Mesures de Young en tant de minimiseurs relaxés dans le calcul des variations

Liviu C. Florescu

Université "Al. I. Cuza"
Iaşi, Roumanie

10ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées,
Université de Poitiers, France
26-31 Août 2010

Contents

Contents

Contents

Contents

Contents

Contents

Contents

Contents

Contents

Introduction

Le problème standard du calcul des variations est de trouver minimiseurs pour la fonctionnelle $I(u) = \int_\Omega F(t, u(t), \nabla u(t))dt$, où Ω est un domaine borné et ouvert, F est un intégrand de Carathéodory lorsque $u \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfait des conditions au bord.

Dans des nombreuses situations (voir, par exemple, des problèmes de type Bolza), le problème n'admet pas de solutions classiques; cela est dû au comportement oscillatoire rapide des suites minimisantes. Ce type de comportement est bien contrôlé en utilisant la technique des mesures de Young, une technique développée par L. C. Young, J. Warga, L. Tartar et, plus récemment, par , E. J. Balder, P. Pedregal, M. Valadier, Ch. Castaing, P. Raynaud de Fitte, etc.

Premières lectures

Young, L.C.,
Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory,
Saunders, Philadelphia. London. Toronto, 1969.

Premières lectures

- Young, L.C.,
  Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory,
  Saunders, Philadelphia. London. Toronto, 1969.
- Warga, J.,
  Optimal control of differential and functional equations,
  Academic Press, New York. London, 1972.

Université "Al. I. Cuza"

Premières lectures

- Young, L.C., *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Saunders, Philadelphia. London. Toronto, 1969.
- Warga, J., *Optimal control of differential and functional equations*, Academic Press, New York. London, 1972.
- Tartar, L., *Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations*, Research Notes in Math., Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, vol. 4, Pitman Press, San Francisco, 1979.

Premières lectures

- Young, L.C.,
  Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory,
  Saunders, Philadelphia. London. Toronto, 1969.
- Warga, J.,
  Optimal control of differential and functional equations,
  Academic Press, New York. London, 1972.
- Tartar, L.,
  Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations,
  Research Notes in Math., Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, vol. 4, Pitman Press, San Francisco, 1979.

Lectures plus récentes

Balder, E.J.,
Lectures on Young measures,
Cahiers de Mathématiques, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Paris, 1995.

Lectures plus récentes

- Balder, E.J.,
  Lectures on Young measures,
  Cahiers de Mathématiques, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Paris, 1995.
- Pedregal, P.,
  Parametrized Measures and Variational Principles,
  Birkhäuser, Basel. Boston. Berlin, 1997.

Lectures plus récentes

- Balder, E.J.,
  Lectures on Young measures,
  Cahiers de Mathématiques, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Paris, 1995.
- Pedregal, P.,
  Parametrized Measures and Variational Principles,
  Birkhäuser, Basel. Boston. Berlin, 1997.
- Castaing, Ch., Raynaud de Fitte, P. and Valadier, M.,
  Young measures on topological spaces. With applications in control theory and probability theory,
  Kluwer Academic Publ. Dordrecht.Boston.London, 2004.

Lectures plus récentes

- Balder, E.J.,
  Lectures on Young measures,
  Cahiers de Mathématiques, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Paris, 1995.
- Pedregal, P.,
  Parametrized Measures and Variational Principles,
  Birkhäuser, Basel. Boston. Berlin, 1997.
- Castaing, Ch., Raynaud de Fitte, P. and Valadier, M.,
  Young measures on topological spaces. With applications in control theory and probability theory,
  Kluwer Academic Publ. Dordrecht.Boston.London, 2004.

Lectures plus récentes

Fonseca, I., Leoni, G.,
Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p - Spaces,
Springer Verlag, 2007.

Lectures plus récentes

- Fonseca, I., Leoni, G., *Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p - Spaces*, Springer Verlag, 2007.
- Dacorogna, B., *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Second Edition, Springer, 2008.

Lectures plus récentes

- Fonseca, I., Leoni, G.,
  Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p - Spaces,
  Springer Verlag, 2007.
- Dacorogna, B.,
  Direct Methods in the Calculus of Variations,
  Second Edition, Springer, 2008.
- Florescu, L.C., Godet-Thobie, C.,
  Compactness in Measure Spaces and Young Measures,
  (en cours de parution).

Lectures plus récentes

- Fonseca, I., Leoni, G., *Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p - Spaces*, Springer Verlag, 2007.
- Dacorogna, B., *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Second Edition, Springer, 2008.
- Florescu, L.C., Godet-Thobie, C., *Compactness in Measure Spaces and Young Measures*, (en cours de parution).

Introduction

D'une certaine façon, les mesures de Young généralisent les fonctions mesurables. Même si elles ont été introduites pour obtenir des solutions relaxées pour les problèmes variationnels, les mesures de Young représentent un outil important pour d'autres branches de l'analyse mathématique.

Dans la première partie, nous commençons par la présentation des mesures de Young et de la topologie stable pour laquelle nous donnons plusieurs caractérisations.

Nous présentons le théorème de compacité de Prokhorov pour les mesures de Young. Le rôle principal dans ce théorème revient à la condition d'être tendue; la simplicité de cette condition représente la principale attraction des résultats de compacité dans l'espace de mesures de Young.

Nous présentons le produit fibré des mesures de Young et son importance pour obtenir des conditions de semi-continuité.

Enfin sont présentées quelques uniformitées sur l'espace de mesures de Young et le problème de la complétitude.

La deuxième partie est dédiée à l'étude du problème relaxé du calcul des variations.

Notations

- Ω est un ensemble quelconque,
- $\mathcal{A}$ est une σ–algèbre de sous-ensembles de Ω,
- $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ est une mesure positive, σ–additive, finie et complète.

Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, on suppose toujours que Ω est borné, measurable Lebesgue, $\mathcal{A}$ est la σ-algèbre de sous-ensembles measurable Lebesgue de Ω et μ est la mesure de Lebesgue.

