

SUR LE MOUVEMENT CAVITANT D'UN FLUIDE LUBRIFIANT

Bogdan N. NICOLESCU, Tudor C. PETRESCU-IVAN

Université de Pitesti

Résumé: On s'intéresse au mouvement d'un fluide visqueux incompressible entre deux surfaces non parallèles, noté S_1 (le rotor) et S_2 (le stator), qui définissent un système tribologique à symétrie axiale. Le caractère non parallèle des deux surfaces est induit par l'action des perturbations extérieures (les plus fréquentes étant celles du type vibration).

A cause de ces perturbations on aura un mouvement supplémentaire du rotor, comme le mouvement d'un rigide à point fixe.

Le non parallélisme des deux surfaces en contact induit des modifications dans le champ de la pression sur la surface du stator et par conséquent, des coupures du film de lubrification peuvent apparaître sur différentes portions de la surface.

Pour étudier ces phénomènes on obtient une nouvelle forme de l'équation de Reynolds et on construit des solutions auto similaires qui nous permettent de décrire la rupture du film, considérée comme un type de cavitation du lubrifiant.

1. Introduction

Dans la théorie classique de la lubrification le modèle de Reynolds décrit le comportement hydrodynamique du film d'un fluide entre les deux surfaces en contact d'un système tribologique (voire fig. 1).

L'équation de Reynolds s'obtient des équations de Navier-Stokes et s'écrit sous la forme [2], [7]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho (V_1^x + V_2^x) h}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho (V_1^y + V_2^y) h}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (1)$$

ou ρ est la densité et μ la viscosité du fluide.

Suivant la géométrie du système considéré on doit préciser les conditions aux limites.

Le champ de pression représente l'inconnue de l'équation de Reynolds et du fait que l'épaisseur h du fluide est petite par rapport à la longueur caractéristique, on considère que l'inconnue est une fonction seulement de $M_1(x, y) \in S_1$ et du temps $t \in (0, +\infty)$.

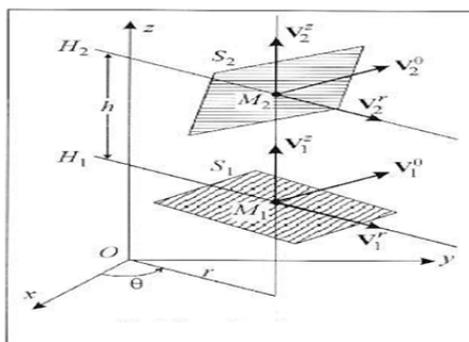


Figure 2.1. Une vue schématique du système tribologique

Pour l'étude de la cavitation on a considéré différents modèles comme: le modèle de Sommerfeld, le modèle de Gümbel, le modèle de Reynolds et le modèle de Elrod-Adams [3]. On peut ainsi étudier l'érosion des surfaces de contact, l'instabilité du system causée par les grandes valeurs de la pression etc.

D'autre part, la cavitation peut causer des changements d'état du fluide, liquide on gaz, ou des zones de contact sèches [4].

2. Le cas axisymétrique

Dans les cas de l'étanchement axisymétrique (voir fig.2.) avec une surface S_1 fixe (le stator) et une autre S_2 mobile (le rotor), on dénote par h la distance entre les deux surfaces.

Quand les surfaces S_1 et S_2 sont parallèles on peut avoir $h = const.$ ou $h = l(t)$, $t > 0$, dans le cas d'un déplacement vertical de la surface S_2 produit par la variation de la pression.

