_4 = 0$, $\zeta_r = \zeta_i = 0$, les orbites sont des cercles de rayon I_2. Leur ensemble est un volume $\mathbb{E}la_2$ qui peut être paramétrisé par les coordonnées (λ, μ, I_2).
- Si $I_2 = I_4 = 0$, les orbites sont des points. Leur ensemble est une surface $\mathbb{E}la_{iso}$ paramétrisable par les coordonnées (λ, μ).

Détermination d'une tranche linéaire globale

- un sous-espace vectoriel $S \subset \mathbb{E}(2)$ tel que chaque orbite de $\mathbb{SO}(2)$ dans $\mathbb{E}(2)$ intersecte S en un point d'une orbite d'un groupe fini Γ est appelé une tranche linéaire globale.

Détermination d'une tranche linéaire globale

- un sous-espace vectoriel $S \subset \mathbb{E}(2)$ tel que chaque orbite de $\mathbb{SO}(2)$ dans $\mathbb{E}(2)$ intersecte S en un point d'une orbite d'un groupe fini Γ est appelé une tranche linéaire globale.
- L'existence d'une telle tranche rend l'étude des tenseurs d'élasticité beaucoup plus aisée car

$$\mathbb{E}la(2) = \mathbb{E}(2)/\mathbb{SO}(2) \cong S/\Gamma \ .$$

Détermination d'une tranche linéaire globale

- un sous-espace vectoriel $S \subset \mathbb{E}(2)$ tel que chaque orbite de $\mathbb{SO}(2)$ dans $\mathbb{E}(2)$ intersecte S en un point d'une orbite d'un groupe fini Γ est appelé une tranche linéaire globale.
- L'existence d'une telle tranche rend l'étude des tenseurs d'élasticité beaucoup plus aisée car

$$\mathbb{E}la(2) = \mathbb{E}(2)/\mathbb{SO}(2) \cong S/\Gamma \ .$$

- on identifie $\mathbb{E}(2)$ à l'espace $\mathbb{R}^6$ des vecteurs

$$c = \left(\begin{array}{cccccc} \lambda & \mu & \eta & \alpha & \gamma & \beta \end{array} \right)^T \ .$$

Détermination d'une tranche linéaire globale

- Une tranche linéaire globale est

$$S = \left\{ c \in \mathbb{R}^6 \mid \eta = 0 \right\} \ ,$$

Détermination d'une tranche linéaire globale

- Une tranche linéaire globale est

$$S = \left\{ c \in \mathbb{R}^6 \mid \eta = 0 \right\} \ ,$$

- le groupe fini $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ agissant sur S par

$$(\epsilon_1, \epsilon_2) \cdot \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \alpha & \gamma & \beta \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \epsilon_1 \alpha & \epsilon_2 \gamma & \beta \end{pmatrix}^T \ .$$

Détermination d'une tranche linéaire globale

- Une tranche linéaire globale est

$$S = \left\{ c \in \mathbb{R}^6 \mid \eta = 0 \right\} \ ,$$

- le groupe fini $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ agissant sur S par

$$(\epsilon_1, \epsilon_2) \cdot \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \alpha & \gamma & \beta \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \epsilon_1\alpha & \epsilon_2\gamma & \beta \end{pmatrix}^T \ .$$

- L'algèbre $\mathbb{R}[\mathbb{E}(2)]^{\mathbb{SO}(2)}$ des invariants des tenseurs d'élasticité est générée par un nombre fini de polynômes

$$\mathbb{R}[\mathbb{E}(2)]^{\mathbb{SO}(2)} = \mathbb{R}[\lambda, \mu, I_2, I_4, \zeta_i] \ .$$

Séparation des orbites

- On obtient l'application polynômiale $P : \mathbb{E}(2) \to \mathbb{R}^5 : c \mapsto \begin{pmatrix} \lambda(c) & \mu(c) & I_2(c) & I_4(c) & \zeta_i(c) \end{pmatrix}^T.$

Séparation des orbites

- On obtient l'application polynômiale
  $P : \mathbb{E}(2) \to \mathbb{R}^5 : c \mapsto \begin{pmatrix} \lambda(c) & \mu(c) & I_2(c) & I_4(c) & \zeta_i(c) \end{pmatrix}^T$.
- "Les invariants séparent les orbites" signifie que l'application P induit une application injective $\bar{P} : \mathbb{E}la(2) \to \mathbb{R}^5$.

