Minimisation locale de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau avec degrés prescrits

Mickaël Dos Santos

Institut Camille Jordan
Université Lyon 1

30 aout 2010
Colloque Franco-Roumain

Le domaine d'étude

Le domaine d'étude est $\mathcal{D} = \Omega \setminus \cup_{i=1}^{N} \overline{\omega_i} \subset \mathbb{R}^2$

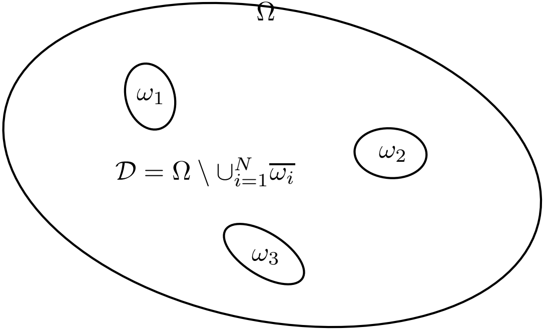


FIGURE: Le domaine d'étude avec 3 trous

$N \geq 1$, on se donne $\Omega, \omega_1, ..., \omega_N \subset \mathbb{R}^2$ des ouverts simplement connexes bornés et réguliers, les ω_i sont fortement deux à deux disjoints et fortement inclus dans Ω.

Les fonctions test et l'énergie

L'ensemble des fonctions test est

$$\mathcal{J} = \left\{ u \in H^1(\mathcal{D}, \mathbb{C}) \,|\, |u| = 1 \text{ sur } \partial\mathcal{D} \right\}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ (petit), on considère

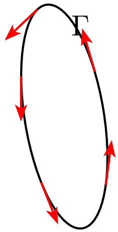
$$\begin{array}{rccc} E_\varepsilon : & \mathcal{J} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & u & \mapsto & \displaystyle\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} \left\{ |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1 - |u|^2)^2 \right\} \end{array}.$$

Le degré topologique

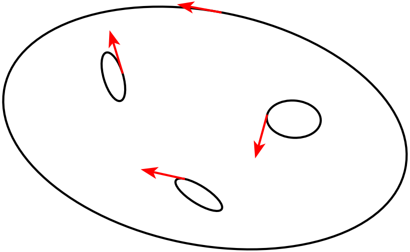
Pour $u \in \mathcal{J}$ et $\Gamma \in \{\partial\Omega, \partial\omega_1, ..., \partial\omega_N\}$ on définit de degré de u par rapport à Γ

$$\deg_\Gamma(u) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma u \times \partial_\tau u \,\mathrm{d}\tau \in \mathbb{Z},$$

$$\deg(u, \mathcal{D}) = (\deg_{\partial\omega_1}(u), ..., \deg_{\partial\omega_N}(u), \deg_{\partial\Omega}(u)) \in \mathbb{Z}^{N+1}.$$



(a) Orientation naturelle d'une courbe de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$



(b) L'orientation du degré est donnée par l'orientation naturelle du bord de $\mathcal{D}$

La minimisation avec condition de degré

BUT : Trouver des minimiseurs locaux de E_ε dans

$$\mathcal{J}_{\mathbf{p},q} = \{u \in \mathcal{J} \,|\, \deg(u, \mathcal{D}) = (\mathbf{p}, q)\}\,.$$

La minimisation avec condition de degré

BUT : Trouver des minimiseurs locaux de E_ε dans

$$\mathcal{J}_{\mathbf{p},q} = \{u \in \mathcal{J} \,|\, \deg(u, \mathcal{D}) = (\mathbf{p}, q)\}\,.$$

PROBLÈME : L'application degré $\deg(\cdot, \mathcal{D}) : \mathcal{J} \to \mathbb{Z}^{N+1}$ n'est pas continue par rapport à la convergence faible dans $H^1(\mathcal{D})$.

La minimisation avec condition de degré

BUT : Trouver des minimiseurs locaux de E_ε dans

$$\mathcal{J}_{\mathbf{p},q} = \{u \in \mathcal{J} \mid \deg(u, \mathcal{D}) = (\mathbf{p}, q)\}\,.$$

PROBLÈME : L'application degré $\deg(\cdot, \mathcal{D}) : \mathcal{J} \to \mathbb{Z}^{N+1}$ n'est pas continue par rapport à la convergence faible dans $H^1(\mathcal{D})$.

ALTERNATIVE : Minimisation dans un ensemble *ad hoc* couplée à une bonne quantification de la perte de norme lors de la convergence faible.