- (P, d) note un espace polonais (un espace métrique complete et séparable),
- $\mathcal{B}(P)$ sont les boréliennes de P,
- $\mathcal{P}(P)$ est la famille de toutes les probabilités sur P munie de la topologie étroite,
- $\mathcal{B}(\mathcal{P}(P))$ désigne la tribu borélienne de $\mathcal{P}(P)$.

Notations

- $\mathcal{M}(P)$ désigne l'ensemble de toutes les applications $(\mathcal{A} - \mathcal{B}(P))$–mesurables,
- $C_c(P)$ est l'ensemble des fonctions continues à support compact,
- $C_0(P)$ est l'ensemble des fonctions continues qui s'annulent à l'infini,
- $C_b(P)$ est l'espace des fonctions réelles continues et bornées sur P,
- $BL(P, d)$ est l'espace des fonctions réelles, bornées et lipschtziennes sur (P, d).
  L'application
  $f \mapsto \|f\|_{BL} = \sup_{x\in P} |f(x)| + \sup_{x,y\in P, x\neq y} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \right\}$ est une norme sur $BL(P, d)$ et $(BL(P, d), \|\cdot\|_{BL})$ est un espace de Banach.

Définition

Définition

Une mesure de Young sur $\Omega \times P$ est une mesure positive $\mathcal{T} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(P) \to \mathbb{R}_+$ telle que $\mathcal{T}(A \times P) = \mu(A)$, pour tout $A \in \mathcal{A}$.
En utilisant un résultat de désintégration, on peut identifier chaque mesure de Young $\mathcal{T}$ avec une application $\tau_\cdot : \Omega \to \mathcal{P}(P)$, $(\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathcal{P}(P)))$ - mesurable en notant que

$$\mathcal{T}(f) = \int_{\Omega \times P} f(t,x) d\mathcal{T}(t,x) = \int_\Omega \left(\int_P f(t,x) d\tau_t(x) \right) d\mu(t),$$

pour toute application $f \in L^1(\mathcal{T}, \mathbb{R})$.
$\mathcal{Y}(P)$ ou simplement $\mathcal{Y}$ désigne l'espace de mesures de Young.

Exemples

Exemples

Exemple 1.
Pour toute probabilité $\nu \in \mathcal{P}(P)$, la mesure produit $\mathcal{T}^{\nu} = \mu \otimes \nu$ est une mesure de Young dont la désintégration est l'application constante $\tau_t^{\nu} = \nu$, pour tout $t \in \Omega$.

On dit que $\mathcal{T}^{\nu}$ est la mesure homogène associée à la probabilité ν. Comme l'application $\nu \mapsto \mathcal{T}^{\nu}$ est une injection, nous écrirons $\mathcal{P}(P) \subseteq \mathcal{Y}(P)$.

Exemples

Exemple 2.
Pour toute application mesurable $u \in \mathcal{M}(P)$,

$$\mathcal{T}^u(A \times B) = \mu(A \cap u^{-1}(B)), \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}(P),$$

définit une mesure de Young dont la désintégration est $\tau_t^u = \delta_{u(t)}$, pour tout $t \in \Omega$ (δ est la mesure de Dirac).
$\mathcal{T}^u$ est la mesure associée à l'application u. La fonction $u \mapsto \mathcal{T}^u$ est une injection et alors nous considérerons que $\mathcal{M}(P) \subseteq \mathcal{Y}(P)$.

La topologie stable

Définition

La topologie stable est la topologie projective sur $\mathcal{Y}(P)$ engendrée par la famille des applications $I_{A,f} : \mathcal{Y}(P) \to \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{A}$, $f \in C_b(P)$, définies par

$$I_{A,f}(\mathcal{T}) = \int_{\Omega\times P} (\chi_A \otimes f)(t,x)d\mathcal{T}(t,x) = \int_A \tau_t(f)d\mu(t).$$

Cette topologie est notée $\mathcal{S}(P)$ ou simplement $\mathcal{S}$.

Si $\mathcal{A}$ est dénombralement engendrée alors $(\mathcal{Y}, \mathcal{S})$ est métrisable.

La topologie stable

Définition

Une suite $(\mathcal{T}^n)_n \subseteq \mathcal{Y}(P)$ est $\mathcal{S}$ - convergente vers $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(P)$ si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $f \in C_b(P)$, $\mathcal{T}^n(\chi_A \otimes f) \to \mathcal{T}(\chi_A \otimes f)$ ou, équivalent, $\int_A \tau_t^n(f)d\mu(t) \to \int_A \tau_t(f)d\mu(t)$; cette situation est notée avec $\mathcal{T}^n \underset{\mathcal{Y}}{\overset{\mathcal{S}}{\longrightarrow}} \mathcal{T}$, ou simplement $\mathcal{T}^n \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{T}$.

Si $(u_n)_n \subseteq \mathcal{M}(P)$ et $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(P)$ nous notons $u_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{T}$ la convergence stable de $(\mathcal{T}^{u_n})_n$ vers $\mathcal{T}$.

Remarque

Pour tout $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(P)$ et tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{T}(A \times \cdot)$ est une mesure de Radon positive sur $\mathcal{B}(P)$. Alors $\mathcal{T}^n \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{T}$ si et seulement si $(\mathcal{T}^n(A \times \cdot))_n$ est étroitement convergente vers $\mathcal{T}(A \times \cdot)$, pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Charactérizations

Théorème

Soit $(\mathcal{T}^n)_n \subseteq \mathcal{Y}(P)$ et $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(P)$; les conditions suivantes sont équivalentes:

1). $\mathcal{T}^n \xrightarrow[\mathcal{Y}]{\mathcal{S}} \mathcal{T}$.

2). $\mathcal{T}^n(\Psi) \to \mathcal{T}(\Psi), \forall \Psi$ intégrand Carathéodory borné .