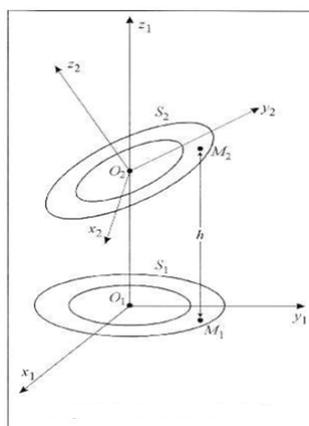


Figure 2a. La représentation schématique d'une étanchéité axisymétrique

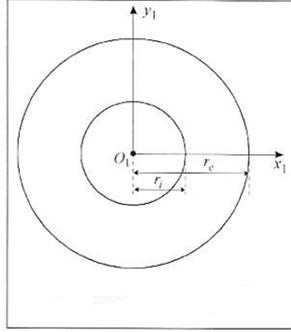


Figure 2.a. La projection sur le plan horizontal

Dans ce cas l'équation de Reynolds (1) prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[rh^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] = 6\mu h^2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{h} V^r \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V^\theta}{h} \right) \right] \quad (2)$$

ou V^r est la vitesse radiale de S_2 , V^θ la vitesse angulaire, pour $\forall (r, \theta) \in (r_i, r_e) \times (0, 2\pi)$, $t > 0$.

Les conditions aux limites sont les suivantes:

$$\begin{cases} P|_{r=r_i} = p_i(\theta, t) \\ P|_{r=r_e} = p_e(\theta, t) \end{cases} \quad (3)$$

ou $p_i(\theta, t)$ et $p_e(\theta, t)$ sont des pressions connues.

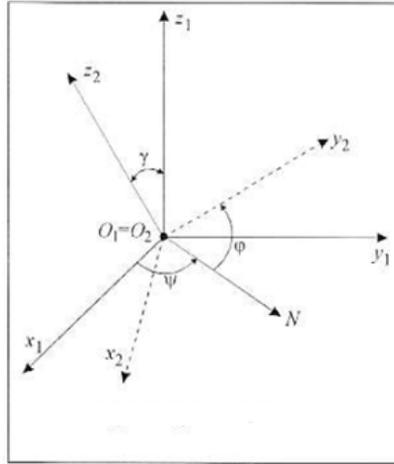


Figure 3. Angles d'Euler

Si la surface S_2 a un mouvement oscillatoire de la forme du rigide à point fixe, décrite par les angles d'Euler (ψ, ϕ, γ) , (fig. 3), alors la distance entre les deux surfaces S_1 et S_2 sera une fonction $h = h(r, \theta, t)$ s'écrivant sous la forme [9]

$$h(r, \theta, t) = l(t) + r \left| \sin(\theta - \psi(t) - \omega t) \right| \tan \gamma(t), \quad (4)$$

avec r , θ les coordonnées polaires et $l(t)$ la variation de S_2 sur la verticale.

Dans ce cas la vitesse radiale aura la forme suivante:

$$V^r = [-\dot{\gamma} \sin(\theta + \varphi) + \dot{\psi} \sin \gamma \cos(\theta + \varphi)]h, \quad (5)$$

et celle de la vitesse angulaire sera

$$V^\theta = (\omega + \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \gamma)r - [-\dot{\gamma} \cos(\theta + \varphi) + \dot{\psi} \sin \gamma \sin(\theta + \varphi)]h, \quad (6)$$

ou φ, ψ, γ sont considérées comme fonctions de t .

Leurs dérivées par rapport au temps $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\gamma}$ sont des vitesses angulaires. La vitesse de rotation ω de la surface S_2 est constante et on la considère comme une caractéristique de l'étanchéité.

Dans ces hypothèses l'équation (2) prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[rh^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] = 6\mu V(t) r \cos(\theta - \psi - \omega t) \tan \gamma, \quad (7)$$

avec

$$V(t) = \omega + \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \gamma.$$

Dans [9] l'équation (7) avec les conditions aux limites (3) a été résolue en vue d'obtenir une solution classique.

3. La méthode des échelles multiples

Dans ce paragraphe on va étudier le problème (7), (3) avec la méthode des échelles multiples avec l'hypothèse que S_1 est une surface rugueuse [7], donc les coefficients de l'équation sont rapidement oscillant. Par cela on introduit la rayon polaire

$$\bar{r} = \frac{r - r_i}{r_e - r_i}, \quad (8)$$

avec $0 < r_i < r_e$, les deux rayons de la couronne circulaire.