Lorsque $\mathcal{D}$ est de type annulaire ($N = 1$), l'argument est dû à Berlyand et Rybalko : *Solutions with Vortices of a Semi-Stiff Boundary Value Problem for the Ginzburg-Landau Equation* accepté dans *J. European Math. Society.*

Le cas général ($N \geq 2$) est démontré en suivant les techniques de Berlyand et Rybalko par D.S : *Local minimizers of the Ginzburg-Landau functional with prescribed degrees, J. Funct. Anal.* 257 (2009), no. 4, 1053–1091.

Le lemme du "coût"

Lemme (Berlyand, Mironescu 2004)

Soit $(u_n)_n \subset \mathcal{J}_{\mathbf{p},q}$ *tel que* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* H^1 *alors*

$$\liminf \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_n|^2 \geq \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 + \pi æ\left[(\mathbf{p},q), \deg(u,\mathcal{D})\right].$$

avec

$$æ\left[(\mathbf{p},q),(\mathbf{p}',q')\right] = \sum_i |p_i - p_i'| + |q - q'|.$$

Energie nécessaire pour bouger un degré

Lemme

Pour tout $u \in \mathcal{J}_{p,q}$ *et* $\eta > 0$*, il existe* $v \in \mathcal{J}_{(\mathbf{p},q)\pm\delta_i}$ *tel que*

$$E_\varepsilon(v) \leq E_\varepsilon(u) + \pi + \eta \text{ et } \|u - v\|_{L^2(\mathcal{D})} < \eta$$

où $\delta_i = (\delta_{1,i}, ..., \delta_{N,i}, \delta_{0,i}) \in \{0,1\}^{N+1}$.

Lemme (Berlyand, Rybalko 2008 pour un un domaine annulaire puis généralisé par D.S)

Soit u *un point critique de* E_ε *dans* $\mathcal{J}_{\mathbf{p},q}$ *tel que pour un certain* $i \in \{1, ..., N\}$ *(resp.* $i = 0$*) il existe* $x \in \partial\omega_i$ *(resp.* $x \in \partial\Omega$*) tel que* $u \times \partial_\tau u(x) > 0$ *avec* $\tau = \nu^\perp$ *et* ν *la normale extérieure à* ω_i *(resp.* Ω*).*
Alors il existe $v \in \mathcal{J}_{(\mathbf{p},q)-\delta_i}$ *tel que*

$$E_\varepsilon(v) < E_\varepsilon(u) + \pi \text{ et } \|u - v\|_{L^2(\mathcal{D})} \text{ arbitrairement petit.}$$

Les deux idées clés

Idée 1. Soit $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\Lambda > 0$ et $u_n \in \mathcal{J}$ tel que $E_{\varepsilon_n}(u_n) \leq \Lambda$. Quitte à extraire $u_n \rightharpoonup u$ dans H^1 avec

$$u \in H^1(\mathcal{D}, \mathbb{S}^1) = \sqcup_{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^N} E_{\mathbf{d}}$$

et

$$E_{\mathbf{d}} = \left\{ u \in H^1(\mathcal{D}, \mathbb{S}^1) \,|\, \deg(u, \mathcal{D}) = (\mathbf{d}, d) \right\},\ d := \sum_i d_i.$$

Idée 2. Pour $i \in \{1, ..., N\}$ on note V_i l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta V_i = 0 & \text{dans } \mathcal{D} \\ V_i \equiv 1 & \text{sur } \partial\mathcal{D} \setminus \partial\omega_i \\ V_i \equiv 0 & \text{sur } \partial\omega_i \end{cases}.$$

Pour $u \in H^1(\mathcal{D}, \mathbb{S}^1)$ on a

$$\deg_{\partial\omega_i}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{D}} (u \times \nabla u) \cdot \nabla^{\perp} V_i.$$

L'ensemble *ad hoc* : l'idée de Berlyand et Rybalko

Pour $(\mathbf{p}, q) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ et $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^N$ on définit

$$\mathcal{J}^{\mathbf{d}}_{\mathbf{p},q} = \left\{ u \in \mathcal{J}_{\mathbf{p},q} \,|\, \text{pour } i \in \{1, ..., N\} \text{ on a } |\text{abdeg}_i(u) - d_i| \leq \frac{1}{3} \right\}$$

avec

$$\text{abdeg}_i(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{D}} (u \times \nabla u) \cdot \nabla^{\perp} V_i \in \mathbb{R}.$$

Propriété de $\mathcal{J}_{\mathbf{p},q}^{\mathbf{d}}$

Proposition

1. *Pour tout* $(\mathbf{p}, q) \in \mathbb{Z}^{N+1}, \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^N$, $\mathcal{J}_{\mathbf{p},q}^{\mathbf{d}} \neq \emptyset$ *et*

$$\inf_{\mathcal{J}_{\mathbf{p},q}^{\mathbf{d}}} E_\varepsilon = I_0(\mathbf{d}) + \pi æ[(\mathbf{p}, q), (\mathbf{d}, d)] - o_\varepsilon(1),\ o_\varepsilon(1) \geq 0$$

   avec

$$I_0(\mathbf{d}) = \inf_{u \in E_{\mathbf{d}}} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 \text{ et } d = \sum d_i.$$