3). $\mathcal{T}^n(\Psi) \to \mathcal{T}(\Psi), \forall \Psi$ intégrand Carathéodory L^1- borné .

4). $\mathcal{T}(\Psi) \leq \liminf_n \mathcal{T}^n(\Psi), \forall \Psi$ intégrand s.c.i. et borné inférieurement .

5). $\mathcal{T}(\Psi) \leq \liminf_n \mathcal{T}^n(\Psi), \forall \Psi$ intégrand s.c.i. et L^1-borné .

6). $\mathcal{T}(\chi_A \otimes f) \leq \liminf_n \mathcal{T}^n(\chi_A \otimes f), \forall A \in \mathcal{A}, \forall f$ s.c.i. et bornée inférieurement sur P.

Charactérizations

Théorème

7). $\mathcal{T}(A \times D) \leq \liminf_n \mathcal{T}^n(A \times D), \forall A \in \mathcal{A}, \forall D \subseteq P$ ouvert.
8). $\mathcal{T}^n(\chi_A \otimes f) \to \mathcal{T}(\chi_A \otimes f), \forall A \in \mathcal{A}, \forall f \in BL(P, d)$.
9). $\mathcal{T}^n(\chi_A \otimes f) \to \mathcal{T}(\chi_A \otimes f), \forall A \in \mathcal{A},$ uniformément selon $f \in BL(P, d)$ avec $\|f\|_{BL} \leq 1$.

Si P est localement compact les conditions 1) - 9) ci-dessus sont équivalentes avec les deux conditions suivantes:

10). $\mathcal{T}^n(\chi_A \otimes f) \to \mathcal{T}(\chi_A \otimes f), \forall A \in \mathcal{A}, \forall f \in C_0(P)$.
11). $\mathcal{T}^n(\chi_A \otimes f) \to \mathcal{T}(\chi_A \otimes f), \forall A \in \mathcal{A}, \forall f \in C_c(P)$.

Continuité de l'opérateur intégral

Théorème

Soit $(u_n)_n \subseteq \mathcal{M}(P) \subseteq \mathcal{Y}(P)$ avec $u_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{T}$. Alors, pour tout intégrand s.c.i. $\Psi : \Omega \times P \to \mathbb{R}$ pour lequel $\{\Psi^-(\cdot, u_n(\cdot)) : n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément intégrable (UI) dans $L^1(\Omega, \mathbb{R})$ et il existe $\mathcal{T}(\Psi)$,

$$\mathcal{T}(\Psi) = \int_{\Omega \times P} \Psi(t,x)d\mathcal{T}(t,x) \leq \liminf_n \int_\Omega \Psi(t, u_n(t))d\mu(t).$$

Si Ψ est un intégrand Carathéodory et $\{\Psi(\cdot, u_n(\cdot)) : n \in \mathbb{N}\}$ est UI dans $L^1(\Omega, \mathbb{R})$ alors

$$\mathcal{T}(\Psi) = \int_{\Omega \times P} \Psi(t,x)d\mathcal{T}(t,x) = \lim_n \int_\Omega \Psi(t, u_n(t))d\mu(t).$$

Les sous-espaces

Théorème

1. La trace de la topologie stable sur $\mathcal{M}(P)$ est la topologie de la convergence en mesure.
   Si la mesure μ est sans atome, $\mathcal{M}(P)$ est dense dans $\mathcal{Y}(P)$.
2. La trace de la topologie stable sur $\mathcal{P}(P)$ est la topologie étroite et $\mathcal{P}(P)$ est fermé dans $\mathcal{Y}(P)$.

Les sous-espaces

Remarque

D'après le 1) de la théorème 15, $(u_n)_n \subseteq \mathcal{M}(P)$ est convergente en mesure vers $u \in \mathcal{M}(P)$ si et seulement si

$$\int_A f(u_n)d\mu \to \int_A f(u)d\mu, \text{ pour tout } A \in \mathcal{A} \text{ et toute } f \in C_b(P).$$

Ce résultat a été obtenu par Hoffmann-Jørgensen dans [8].

Ensembles tendus

Définition

Un ensemble $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Y}(P)$ est **tendu** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subseteq P$ tel que

$$\mathcal{T}(\Omega \times (P \setminus K)) < \varepsilon, \text{ pour toute } \mathcal{T} \in \mathcal{H}.$$

Si $H \subseteq \mathcal{M}(P) \subseteq \mathcal{Y}(P)$ alors H est tendu si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subseteq P$ tel que

$$\mu\left(u^{-1}(P \setminus K)\right) < \varepsilon, \text{ pour toute } u \in H.$$

Dans le cas particulier où $P = \mathbb{R}^m$, H est tendu si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k > 0$ tel que

$$\mu(\|u\| \geq k) < \varepsilon, \text{ pour toute } u \in H.$$

Théorème de Prokhorov

L'intérêt pour la condition d'être tendu est justifié par le théorème de Prokhorov:

Théorème (Th. 4.3.5 de [3])

Un ensemble $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Y}(P)$ est relativement $\mathcal{S}$ - compact (séquentiellement $\mathcal{S}$ - compact) si et seulement si il est tendu.

Un corollaire important

Corollaire

Soit $(u_n)_n \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ une suite tendue; alors on peut trouver une sous-suite $(u_{k_n})_n$ et une mesure de Young $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^m)$ telle que $u_{k_n} \xrightarrow[\mathbb{R}^m]{\mathcal{S}} \mathcal{T}$.

Si, en plus, $(u_n)_n$ est uniformément intégrable $(u_{k_n})_n$ est faiblement convergente dans $L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ vers une fonction intégrable $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, où, pour tout $t \in \Omega$,

$$u(t) = \mathrm{bar}\ \tau_t \equiv \int_{\mathbb{R}^m} x d\tau_t(x).$$

Définition

Un intervalle d-dimensionnel $I \subseteq \mathbb{R}^d$ est un produit des intervalles bornés et fermés de $\mathbb{R}$: $I = \prod_{i=1}^{d}[a_i, b_i]$; soit $\mathcal{I}$ la famille des intervalles d-dimensionnels.