De cette manière la pression est définie dans le domaine $\Omega = (r_i, r_e) \times (0, 2\pi)$.

Si on fait le changement de variables

$$\begin{cases} x_1 = \bar{r} \\ x_2 = \frac{\theta}{2\pi} \end{cases} \quad (9)$$

on a $Y = (0,1) \times (0,1)$. Le champ de pression est alors

$$\tilde{p}(x_1, x_2, t) := p(r(x_1), \theta(x_2), t), \quad (10)$$

et la distance entre les deux surfaces devient

$$\begin{aligned}\tilde{h}(x_1, x_2, t) &:= \frac{1}{r_e - r_i} h(r(x_1), \theta(x_2), t) = \\ &= \frac{l(t)}{r_e - r_i} + (x_1 + c) |\sin(2\pi x_2 - \psi - \omega t)| \tan \gamma\end{aligned}\quad (11)$$

avec

$$c := \frac{r_i}{r_e - r_i}. \quad (12)$$

Sous ces hypothèses l'équation de Reynolds (7) prend la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[(x_1 + c) \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_1} \right] + \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\tilde{h}^3}{(x_1 + c)} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_2} \right] = \frac{\mu}{\pi} \left[(x_1 + c) (\omega + \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \gamma) \right] \frac{\partial \tilde{h}^3}{\partial x_2}. \quad (13)$$

On introduit la notation:

$$\begin{cases} a_1(\bar{x}, t) = (x_1 + c) \tilde{h}^3 \\ a_2(\bar{x}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\tilde{h}^3}{(x_1 + c)} \end{cases} \quad (14)$$

ou sous forme vectorielle

$$\vec{a}(\bar{x}, t) = (a_1(\bar{x}, t), a_2(\bar{x}, t)), \quad (14)'$$

$$\vec{V}(t) = \frac{\mu}{\pi} (\omega + \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \gamma). \quad (15)$$

Avec ces notations l'équation (13) devient

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[a_1(\bar{x}, t) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[a_2(\bar{x}, t) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_2} \right] = \vec{V}(t) \frac{\partial}{\partial x_2} [a_2(\bar{x}, t)] \quad (16)$$

On va utiliser la méthode des échelles multiples pour l'étude de l'équation (16). On cherche \tilde{p}^ε sous la forme du développement asymptotique:

$$\tilde{p}^\varepsilon = \tilde{p}^0(\bar{x}, t) + \varepsilon \tilde{p}^1\left(\bar{x}, \frac{\bar{x}}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon^2 \tilde{p}^2\left(\bar{x}, \frac{\bar{x}}{\varepsilon}, t\right) + \dots, \quad (17)$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{x}}{\varepsilon}, \quad (18)$$

ou ε décrit les rugosités du rotor S_1 et $\varepsilon \rightarrow 0$.

Les opérateurs de dérivation sont donc

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_2}. \end{cases} \quad (19)$$

Si on dénote par

$$a_1^\varepsilon = a_1\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}, t\right), a_2^\varepsilon = a_2\left(\frac{\bar{x}}{\varepsilon}, t\right), \quad (20)$$

dans (16) on a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_1}\right) \left\{ a_1^\varepsilon \left[\left(\frac{\partial \tilde{p}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial y_1}\right) + \varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{p}^2}{\partial y_1}\right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \tilde{p}^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{p}^3}{\partial y_1}\right) + \dots \right] \right\} + \\ & \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \left\{ a_2^\varepsilon \left[\left(\frac{\partial \tilde{p}^0}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial y_2}\right) + \varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{p}^2}{\partial y_2}\right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \tilde{p}^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{p}^3}{\partial y_2}\right) + \dots \right] \right\} = \\ & = \tilde{V}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_2}\right) [a_2(\bar{x}, t)] = \frac{1}{\varepsilon} \tilde{V}(t) \frac{\partial a_2^\varepsilon}{\partial y_2} \end{aligned}$$