2. *Si* $u, v \in \mathcal{J}$ *sont tels que* $E_\varepsilon(u), E_\varepsilon(v) \leq \Lambda$ *alors*

$$|\mathrm{abdeg}_i(u) - \mathrm{abdeg}_i(v)| \leq C_\Lambda \|u - v\|_{L^2(\mathcal{D})}.$$

3. *Pour* $\Lambda > 0$ *et* ε *assez petit, si* $u \in \mathcal{J}_{\mathbf{p},q}^{\mathbf{d}}$ *tel que* $E_\varepsilon(u) < \Lambda$, *on a* $|\mathrm{abdeg}_i(u) - d_i| < \frac{1}{3}$.

Comportement de suite

Proposition

1. *Soit* $(u_n^\varepsilon)_n$ *une suite minimisante de* E_ε *dans* $\mathcal{J}_{\mathbf{p},q}^{\mathbf{d}}$*. Alors quitte à extraire,* $u_n^\varepsilon \rightharpoonup u_\varepsilon$ *dans* H^1 *avec* u_ε *qui minimise* E_ε *dans* $\mathcal{J}_{\deg(u_\varepsilon,\mathcal{D})}^{\mathbf{d}}$.
2. *Soit* $\Lambda > 0$ *et* $u_\varepsilon \in \mathcal{J}_{\mathbf{p},q}^{\mathbf{d}}$ *un point critique de* E_ε *dans* $\mathcal{J}_{\mathbf{p},q}$ *tel que* $E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \Lambda$ *alors si* $d_i > 0$ *(resp.* $\sum d_i > 0$*), pour* ε *assez petit il existe* $x_\varepsilon \in \partial\omega_i$ *(resp.* $x_\varepsilon \in \partial\Omega$*) tel que* $u_\varepsilon \times \partial_\tau u_\varepsilon(x_\varepsilon) > 0$.

Minimisation de E_ε dans $\mathcal{J}^{\mathbf{d}}_{\mathbf{p},q}$

On considère $(\mathbf{p},q) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ et $\mathbf{d} \in {\mathbb{N}^*}^N$ tel que

$$p_i \le d_i \text{ et } q \le \sum d_i.$$

On démontre en cinq étapes que pour ε petit E_ε admet un minimiseur dans $\mathcal{J}^{\mathbf{d}}_{\mathbf{p},q}$.

Étape 1. Soit (u_n^ε) une suite minimisante de E_ε dans $\mathcal{J}^{\mathbf{d}}_{\mathbf{p},q}$. Quitte à extraire $u_n^\varepsilon \rightharpoonup u_\varepsilon$ dans H^1.

Étape 2. Pour ε petit u_ε minimise E_ε dans $\mathcal{J}^{\mathbf{d}}_{\deg(u_\varepsilon,\mathcal{D})}$.

Étape 3.

$$\begin{aligned} I_0(\mathbf{d})+\pi æ\left[\deg(u_\varepsilon,\mathcal{D}),(\mathbf{d},d)\right]-o_\varepsilon(1) &= E_\varepsilon(u_\varepsilon) \\ &\le \inf_{\mathcal{J}^{\mathbf{d}}_{\mathbf{p},q}} E_\varepsilon - \pi æ\left[\deg(u_\varepsilon,\mathcal{D}),(\mathbf{p},q)\right] \end{aligned}$$

Étape 4. Alors $(\mathbf{p},q) \le \deg(u_\varepsilon,\mathcal{D}) \le (\mathbf{d},d)$ et donc si $(\mathbf{p},q) = (\mathbf{d},d)$ on a $\deg(u_\varepsilon,\mathcal{D}) = (\mathbf{p},q)$.

La dernière étape

Étape 5. Pour ε assez petit et $i \in \{0, ..., N\}$, il existe $x_i^\varepsilon \in \partial\omega_i$ tel que $u_\varepsilon \times \partial_\tau u_\varepsilon(x_i^\varepsilon) > 0$.
Ainsi en supposant que $\deg(u_\varepsilon, \mathcal{D}) \neq (\mathbf{p}, q)$, il existe $v_\varepsilon \in \mathcal{J}^{\mathbf{d}}_{\mathbf{p},q}$ tel que

$$E_\varepsilon(v_\varepsilon) < E_\varepsilon(u_\varepsilon) + \pi æ\left[(\mathbf{p}, q), \deg(u_\varepsilon, \mathcal{D})\right] \leq \inf_{\mathcal{J}^{\mathbf{d}}_{\mathbf{p},q}} E_\varepsilon$$

Absurde !