Définition

Un ensemble $H \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ est dit **Jordan finiment tendu** si, pour tout $\varepsilon > 0$, ils existent $k > 0$ et une sous-famille finie $\mathcal{I}_f \subseteq \mathcal{I}$ tels que, pour toute $u \in H$, il existe $\mathcal{I}_u \subseteq \mathcal{I}_f$ avec $(\|u\| > k) \subseteq \bigcup \mathcal{I}_u$ et $\mu(\bigcup \mathcal{I}_u) < \varepsilon$.

On peut remarquer que la condition d'être Jordan finiment tendu a été introduit avec le but de localiser les ensembles sur lesquels les fonctions prennent des grandes valeurs sur une famille finie des intervalles de longueur totale petite.

Justification

Tout ensemble Jordan finiment tendu est un ensemble tendu.

La proposition suivante donne une justification pour la dénomination *ensemble Jordan finiment tendu*.

Proposition

$H \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ est un ensemble Jordan finiment tendu si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, ils existent $k > 0$ et un recouvrement fini de H, $\{H_1, ..., H_p\}$, tel que, pour tout $i = 1, ..., p$,

$$\mu_J^* \left(\cup_{u \in H_i}(\|u\| > k)\right) < \varepsilon.$$

(ici μ_J^* est la mesure extérieure Jordan)

Compacité en mesure

Théorème (théorème 3.12 de [5])

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et convexe et soit $H \subseteq W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m) \cap C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ un ensemble tendu tel que ∇H est Jordan finiment tendu; alors H est relativement compact dans la topologie de la convergence en mesure sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$.

Dans certaines conditions nous pouvons éviter l'hypothèse de continuité dans le théorème précédent.

Corollaire

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et convexe, soit $p \geq 1$ et soit H un sous-ensemble tendu de $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tel que ∇H est Jordan finiment tendu; si un des suivant deux conditions: $p > d$ ou $d = 1$ est accompli alors H est relativement compact en mesure.

Définition

Définition

Soit P et Q deux espaces polonais et soit $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(P), \sigma \in \mathcal{Y}(Q)$ deux mesures de Young; alors $P \times Q$ est espace polonais, $\mathcal{B}(P \times Q) = \mathcal{B}(P) \otimes \mathcal{B}(Q)$ et l'application $t \mapsto \tau_t \otimes \sigma_t$ est la désintégration d'une mesure de Young $\mathcal{T} \otimes \sigma \in \mathcal{Y}(P \times Q)$.

$\mathcal{T} \otimes \sigma$ s'appelle **le produit fibré** de $\mathcal{T}$ et σ.

Dans le cas particulier où $u \in \mathcal{M}(P) \subseteq \mathcal{Y}(P)$ et $v \in \mathcal{M}(Q) \subseteq \mathcal{Y}(Q)$, la désintégration du produit fibré $\mathcal{T}^u \otimes \sigma^v$ est l'application $t \mapsto \delta_{(u(t),v(t))}$.

Le théorème du produit fibré

Théorème [2]

Soit $(u_n)_n \subseteq \mathcal{M}(P)\mathcal{Y}(P), (v_n)_n \subseteq \mathcal{M}(Q) \subseteq \mathcal{Y}(Q), u \in \backslash(P) \subseteq \mathcal{Y}(P)$ et $\sigma \in \mathcal{Y}(Q)$; si $(u_n)_n$ est convergente en mesure vers u et $(v_n)_n$ est $\mathcal{S}(Q)$ - convergente vers σ alors $(u_n, v_n)_n \xrightarrow[P\times Q]{\mathcal{S}} \mathcal{T}^u \otimes \sigma$.

Le résultat précédent est utile dans le cas suivant: Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert et borné, $P = \mathbb{R}^m$, $(u_n)_n \subseteq W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ une suite minimisante pour le problème

$$(P) \qquad m = \inf_{u \in H} \int_\Omega \Psi(t, u(t), \nabla u(t)) d\mu(t),$$

où $\Psi : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{md} \to \mathbb{R}$ est un intégrand s.c.i. et borné inférieurement.

Remarques

1). Si $(u_n)_n$ est convergente en mesure vers $u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ et $(\nabla u_n)_n \subseteq \mathcal{Y}(\mathbb{R}^{md})$ est tendue alors il existe une mesure de Young $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^{md})$ telle que

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^{md}} \Psi(t, u(t), y) d\mathcal{T}(t, y) \leq \lim_n \int_\Omega \Psi(t, u_n(t), \nabla u_n(t)) d\mu(t) = m.$$

Le résultat précédent est utile dans le cas suivant: Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert et borné, $P = \mathbb{R}^m$, $(u_n)_n \subseteq W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ une suite minimisante pour le problème

$$(P) \qquad m = \inf_{u \in H} \int_\Omega \Psi(t, u(t), \nabla u(t)) d\mu(t),$$

où $\Psi : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{md} \to \mathbb{R}$ est un intégrand s.c.i. et borné inférieurement.

Remarques

2). D'après le théorème 24, si en plus Ω est convexe, $(u_n)_n \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ est tendue et $(\nabla u_n)_n$ est Jordan finiment tendue alors il existe $u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^{md})$ telle que

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^{md}} \Psi(t, u(t), y) d\mathcal{T}(t, y) \leq \lim_n \int_\Omega \Psi(t, u_n(t), \nabla u_n(t)) d\mu(t) = m.$$

La densité du $\mathcal{M}(P)$ dans $\mathcal{Y}(P)$ est l'une des propriétés les plus importantes de la topologie stable; les mesures de Young ont été historiquement construites comme limites des fonctions mesurables.