Séparation des orbites

- On obtient l'application polynômiale $P : \mathbb{E}(2) \rightarrow \mathbb{R}^5 : c \mapsto \begin{pmatrix} \lambda(c) & \mu(c) & I_2(c) & I_4(c) & \zeta_i(c) \end{pmatrix}^T$.
- "Les invariants séparent les orbites" signifie que l'application P induit une application injective $\bar{P} : \mathbb{E}la(2) \rightarrow \mathbb{R}^5$.
- En effet, utilisant S, l'application $\bar{P}$ est injective

$$P \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \\ \pm\alpha \\ \pm\gamma \\ \beta \end{pmatrix} = \bar{P} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \\ \mid \alpha \mid \\ \mid \gamma \mid \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ I_2 \\ I_4 \\ \zeta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \mid \alpha \mid \\ \mid \gamma^2 + \beta^2 \mid^{1/2} \\ \beta\alpha^2 \end{pmatrix} .$$

Classe de matériaux en élasticité anisotrope

- Le stabilisateur d'un tenseur d'élasticité est appelé groupe de symétrie. A chacun correspond une classe de matériaux.

Classe de matériaux en élasticité anisotrope

- Le stabilisateur d'un tenseur d'élasticité est appelé groupe de symétrie. A chacun correspond une classe de matériaux.
- Une méthode pour trouver les invariants consiste à étudier les stabilisateurs de $C \in \mathbb{E}(2)$, donc les sous-groupes fermés de $\mathbb{O}(2)$ (voir par exemple [J.M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, 1970]).

Classe de matériaux en élasticité anisotrope

- Le stabilisateur d'un tenseur d'élasticité est appelé groupe de symétrie. A chacun correspond une classe de matériaux.
- Une méthode pour trouver les invariants consiste à étudier les stabilisateurs de $C \in \mathbb{E}(2)$, donc les sous-groupes fermés de $\mathbb{O}(2)$ (voir par exemple [J.M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, 1970]).
- Idée-clé :combiner cette méthode avec la représentation de Kelvin et la décomposition en irréductibles, ce qui permet de travailler dans un repère quelconque.

Classe de matériaux en élasticité anisotrope

- Le stabilisateur d'un tenseur d'élasticité est appelé groupe de symétrie. A chacun correspond une classe de matériaux.
- Une méthode pour trouver les invariants consiste à étudier les stabilisateurs de $C \in \mathbb{E}(2)$, donc les sous-groupes fermés de $\mathbb{O}(2)$ (voir par exemple [J.M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, 1970]).
- Idée-clé :combiner cette méthode avec la représentation de Kelvin et la décomposition en irréductibles, ce qui permet de travailler dans un repère quelconque.
- On va pouvoir ainsi identifier le comportement élastique d'un matériau anisotrope dont la symétrie matérielle est *a priori* inconnue (problème de première importance en géotechnique).

Matériau monoclinique

- Un matériau dont le stabilisateur contient une réflexion par rapport à une droite Δ est dit être monoclinique.

Matériau monoclinique

- Un matériau dont le stabilisateur contient une réflexion par rapport à une droite Δ est dit être monoclinique.
- Si la normale à Δ est inclinée d'un angle φ par rapport à l'axe Ox_1, la réflexion m_φ a une représentation de Kelvin de la forme

$$\tilde{M}_\varphi = P^{-1}\ M_\varphi\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -m_{2\varphi} \end{pmatrix} \quad .$$

Matériau monoclinique

- Un matériau dont le stabilisateur contient une réflexion par rapport à une droite Δ est dit être monoclinique.
- Si la normale à Δ est inclinée d'un angle φ par rapport à l'axe Ox_1, la réflexion m_φ a une représentation de Kelvin de la forme

$$\tilde{M}_\varphi = P^{-1} \; M_\varphi \; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -m_{2\varphi} \end{pmatrix} \quad .$$

- On décompose $\tilde{c}$ par bloc

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} 2\,(\lambda + \mu) & \tilde{v}^T \\ \tilde{v} & \tilde{A} \end{pmatrix} \, .$$

