SUR LA VARIETE COMMUTANTE
ASSOCIEE A UNE PAIRE SYMETRIQUE.

D'après D.PANYUSHEV.

Le but de cet exposé est d'étudier la variété commutante associée à l'action d'un groupe réductif G dans un espace vectoriel V, de calculer la dimension de cette variété et de donner des critères d'irréductibilité. On appliquera, ensuite, ces propriétés au cas où $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ est une paire symétrique associée à une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}$ et on s'intéressera à la variété commutante de $\mathfrak{p}$ associée à l'action de K.

I. Quelques résultats préliminaires de Géométrique Algébrique. Dans tout ce paragraphe, Le corps de base considéré sera $\mathbb{C}$.

I.1) Sur la dimension des fibres d'un morphisme.

On rappelle ce résultat classique sur la dimension des fibres d'un morphisme dominant.

Théorème 1 : *Soit $\varphi : X \longrightarrow Y$ un morphisme dominant entre deux variétés irréductibles.*

1) Pour toute sous-variété fermée irréductible W de Y et toute composante irréductible Z de $\varphi^{-1}(W)$ dominant W, on a : $\dim Z \geq \dim W + \dim X - \dim Y$.

2) Il existe un ouvert non vide U de Y tel que, pour toute sous-variété fermée irréductible W de Y telle que $W \cap U \neq \emptyset$, il existe au moins une composante irréductible de $\varphi^{-1}(W)$ qui domine W et, pour chacune de ces composantes Z, on a :

$$\dim Z = \dim W + \dim X - \dim Y$$

3) Pour tout y de $\varphi(X)$, toute composante irréductible de $\varphi^{-1}(y)$ a une dimension supérieure ou égale à $\dim X - \dim Y$ et il existe un ouvert non vide U de Y tel que, pour tout y de U, toute composante irréductible de $\varphi^{-1}(y)$ soit de dimension égale à $\dim X - \dim Y$.

I.2) Le théorème de Rosenlicht.

Définition : *Soit G un groupe algébrique agissant sur une variété irréductible X. On appelle quotient géométrique de X par G la donnée d'une variété Y et d'un morphisme $\pi : X \longrightarrow Y$ tels que :*

i) - π est surjectif et les fibres de π sont les G-orbites . (En particulier, π est invariant et toutes les orbites sont fermées.)

ii) - π induit un isomorphisme de $\mathbb{C}(Y)$ sur $\mathbb{C}(X)^G$.

En général, un tel quotient peut ne pas exister, même si toutes les orbites sont fermées. Citons l'exemple suivant : Soit $G = \mathbb{C}^*$, opérant dans $X = \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ par : $t.(x, y) = (tx, \dfrac{y}{t})$. Les orbites sont fermées, les groupes d'isotropie sont triviaux, mais X n'admet pas de quotient par G, car il n'existe pas de fonction rationnelle invariante sur X séparant les orbites de $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

On a cependant le théorème suivant :

Théorème 2 (Rosenlicht) : *Soit G un groupe algébrique opérant dans une variété affine irréductible X. Il existe alors un ouvert non vide X_0 de X, stable par G, qui possède un quotient géométrique.*

La démonstration de ce théorème figure dans le cours de M.Brion, école “CIMPA” de Monastir, paragraphe I.6.

I.3) Nappes. On suppose encore que G est un groupe algébrique agissant sur une variété irréductible X. On pose : $X^s = \{x \in X / \dim G.x = s\}$. C'est une sous-variété localement fermée et G-invariante de X. Les composantes irréductibles des X^s sont les nappes de X. Le nombre de nappes est fini et, comme X est irréductible, il existe une unique nappe ouverte X^m dans X. De plus, comme la dimension des stabilisateurs est une fonction semi-continue supérieurement, on a l'inclusion :

$$\overline{X^s} \subset \bigcup_{l \leq s} X^l$$

En particulier, on a: $m = \max_{x \in X} \dim G.x$.

Corollaire 3: *Soit G un groupe algébrique opérant dans une variété affine irréductible X. Alors, on a :*

$$degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(X)^G = \dim X - \max_{x \in X}(\dim G.x)$$

En effet, à l'aide du théorème de Rosenlicht, on peut supposer que X possède un quotient géométrique $\pi : X \longrightarrow Y$. Il existe un ouvert non vide U de Y, tel que, pour tout y de U, $\pi^{-1}(y)$ est une G-orbite de dimension $\dim X - \dim Y = \dim X - degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(X)^G$. Le résultat est conséquence du fait que $\pi(X^m)$ est dense dans Y et, donc, rencontre U.

I.4) Quotient par un groupe réductif. Les résultats qui vont suivre figurent dans le cours de M.Brion, école “CIMPA” de Monastir, paragraphe 3.1.