Ainsi, certains mathématiciens utilisent la notion de mesure paramétrée associée à une suite; l'existence de cette mesure est assurée de théorème fondamental de Young:

Théorème

Théorème (voir théorème 2.2 de [9])

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble borné et mesurable et soit $(u_n)_n \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ une suite satisfaisant à la condition

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\|u_n\| \geq k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Alors il existe une sous-suite $(u_{k_n})_n$ de $(u_n)_n$ et une application mesurable $t \mapsto \tau_t \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ tels que:
1). Pour tout ensemble fermé $K \subseteq \mathbb{R}^m$ pour lequel $u_{k_n}(t) \in K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque pour tout $t \in \Omega$ on a

$$\mathrm{supp}\tau_t \subseteq K, \text{ presque pour tout } t \in \Omega.$$

Théorème

2). Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout intégrand Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, pour lequel $(f(\cdot, u_{k_n}))_n$ est UI dans $L^1(A, \mathbb{R}^m)$,

$$f(\cdot, u_{k_n}) \xrightarrow[L^1(A,\mathbb{R}^m)]{w} \overline{f},$$

où, pour tout $t \in \Omega$, $\overline{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^m} f(s, x) d\tau_t(x)$.

$(\tau_t)_{t\in\Omega}$ s'appelle **la mesure paramétrée associée à $(u_n)_n$**.

Remarques

Nous observons que, dans les hypothèses du théorème, $(u_n)_n$ est tendue dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^m)$ et alors, d'après le théorème de Prokhorov, elle est séquentiellement $\mathcal{S}$-compact. Soit alors $(u_{k_n})_n$ une sous-suite de $(u_n)_n$ $\mathcal{S}$-convergente vers $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^m)$. D'après le théorème 6.5.1 de [3], p.p. $t \in \Omega$,

$$\mathrm{supp}\mathcal{T}_t \subseteq \mathrm{Ls}\left(\{u_{k_n}(t) : n \in \mathbb{N}\}\right) = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\{u_{k_n}(t) : k \geq p\}} \subseteq K.$$

Comme $u_{k_n} \xrightarrow[\mathbb{R}^m]{\mathcal{S}} \mathcal{T}$ et $(f(\cdot, u_{k_n}))_n$ est UI, le théorème 16 nous assure que, pour tout $B \in \mathcal{A}, B \subseteq A$

$$\int_B f(t, u_{k_n}(t))d\mu(t) \to \int_B \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(t, x)d\mathcal{T}_t(x)\right) d\mu(t) = \int_B \overline{f}(t)d\mu(t),$$

d'où

$$f(\cdot, u_{k_n}) \xrightarrow[L^1(A,\mathbb{R}^m)]{w} \overline{f}$$

.

Mesures de Young

Liviu C. Florescu

Introduction

Notations

Définition et exemples

La topologie stable

Produit fibré

Une définition équivalente

Mesures gradient

Structures uniformes sur $\mathcal{Y}(P)$

Calcul des variations relaxé

Remarques

Donc toute mesure paramétrée associée à une suite est une mesure de Young sur $\mathbb{R}^m$.

Réciproquement, si on suppose que Ω est sans atome, toute mesure de Young sur $\mathbb{R}^m$ est associée à une suite de fonctions mesurables (voir la propriété de densité de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$).

D'après le 10) du théorème 15, on peut aussi remarquer que $u_n \xrightarrow[\mathbb{R}^m]{\mathcal{S}} \mathcal{T}$ si et seulement si

$$f(u_n) \xrightarrow[L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)]{w^*} \bar{f}, \text{ pour toute } f \in C_0(\mathbb{R}^m).$$

Définition

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ et $p \geq 1$; une mesure de Young $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^{md})$ est une mesure **p-gradient** si on peut trouver une suite $(u_n)_n \subseteq W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ telles que $\{\|\nabla u_n\|^p : n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément intégrable et $\nabla u_n \xrightarrow[\mathbb{R}^{md}]{\mathcal{S}} \mathcal{T}$.
Nous rémarquons que $\{\nabla u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément intégrable dans $L^1(\Omega, \mathbb{R}^{md})$ et, d'après le corollaire 21, $\nabla u_n \xrightarrow[L^1]{w} \mathrm{bar}\mathcal{T}.$.

Théorème

(voir [10] et [12])

Une mesure de Young $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^{md})$ est une mesure p-gradient si et seulement si:

1). Il existe $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tel que

$$\nabla u(t) = \mathrm{bar}\tau_t \equiv \int_{\mathbb{R}^{md}} y d\tau_t(y), \text{ p.p. } t \in \Omega.$$

2). Pour toute fonction $L : \mathbb{R}^{md} \to \mathbb{R}$ continue, quasiconvexe et bornée inférieurement avec $|L(y)| \leq c(1 + \|y\|^p)$, pour tout $y \in \mathbb{R}^{md}$,

$$L(\nabla u(t)) \leq \int_{\mathbb{R}^{md}} L(y) d\tau_t(y), \text{ p.p. } t \in \Omega.$$

3). $\int_{\mathbb{R}^{md}} \|y\|^p d\tau_t(y) < +\infty$, p. p. $t \in \Omega$.

Nous rappelons que L est quasiconvexe si, pour tout $y \in \mathbb{R}^{md}$, pour tout ouvert et borné $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ et toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$,

$$\mu(\Omega) \cdot L(y) \leq \int_\Omega L(y + \nabla\varphi(t))d\mu(t).$$

Définition

Pour tout intégrand borné $\Psi : \Omega \times P \to \mathbb{R}$ soit $I_\Psi : \mathcal{Y}(P) \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$i_\Psi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}(\Psi) = \int_{\Omega \times P} \Psi(t,x)d\mathcal{T}(t,x).$$

Notons

$F_1 = \{I_\Psi : \Psi = \text{ intégrand Carathéodory, borné}\}$,

$F_2 = \{I_\Psi : \Psi = \chi_A \otimes f, A \in \mathcal{A}, f \in C_b(P)\}$,

$F_3 = \{I_\Psi : \Psi = \chi_A \otimes f, A \in \mathcal{A}, f \in BL(P)\}$,

$F_4 = \{I_\Psi : \Psi = \chi_A \otimes f, A \in \mathcal{A}, f \in C_0(P)\}$.