Matériau monoclinique

- L'action de la réflexion sur les coefficients élastiques s'écrit

$$\tilde{c}' = \tilde{M}_\varphi \ \tilde{c} \ (\tilde{M}_\varphi)^T = \begin{pmatrix} 2\,(\lambda+\mu) & (-m_\varphi \tilde{v})^T \\ -m_\varphi \tilde{v} & m_\varphi \tilde{A} m_\varphi^T \end{pmatrix} \quad .$$

Matériau monoclinique

- L'action de la réflexion sur les coefficients élastiques s'écrit

$$\tilde{c}' = \tilde{M}_\varphi \ \tilde{c} \ (\tilde{M}_\varphi)^T = \begin{pmatrix} 2\,(\lambda+\mu) & (-m_\varphi \tilde{v})^T \\ -m_\varphi \tilde{v} & m_\varphi \tilde{A} m_\varphi^T \end{pmatrix} \quad .$$

- Le matériau est monoclinique si les coefficients élastiques sont invariants par une réflexion :

$$\tilde{v} = -m_\varphi \tilde{v} \ , \qquad \tilde{A} = m_\varphi \tilde{A} m_\varphi^T \ ,$$

Matériau monoclinique

- d'où les relations :

$$\alpha = tan(2\varphi)\ \eta\ , \qquad \beta = tan(4\varphi)\ \gamma\ . \tag{1}$$

Matériau monoclinique

- d'où les relations :

$$\alpha = tan(2\varphi)\ \eta\ , \qquad \beta = tan(4\varphi)\ \gamma\ . \tag{1}$$

- Eliminant φ entre les deux relations donne la condition pour qu'un matériau soit monoclinique

$$\zeta_i = 2\alpha\gamma\eta - \beta\ (\eta^2 - \alpha^2) = 0\ . \tag{2}$$

Matériau monoclinique

- d'où les relations :

$$\alpha = tan(2\varphi)\ \eta\ , \qquad \beta = tan(4\varphi)\ \gamma\ . \tag{1}$$

- Eliminant φ entre les deux relations donne la condition pour qu'un matériau soit monoclinique

$$\zeta_i = 2\alpha\gamma\eta - \beta\left(\eta^2 - \alpha^2\right) = 0\ . \tag{2}$$

- Si (2) est vérifiée, elles permettent de déterminer la valeur de φ donc le repère de symétrie s'il n'est pas connu *a priori*.

Matériau orthotrope

- Un matériau dont le stabilisateur contient les réflexions par rapport à 2 droites orthogonales est dit être orthotrope.

Matériau orthotrope

- Un matériau dont le stabilisateur contient les réflexions par rapport à 2 droites orthogonales est dit être orthotrope.
- Si les relations (1) sont satisfaite pour φ, elle le sont pour $\varphi + \pi/2$, ce qui montre en $2D$ qu'un matériau monoclinique est orthotrope.

Matériau orthotrope

- Un matériau dont le stabilisateur contient les réflexions par rapport à 2 droites orthogonales est dit être orthotrope.
- Si les relations (1) sont satisfaite pour φ, elle le sont pour $\varphi + \pi/2$, ce qui montre en $2D$ qu'un matériau monoclinique est orthotrope.
- $\zeta_i = 2\alpha\gamma\eta - \beta\left(\eta^2 - \alpha^2\right)$ est une mesure invariante du défaut d'orthotropie.

Matériau tétragonal

- Un matériau dont le stabilisateur contient les réflexions par rapport à 4 droites obtenues par rotation successive de $\pi/4$ est dit être tétragonal.

Matériau tétragonal

- Un matériau dont le stabilisateur contient les réflexions par rapport à 4 droites obtenues par rotation successive de $\pi/4$ est dit être tétragonal.
- Un matériau orthotrope est tétragonal si $\alpha = \eta = 0$ (ou si $I_2^2 = \eta^2 + \alpha^2 = 0$), donc si :

$$c_{11} = c_{22} \ , \qquad c_{23} = -c_{13} \ .$$

Matériau tétragonal

- Un matériau dont le stabilisateur contient les réflexions par rapport à 4 droites obtenues par rotation successive de $\pi/4$ est dit être tétragonal.
- Un matériau orthotrope est tétragonal si $\alpha = \eta = 0$ (ou si $I_2^2 = \eta^2 + \alpha^2 = 0$), donc si :

$$c_{11} = c_{22} \ , \qquad c_{23} = -c_{13} \ .$$

- Pour un matériau orthotrope, I_2 est une mesure invariante du défaut de tétragonalité.