À l'ordre ε^{-1} on obtient l'équation

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left(a_1^\varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{p}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial y_1}\right) \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(a_2^\varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{p}^0}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial y_2}\right) \right) = 0 \quad (21)$$

qui est de la forme

$$-\operatorname{div}_y (\bar{a}^\varepsilon(\bar{y}, t) \cdot \operatorname{grad}_y \tilde{p}^1) = \operatorname{div}_y (\bar{a}^\varepsilon(\bar{y}, t) \cdot \operatorname{grad}_x \tilde{p}^0). \quad (21)'$$

Avec \tilde{p}^0 connu, on cherche la solution $\tilde{p}^1 \in H^1(Y)$ du problème local (21) sous la forme

$$\tilde{p}^1(\bar{x}, t, \bar{y}) = \chi_1(\bar{y}) \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial x_1} + \chi_2(\bar{y}) \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial x_2}, \quad (22)$$

ou χ_1 et χ_2 (les correcteurs) sont les solutions de

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_j^\varepsilon \frac{\partial \chi_k}{\partial y_j} \right) = \frac{\partial a_k^\varepsilon}{\partial y_k}, \quad k = 1, 2, \quad (23)$$

avec $\chi_k \in H^1(Y)$ et de moyenne nulle, $\langle \chi_k \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \chi_k(\bar{y}) d\bar{y} = 0$, $k = 1, 2$.

Si on introduit les fonctions $w_k \in H^1(Y)$, Y -périodiques et de moyenne nulle $\langle w_k \rangle = 0$, alors les fonctions

$$w_k = \chi_k + y_k, \quad k = 1, 2 \quad (24)$$

sont les solutions de l'équation

$$\operatorname{div}_y (\bar{a}^\varepsilon(\bar{y}, t) \cdot \operatorname{grad}_y w) = 0. \quad (25)$$

Comme dans la théorie classique de l'homogénéisation [5], [6], [11], on définit les coefficients homogénéisés

$$\begin{cases} q_1^0 = \langle a_1^\varepsilon \rangle + \left\langle a_1^\varepsilon \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \right\rangle \\ q_2^0 = \langle a_2^\varepsilon \rangle + \left\langle a_1^\varepsilon \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2} \right\rangle \end{cases} \quad (26)$$

d'où l'équation homogénéisée

$$-\sum_{i=2}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(q_2^0 \frac{\partial p^0}{\partial x_i} \right) = f(\bar{x}, t) \quad (27)$$

avec $p^0 \in H_0^1(\Omega)$.

Dans le cas axisymétrique, avec $l(t) \equiv 0$ dans (11), on obtient la solution de l'équation (25) sous la forme

$$w(\bar{y}) = A + B \frac{1}{\tilde{h}_\varepsilon^2} \quad (28)$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$ et tels que $\langle w \rangle = 0$. La dernière condition est vraie si et seulement si $A = 0$. Donc on peut prendre

$$\begin{cases} \chi_1(\bar{y}, t) = \frac{1}{\tilde{h}_\varepsilon^2} + y_1, \\ \chi_2(\bar{y}, t) = \frac{1}{\tilde{h}_\varepsilon^2} + y_2. \end{cases} \quad (29)$$

Avec (29) on peut calculer les coefficients homogénéisés

$$\begin{cases} q_1^0 = \frac{2}{5\pi} \tan^3 \gamma \left[(1+c)^5 - c^5 \right] \left[\frac{1}{3} \cos^3(\psi + \omega t) - \cos(\psi + \omega t) \right], \\ q_2^0 = \frac{1}{6\pi^3} \tan^3 \gamma \left[(1+c)^3 - c^3 \right] \left[\frac{1}{3} \cos^3(\psi + \omega t) - \cos(\psi + \omega t) \right]. \end{cases} \quad (30)$$

On observe que dans l'équation (27), avec les coefficients donnés par (30), on peut simplifier par $\tan \gamma$, et donc que le membre de droite ne dépend plus de ce paramètre.