Pour tout $i = 1, 2, 3, 4$ soit $\mathcal{U}_i$ la structure uniforme projective sur $\mathcal{Y}(P)$ engendrée par la famille F_i (la plus petite structure uniforme sur $\mathcal{Y}$ pour laquelle toutes les applications de la famille F_i sont uniformément continues).

Remarques

Comme $F_3 \cup F_4 \subseteq F_2 \subseteq F_1$, $\mathcal{U}_3 \cup \mathcal{U}_4 \subseteq \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$.
D'après le théorème 15, les uniformités $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$ sont compatibles avec la topologie stable. Si P est localement compact, $\mathcal{U}_4$ est aussi compatible avec $\mathcal{S}$.
Si $\Omega = (0,1)$ et $P = \mathbb{R}$, la suite $(\mathcal{T}^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$, où, pour tout $t \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(t) = n$, est une suite de Cauchy pour l'uniformité $\mathcal{U}_4$ mais il n'est pas convergente (il n'est pas tendue).
La même suite n'est pas Cauchy pour $\mathcal{U}_2$; en effet la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ est dans $C_b(\mathbb{R})$ et alors $\Psi = \chi_\Omega \otimes f \in F_2$ mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_\Psi\left(\mathcal{T}^{u_{2n+1}}\right) = (-1)^n$ et $I_\Psi\left(\mathcal{T}^{u_{2n}}\right) = 0$. Alors $\mathcal{U}_4 \subsetneq \mathcal{U}_2$.
$\mathcal{U}_4$ n'est pas complete; pour les autres nous n'avons pas des réponses.

Définition

Pour tout $A \in \mathcal{A}$ soit $d_A : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}_+$, où

$$d_A(\mathcal{T}, \sigma) = \sup_{\|f\|_{BL} \leq 1} \left| \int_A [\tau_t(f) - \sigma_t(f)]\, d\mu(t) \right| .$$

Alors $\{d_A : A \in \mathcal{A}\}$ est une famille de pseudo-métriques sur $\mathcal{Y}$; soit $\mathcal{U}$ la structure uniforme engendrée par cette famille. D'après le 9) du théorème 15, $\mathcal{U}$ est compatible avec la topologie stable $\mathcal{S}$.

Complétitude

Théorème

1. Si (P, d) est un espace polonais, toute suite de Cauchy par rapport à la structure uniforme $\mathcal{U}$ est tendue.
2. L'espace uniform $(\mathcal{Y}, \mathcal{U})$ est complete.

$(\mathcal{Y}, \mathcal{U})$ est le complété de l'espace $(\mathcal{M}(P), \mathcal{U}|_{\mathcal{M}(P)})$.

Le problème classique

Soient $1 \leq p < +\infty, \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière lipschitzienne et $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{md} \to \mathbb{R}_+$ un intégrand Carathéodory positif pour lequel ils existent $a, b > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, tout $y \in \mathbb{R}^{md}$ et presque pour tout $t \in \Omega$,

$$(C) \qquad a \cdot \|y\|^p - 1 \leq F(t, x, y) \leq b \cdot (1 + \|y\|^p).$$

Le problème classique du calcul des variations est:
(P)

$$\inf \left\{ I(u) = \int_\Omega F(t, u(t), \nabla u(t)) d\mu(t) : u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \right\} = m < +\infty.$$

Le problème classique

Théorème

Si, presque pour tout $t \in \Omega$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $F(t, x, \cdot)$ est quasiconvexe alors il existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tel que $I(u_0) = m$ (donc le problème (P) admet un minimum).

Le problème classique

Exemple de Bolza

En absence de la quasiconvexité le problème (P) n'admet pas nécessairement de minimum.
Soit $d = m = 1$ (dans ce cas la quasiconvexité est equivalente avec la convexité) et soit $F : (0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$,
$F(t,x,y) = (y^2 - 1)^2 + \min\{x^2, 1\}$. Alors la condition (C) est assuré:

$$\frac{1}{2}y^4 - 1 \leq F(t,x,y) \leq 3(1+y^4), \forall t \in (0,1), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Le problème (P) devient

$$\inf\left\{ I(u) = \int_0^1 F(t, u(t), u'(t))dt : u \in W_0^{1,4}((0,1),\mathbb{R}) \right\} = m.$$

Évidemment $m \geq 0$.

Le problème classique

Exemple de Bolza

Soit $(u_n)_n \subseteq W_0^{1,4}((0,1),\mathbb{R})$,

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left[\left(t-\frac{2k}{2^n}\right)\cdot\chi_{\left[\frac{2k}{2^n},\,\frac{2k+1}{2^n}\right)}(t)\right] + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left[\left(\frac{2k+2}{2^n}-t\right)\cdot\chi_{\left[\frac{2k+1}{2^n},\,\frac{2k+2}{2^n}\right)}(t)\right].$$

Alors, p.p. $t\in(0,1)$, $u_n'(t)=\mathrm{sign}\,[\sin(2^n\pi t)]$ et $(u_n')^2=1$; il résulte immédiatement que $I(u_n)\to 0$.

Donc $m=0$ et $(u_n)_n$ est une suite minimisante; il n'y a aucune fonction $u_0\in W_0^{1,4}$ pour laquelle $I(u_0)=0$.

Le problème classique

Exemple de Bolza

Nous notons que l'intégrand F n'est pas convexe dans la variable y. Évidemment nous pouvons relaxé le problème en remplaçant l'integrand F avec sa enveloppe convexe dans la variable y:

$$F^{**}(t,x,y) = \begin{cases} F(t,x,y) & ,|y| \geq 1, \\ \min\{x^2, 1\} & ,|y| < 1. \end{cases}$$

Le problème devient:

$$\inf\left\{ I^{**}(u) = \int_0^1 F^{**}(t, u(t), u'(t))dt : u \in W_0^{1,4}((0,1), \mathbb{R}) \right\} = m$$

qui admet un minimum $u_0^{**} = \underline{0}$. Mais cette solution ne contient aucune information sur les oscillations rapides de suite minimisante $(u_n)_n$.