Matériau isotrope

- Un matériau dont le stabilisateur est $\mathbb{O}(2)$ lui-même est dit être isotrope.

Matériau isotrope

- Un matériau dont le stabilisateur est $\mathbb{O}(2)$ lui-même est dit être isotrope.
- Un matériau tétragonal est isotrope si $\gamma = \beta = 0$ (ou si $I_4^2 = \gamma^2 + \beta^2 = 0$).

Matériau isotrope

- Un matériau dont le stabilisateur est $\mathbb{O}(2)$ lui-même est dit être isotrope.
- Un matériau tétragonal est isotrope si $\gamma = \beta = 0$ (ou si $I_4^2 = \gamma^2 + \beta^2 = 0$).
- Pour un matériau tétragonal, I_4 est une mesure invariante du défaut d'isotropie.

Conclusions et perspectives

- En $2D$, l'espace des tenseurs d'élasticité est paramétrisable par 5 coordonnées choisies parmi 6 invariants.

Conclusions et perspectives

- En $2D$, l'espace des tenseurs d'élasticité est paramétrisable par 5 coordonnées choisies parmi 6 invariants.
- C'est une variété stratifiée dont les parties $\mathbb{E}la_g$, $\mathbb{E}la_4$, $\mathbb{E}la_2$ et $\mathbb{E}la_{iso}$ sont respectivement de dimensions 5, 3, 3 et 2.

Conclusions et perspectives

- En $2D$, l'espace des tenseurs d'élasticité est paramétrisable par 5 coordonnées choisies parmi 6 invariants.
- C'est une variété stratifiée dont les parties $\mathbb{E}la_g$, $\mathbb{E}la_4$, $\mathbb{E}la_2$ et $\mathbb{E}la_{iso}$ sont respectivement de dimensions 5, 3, 3 et 2.
- Son étude est beaucoup plus aisée en utilisant la représentation de Kelvin, la décomposition en sous-espaces irréductibles et une tranche linéaire globale.

Conclusions et perspectives

- En $2D$, l'espace des tenseurs d'élasticité est paramétrisable par 5 coordonnées choisies parmi 6 invariants.
- C'est une variété stratifiée dont les parties $\mathbb{E}la_g$, $\mathbb{E}la_4$, $\mathbb{E}la_2$ et $\mathbb{E}la_{iso}$ sont respectivement de dimensions 5, 3, 3 et 2.
- Son étude est beaucoup plus aisée en utilisant la représentation de Kelvin, la décomposition en sous-espaces irréductibles et une tranche linéaire globale.
- Les invariants $\zeta_i, I_2, I_4, \lambda, \mu$ séparent les orbites.

Conclusions et perspectives

- En $2D$, l'espace des tenseurs d'élasticité est paramétrisable par 5 coordonnées choisies parmi 6 invariants.
- C'est une variété stratifiée dont les parties $\mathbb{E}la_g$, $\mathbb{E}la_4$, $\mathbb{E}la_2$ et $\mathbb{E}la_{iso}$ sont respectivement de dimensions 5, 3, 3 et 2.
- Son étude est beaucoup plus aisée en utilisant la représentation de Kelvin, la décomposition en sous-espaces irréductibles et une tranche linéaire globale.
- Les invariants $\zeta_i, I_2, I_4, \lambda, \mu$ séparent les orbites.
- Les 3 premiers sont des mesures invariantes du défaut de symétrie par rapport respectivement aux matériaux orthotropes, tétragonaux et isotropes.

Conclusions et perspectives

- En $2D$, l'espace des tenseurs d'élasticité est paramétrisable par 5 coordonnées choisies parmi 6 invariants.
- C'est une variété stratifiée dont les parties $\mathbb{E}la_g$, $\mathbb{E}la_4$, $\mathbb{E}la_2$ et $\mathbb{E}la_{iso}$ sont respectivement de dimensions 5, 3, 3 et 2.
- Son étude est beaucoup plus aisée en utilisant la représentation de Kelvin, la décomposition en sous-espaces irréductibles et une tranche linéaire globale.
- Les invariants $\zeta_i, I_2, I_4, \lambda, \mu$ séparent les orbites.
- Les 3 premiers sont des mesures invariantes du défaut de symétrie par rapport respectivement aux matériaux orthotropes, tétragonaux et isotropes.
- Perspectives : traiter le cas $3D$.