Supposons G réductif agissant sur une variété affine X. Soit $X//G = specmax\mathbb{C}[X]^G$ la variété quotient de X par G. L'inclusion $\mathbb{C}[X]^G \subset \mathbb{C}[X]$ induit un morphisme algébrique surjectif $\pi : X \longrightarrow X//G$. Pour tout x dans X, la fibre $\pi^{-1}(\pi(x))$ contient une unique orbite fermée O_x. Plus précisément, on a:

$$\pi^{-1}(\pi(x)) = \{y \in X / O_x \subset \overline{G.y}\}$$

La variété quotient s'identifie à l'espace des G-orbites fermées de X.

Citons, enfin, le résultat suivant :

Proposition 4: *Soit G un groupe réductif agissant sur une variété affine irréductible X. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) Il existe un ouvert non vide de $X//G$ tel que toute fibre de π au-dessus de cet ouvert contient une G-orbite dense.

- ii) $Frac\mathbb{C}[X]^G = \mathbb{C}(X)^G$.

Corollaire 5: *Supposons que les assertions de la proposition 4 soient vérifiées. Alors, on a :*

$$\dim X//G = \dim X - \max_{x \in X} \dim G.x$$

II. La variété commutante $\sigma(V)$.

On se place, dorénavant, dans le cas où G est un groupe réductif connexe opérant dans un espace vectoriel de dimension finie V. On note V^* le dual de V et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. D'autre part, si M est un sous-ensemble de V, on pose : $Ann(M) = \{\alpha \in V^* / \alpha(m) = 0, \forall m \in M\}$.

Soit $\varphi : V \times V^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ "l'application-moment", définie par :

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \forall v \in V, \forall \alpha \in V^*, \varphi(v,\alpha)(X) =< \alpha, X.v >$$

Définition : *On appelle variété commutante de V et note $\sigma(V)$ l'ensemble $\varphi^{-1}(0)$.*

Ainsi, on peut écrire : $\sigma(V) = \{(v,\alpha) \in V \times V^* / \alpha \in Ann(\mathfrak{g}.v)\}$.

L'objet de ce paragraphe est de calculer la dimension de la variété commutante $\sigma(V)$. Pour cela, on introduit la "modalité" de l'action de G sur V, c'est-à dire le nombre entier suivant :

$$mod(G,V) = \max_s (\dim V^s - s)$$

Soit V^m la nappe ouverte dans V. On sait, d'après le corollaire 3 , que : $degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(V)^G = \dim V^m - m$. D'où :

$$mod(G,V) \geq degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(V)^G$$

Théorème 6: *On a :* $\dim \sigma(V) = \dim V + mod(G,V)$.

Preuve : Soit $p_1 : \sigma(V) \longrightarrow V$ la projection canonique. On constate que $p_1^{-1}(v) = \{v\} \times Ann(\mathfrak{g}.v)$. Chaque fibre de p_1 est donc un espace affine. D'autre part, en considérant le morphisme dominant $p_1^{-1}(G.v) \longrightarrow G.v$ et le théorème 1, on obtient:

$$\dim Ann(\mathfrak{g}.v) = \dim p_1^{-1}(G.v) - \dim G.v$$

D'où : $\dim p_1^{-1}(G.v) = \dim Ann(\mathfrak{g}.v) + \dim G.v = \dim V$.

Soit V_j^s une nappe de V telle que : $mod(G,V) = \dim V_j^s - s$ et considérons les composantes irréductibles $C_1, \ldots, C_n$ de $p_1^{-1}(V_j^s)$. On a : $V_j^s = \bigcup_i p_1(C_i)$. Ainsi, il existe une composante C_k telle que : $V_j^s = \overline{p_1(C_k)}$. Le morphisme $p_1 : C_k \longrightarrow V_j^s$ est dominant. Le théorème 1, appliqué à la sous-variété $G.v, v \in V_j^s$, permet d'écrire : $\dim p_1^{-1}(G.v) = \dim G.v + \dim C_k - \dim V_j^s$. D'où : $\dim V = s + \dim C_k - \dim V_j^s$. Ainsi, $\dim C_k = \dim V + mod(G,V)$ et, donc:

$$\dim \sigma(V) \geq \dim V + mod(G,V)$$

Soit maintenant σ_i une composante irréductible de $\sigma(V)$. Comme $p_1(\sigma_i)$ est irréductible, il existe une nappe V_i^s telle que $V_i^s \cap p_1(\sigma_i)$ soit dense dans $p_1(\sigma_i)$. Le morphisme $p_1 : \sigma_i \longrightarrow p_1(\sigma_i)$ est dominant. Il existe donc, d'après le théorème 1, un ouvert non vide U de $p_1(\sigma_i)$ tel que, pour tout y dans U, $\dim p_1^{-1}(y) = \dim \sigma_i - \dim p_1(\sigma_i)$. L'intersection $U \cap V_i^s \cap p_1(\sigma_i)$ est non vide. Soit y appartenant à cette intersection. On a : $\dim p_1^{-1}(y) = \dim V - s = \dim \sigma_i - \dim p_1(\sigma_i)$. D'où : $\dim p_1(\sigma_i) = \dim \sigma_i - \dim V + s = \dim V_i^s \cap p_1(\sigma_i) \leq \dim V_i^s$.