Le problème relaxé

Soient $1 \leq p < +\infty, \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière lipschitzienne et $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{md} \to \mathbb{R}_+$ un intégrand Carathéodory positif pour lequel ils existent $a, b > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, tout $y \in \mathbb{R}^{md}$ et presque pour tout $t \in \Omega$,

$$(C) \qquad a \cdot \|y\|^p - 1 \leq F(t, x, y) \leq b \cdot (1 + \|y\|^p).$$

Pour obtenir un minimum satisfaisant nous allons agrandir l'ensemble de compétiteurs $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ à un ensemble $\bar{H}$ et nous prolongerons la fonctionnelle I sur $\bar{H}$.

Le problème relaxé

Définition

Nous disons qu'un pair $(u, \mathcal{T}) \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{Y}(\mathbb{R}^{md})$ est **déterminé** d'une suite $(u_n)_n \subseteq W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ si $u_n \xrightarrow[\mathcal{M}(\mathbb{R}^m)]{\mu} u, \nabla u_n \xrightarrow[\mathbb{R}^{md}]{\mathcal{S}} \mathcal{T}$ et $(\|\nabla u_n\|^p)_n$ est uniformément intégrable. Dans ce cas $\mathcal{T}$ est une mesure p-gradient et $\nabla u = \mathrm{bar}\mathcal{T}_.$.

Si $p > 1$, pour toute suite $(u_n)_n \subseteq W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ borné dans $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, il existe $(u, \mathcal{T}) \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{Y}(\mathbb{R}^{md})$ déterminé par une sous-suite de $(u_n)_n$.

Soit

$$\bar{H} = \left\{(u, \mathcal{T}) \in W_0^{1,p} \times \mathcal{Y} : (u, \mathcal{T}) \text{ est déterminé de } (u_n)_n \subseteq W_0^{1,p}\right\}.$$

On peut remarquer que, pour toute $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, le pair $(u, \mathcal{T}^u) \in \bar{H}$.

Le problème relaxé

Le problème relaxé du calcul des variations est:

$$(\bar{P}) \qquad \inf\left\{\bar{I}(u,\mathcal{T}) = \int_{\Omega\times\mathbb{R}^{md}} F(t,u(t),y)d\mathcal{T}(t,y) : (u,\mathcal{T}) \in \bar{H}\right\} = \bar{m}.$$

Évidemment, pour toute $u \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$, $I(u) = \bar{I}(u,\mathcal{T}^u)$ et alors

$$\bar{m} \le m < +\infty.$$

Le problème relaxé

Théorème (voir le théorème 4.4 et le corollaire 4.5 de [11])

1). $m = \bar{m}$.
2). Le problème $(\bar{P})$ admet un minimum si et seulement si (P) admet une suite minimisante $(u_n)_n \subseteq W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ pour laquelle $(\|\nabla u_n\|^p)_n$ est uniformément intégrable.

Dans ce cas, si, en plus, $F(t, x, \cdot)$ est quasiconvexe, presque pour tout $t \in \Omega$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, alors (P) admet un minimum.

Remarque

Dans les conditions mentionnés, pour $p > 1$, le problème (P) admet toujours une suite minimisante $(u_n)_n \subseteq W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ pour laquelle $(\|\nabla u_n\|^p)_n$ est uniformément intégrable.

Le problème relaxé

Remarque

Dans l'exemple de Bolza le problème relaxé $(\bar{P})$ est:

$$inf\left\{\bar{I}(u,\mathcal{T})=\int_{(0,1)\times\mathbb{R}}\left[(y^2-1)^2+\min\{u^2(t),1\}\right]d\mathcal{T}(t,y):(u,\mathcal{T})\in\bar{H}\right\}.$$

La suite $(u_n)_n$ presentée dans la sous-section 2 est une suite minimisante pour le problème (P) pour laquelle $(\|\nabla u_n\|^4)_n$ est constante 1 et alors elle est uniformément intégrable.

Le minimum du problème $(\bar{P})$ est $(u_0,\mathcal{T}^0)$ où $u_0=\underline{0}$ et $\mathcal{T}^0_{\cdot}=\frac{1}{2}\cdot(\delta_1+\delta_{-1})$.

Le problème relaxé

Le dernier résultat utilise la remarque 27 pour donner un minimum relaxé pour un problème général.

Théorème

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble borné, ouvert et convexe, soit $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{md} \to \mathbb{R}$ un intégrand Carathéodory et soit $H \subseteq W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m) \cap C(\Omega, \mathbb{R}^m)$.
Nous supposons que le problème

$$\inf_u \in H \int_\Omega F(t, u(t), \nabla u(t)) d\mu(t) = m < +\infty$$

admet une suite minimisante tendue $(u_n)_n$ telle que $(\nabla u_n)_n$ est Jordan finiment tendue et $(F(\cdot, u_n, \nabla u_n))_n \subseteq L^1(\Omega, \mathbb{R})$ est uniformément intégrable.
Alors ils existent $u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ and $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{md}$ telle que

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^{md}} F(t, u(t), y) d\mathcal{T}(t, y) = m.$$

Bibliographie

Balder, E.J.,
Lectures on Young measures,
Cahiers de Mathématiques, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Paris, 1995.

Castaing, Ch., Raynaud de Fitte, P.,
On the fiber product of Young measures with application to a control problem with measures,
Adv. Math. Econ. 6 (2004), 1–38.

Bibliographie

Balder, E.J.,
Lectures on Young measures,
Cahiers de Mathématiques, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Paris, 1995.

Castaing, Ch., Raynaud de Fitte, P.,
On the fiber product of Young measures with application to a control problem with measures,
Adv. Math. Econ. 6 (2004), 1–38.