Si on considère le cas de S_1 et S_2 parallèles, i.e. $\gamma = \varphi = \psi = 0$, alors l'équation homogénéisée (27) devient

$$\frac{1+2c}{2\pi} \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) \frac{\partial p^0}{\partial x_1^2} = 6\mu\omega (x_1 + c) \cos(2\pi x_2 - \omega t). \quad (31)$$

La solution de (31) a la forme

$$p^0(\bar{x}, t) = \frac{12\pi\omega\mu}{(1+2c) \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right)} \left[\frac{1}{6} (x_1 + c)^3 + C_1 x_1 + C_2 \right] \cos(2\pi x_2 - \omega t), \quad (32)$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, telles que

$$\begin{cases} p^0(\bar{x}, t)|_{x_1=0} = \frac{12\pi\omega\mu}{(1+2c) \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right)} \left[\frac{1}{6} (x_1 + c)^3 + C_1 x_1 + C_2 \right] \cos(2\pi x_2 - \omega t) = 0 \\ p^0(\bar{x}, t)|_{x_2=0} = \frac{12\pi\omega\mu}{(1+2c) \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right)} \left[\frac{1}{6} (x_1 + c)^3 + C_1 x_1 + C_2 \right] \cos(2\pi x_2 - \omega t) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

pour $\forall x_2 \in (0,1)$ et $\forall t > 0$. On obtient

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{6}[c^3 + (1+c)^3], \\ C_2 = \frac{1}{6}c^3. \end{cases} \quad (34)$$

Remarque: La solution (32) avec les valeurs (34) pour C_1 et C_2 a une variation de signe sur Y , et par conséquent on peut déterminer des zones de cavitation définies par la condition $p^0(\bar{x}, t) < 0$ avec $\bar{x} \in \Omega$ et $t > 0$ quelconque, et aussi la frontière libre pour $p^0(\bar{x}, t) = 0$.

En conclusion, le modèle de Reynolds est suffisant pour décrire la cavitation. Notre étude doit être prolongée par des calculs numériques (pour différentes valeurs des paramètres) des solutions de l'équation (27) que l'on comparera avec des résultats connus dans la littérature.

Bibliographie

- [1] Allaire, G., *Homogenization and two-scale convergence*, SIAMJ. Math. Anal. 23 (6) 91992), p. 1482-1518.
- [2] Alt, H. W., *Strömungen durch inhomogene poröse Medien mit freiem Rand*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, vol. 305 (1979), p. 89–115.
- [3] Bayada, G., Chambat, M., *Sur quelques modélisations de la zone de cavitation en lubrification hydrodynamique*, Journal de Mathématique théorique et appliquée, vol. 5 (5), (1986), p. 703-729.
- [4] Bayada, G., Vázquez, C., *A Survey on Mathematical aspects of lubrication Problems*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., **39** (2007), p. 21-47.
- [5] Cioranescu, Doina, Damlamian, A., Griso, G., *Periodic unfolding and homogenization*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences—Mathématique, vol. 335, **1** (2002), p. 99–104.
- [6] Ene, H. I., Pasa, G. I., *Metoda omogenizarii. Aplicatii la teoria materialelor compozite*, Editura Academiei Romane, Bucuresti, 1987.
- [7] Martin, S., *Contribution à la modélisation de phénomènes de frontière libre en mécanique des films minces*, Tèse, l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (2005).
- [8] Martin, S., *Influence of Multiscale Roughness Patterns in Cavitated Flows: Applications to Journal Bearing*, Hindwai Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering (2008), Article ID 439319.
- [9] Nicolescu, B.N., *Contributions á l'étude mathématique des mouvements fluides cavitantes*, Tèse, L'Institute de Mathématique de L'Académie Roumaine (1998).
- [10] Rodrigues, J.-F., *Some remarks on the homogenization of the dam problem*, Manuscripta Mathematica, vol. 46, **1–3** (1984), p. 65–82.
- [11] Sacnscez-Palencia, E., *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin, 1980.