Castaing, Ch., Raynaud de Fitte, P. and Valadier, M.,
Young measures on topological spaces. With applications in control theory and probability theory,
Kluwer Academic Publ. Dordrecht.Boston.London, 2004.

Bibliographie

- Balder, E.J.,
  Lectures on Young measures,
  Cahiers de Mathématiques, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, Paris, 1995.
- Castaing, Ch., Raynaud de Fitte, P.,
  On the fiber product of Young measures with application to a control problem with measures,
  Adv. Math. Econ. 6 (2004), 1–38.
- Castaing, Ch., Raynaud de Fitte, P. and Valadier, M.,
  Young measures on topological spaces. With applications in control theory and probability theory,
  Kluwer Academic Publ. Dordrecht.Boston.London, 2004.

Bibliographie

Dacorogna, B.,
Direct Methods in the Calculus of Variations,
Second Edition, Springer, 2008.

Bibliographie

Dacorogna, B.,
Direct Methods in the Calculus of Variations,
Second Edition, Springer, 2008.

Florescu, L.C.,
Finite-tight sets,
Central European Journal of Mathematics 5(4)(2007), 619-638.

Bibliographie

Dacorogna, B.,
Direct Methods in the Calculus of Variations,
Second Edition, Springer, 2008.

Florescu, L.C.,
Finite-tight sets,
Central European Journal of Mathematics 5(4)(2007), 619-638.

Florescu, L.C., Godet-Thobie, C.,
Compacité dans l'espace de mesures et mesures de Young,
(en cours de parution).

Bibliographie

Dacorogna, B.,
Direct Methods in the Calculus of Variations,
Second Edition, Springer, 2008.

Florescu, L.C.,
Finite-tight sets,
Central European Journal of Mathematics 5(4)(2007), 619-638.

Florescu, L.C., Godet-Thobie, C.,
Compacité dans l′espace de mesures et mesures de Young,
(en cours de parution).

Bibliographie

Fonseca, I., Leoni, G.,
Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p -Spaces,
Springer Verlag, 2007.

Bibliographie

- Fonseca, I., Leoni, G.,
  Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p - Spaces,
  Springer Verlag, 2007.
- Hoffmann-Jørgensen, J.,
  Convergence in law of random elements and random sets,
  High dimensional probability (Oberwolfach, 1996), Progress in Probability no. 43, Birkhäuser, Basel, 1998, 151–189.

Mesures de Young

Liviu C. Florescu

Bibliographie

Fonseca, I., Leoni, G.,
Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p - Spaces,
Springer Verlag, 2007.

Hoffmann-Jørgensen, J.,
Convergence in law of random elements and random sets,
High dimensional probability (Oberwolfach, 1996), Progress in Probability no. 43, Birkhäuser, Basel, 1998, 151–189.

Kałamajska, A.,
On lower semicontinuity of multiple integrals,
Colloq. Math. 74 (1997), 71–78.

Bibliographie

Fonseca, I., Leoni, G.,
Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p - Spaces,
Springer Verlag, 2007.

Hoffmann-Jørgensen, J.,
Convergence in law of random elements and random sets,
High dimensional probability (Oberwolfach, 1996), Progress in Probability no. 43, Birkhäuser, Basel, 1998, 151–189.

Kałamajska, A.,
On lower semicontinuity of multiple integrals,
Colloq. Math. 74 (1997), 71–78.

Bibliographie

Kinderlehrer, D. et Pedregal, P.,
Caracterization of Young measures generated by gradients,
Arch. Rat. Mech. Anal. 115 (1991), 329–365.

Bibliographie

Kinderlehrer, D. et Pedregal, P.,
Caracterization of Young measures generated by gradients,
Arch. Rat. Mech. Anal. 115 (1991), 329–365.

Pedregal, P.,
Parametrized Measures and Variational Principles,
Birkhäuser, Basel. Boston. Berlin, 1997.

Bibliographie

Kinderlehrer, D. et Pedregal, P.,
Caracterization of Young measures generated by gradients,
Arch. Rat. Mech. Anal. 115 (1991), 329–365.

Pedregal, P.,
Parametrized Measures and Variational Principles,
Birkhäuser, Basel. Boston. Berlin, 1997.

Sychev, M.,
Young measure approach to characterization of behaviour of sequences by means of their integrands,
ICTP, Trieste, Italy, 1996.

Bibliographie

Kinderlehrer, D. et Pedregal, P.,
Caracterization of Young measures generated by gradients,
Arch. Rat. Mech. Anal. 115 (1991), 329–365.

Pedregal, P.,
Parametrized Measures and Variational Principles,
Birkhäuser, Basel. Boston. Berlin, 1997.

Sychev, M.,
Young measure approach to characterization of behaviour of sequences by means of their integrands,
ICTP, Trieste, Italy, 1996.

Bibliographie

Tartar, L.,
Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations,
Research Notes in Math., Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, vol. 4, Pitman Press, San Francisco, 1979.

Bibliographie

Tartar, L.,
Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations,
Research Notes in Math., Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, vol. 4, Pitman Press, San Francisco, 1979.

Warga, J.,
Optimal control of differential and functional equations,
Academic Press, New York. London, 1972.

Bibliographie

- Tartar, L.,
  Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations,
  Research Notes in Math., Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, vol. 4, Pitman Press, San Francisco, 1979.
- Warga, J.,
  Optimal control of differential and functional equations,
  Academic Press, New York. London, 1972.
- Young, L.C.,
  Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory,
  Saunders, Philadelphia. London. Toronto, 1969.

Bibliographie

- Tartar, L.,
  Compensated Compactness and Applications to Partial Differential Equations,
  Research Notes in Math., Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, vol. 4, Pitman Press, San Francisco, 1979.
- Warga, J.,
  Optimal control of differential and functional equations,
  Academic Press, New York. London, 1972.
- Young, L.C.,
  Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory,
  Saunders, Philadelphia. London. Toronto, 1969.