Ainsi, $\dim \sigma_i \leq \dim V + mod(G,V)$. Ceci est vrai pour toute composante irréductible de $\sigma(V)$, le résultat s'en suit.

Introduisons maintenant la variété-quotient $V//G$ et le morphisme surjectif $\pi : V \longrightarrow V//G$.

Définitions :

1) L'action de G sur V est dite stable s'il existe un ouvert non vide de $V//G$ au-dessus duquel les fibres par π sont des G-orbites.

2) L'action de G sur V est dite visible si $\pi^{-1}(\pi(0))$ est réunion finie de G-orbites.

3) L'action de G sur V est dite localement libre si l'on a : $\max_{v\in V} \dim G.v = \dim G$.

Il existe une classification des actions visibles des groupes linéaires réductifs connexes donnée par V.G.Kac (*Remarks on nilpotent orbits, j. Algebra, 64*). L'étude de cette classification lui permet d'en déduire le résultat suivant :

Proposition 7 : *On suppose que l'action de G sur V est visible. Alors, toute fibre de π est une réunion finie de G-orbites.*

Théorème 8 : *Supposons l'action de G visible. Alors, on a: $mod(G,V) = degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(V)^G$.*

Preuve :

- Tout d'abord, le fait que l'action soit visible, les propositions 7 et 4, impliquent que : $\mathbb{C}(V)^G = Frac\,\mathbb{C}[V]^G$.

Soit, ensuite, Y une sous-variété fermée irréductible G-invariante de V. Le morphisme canonique : $\mathbb{C}[V] \longrightarrow \mathbb{C}[Y]$ est surjectif et, donc, il en est de même du morphisme $\mathbb{C}[V]^G \longrightarrow \mathbb{C}[Y]^G$. Soit I le noyau de ce morphisme. Alors, la variété $V(I)$ de l'idéal I s'identifie avec $specmax\mathbb{C}[Y]^G$. Ceci implique que $\pi(Y) = Y//G$ est un fermé de $V//G$. L'action de G sur Y est encore visible, d'où : $\dim(Y//G) = degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(Y)^G$. Ainsi, on a: $degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(Y)^G \leq degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(V)^G \leq mod(G,V)$, pour toute sous-variété fermée irréductible G-invariante de V.

De plus, pour toute nappe Y_j^s de Y, on a, d'après le corollaire 3 et ce qui précède :

$$degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(\overline{Y_j^s})^G = \dim Y_j^s - s \leq degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(V)^G \leq mod(G,V)$$

D'où : $mod(G,Y) \leq degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(V)^G \leq mod(G,V)$.

Il suffit, alors, de choisir $Y = V$ pour en déduire le résultat annoncé.

Théorème 9 : *On suppose que l'action de G sur V est visible, stable et localement libre. Alors, la variété commutante $\sigma(V)$ est irréductible.*

Preuve : Considérons l'application moment $\varphi : V \times V^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ et montrons que celle-çi est surjective. Soit $v \in V$ tel que $\dim \mathfrak{g}.v = \dim \mathfrak{g}$. (L'existence d'un tel vecteur est due au fait que l'action de G est supposée localement libre). Il résulte des définitions que $\dim \varphi(\{v\} \times V^*) = \dim V^* - \dim Ann\mathfrak{g}.v = \dim \mathfrak{g}$, ce qui implique bien la surjectivité de φ.

D'après le théorème 1, Toute composante irréductible d'une fibre de φ est de dimension supérieure ou égale à $2\dim V - \dim \mathfrak{g}$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\dim V//G &= degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(V)^G, \text{ l'action est visible}\\ &= \dim V - \max_{v\in V} \dim G.v\\ &= \dim V - \dim \mathfrak{g}\end{aligned}$$

Ainsi, toute composante irréductible d'une fibre de φ est de dimension supérieure ou égale à $\dim V + \dim V//G$.

Mais, d'après les théorèmes 6 et 8, on a :

$$\begin{aligned}\dim \sigma(V) &= \dim V + mod(G,V)\\ &= \dim V + degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(V)^G\\ &= \dim V + \dim V//G\end{aligned}$$

Ainsi, la variété commutante $\sigma(V)$ est de dimension pure égale à $\dim V + \dim V//G$.

Soit σ_i une composante irréductible de $\sigma(V)$ et V_i^s une nappe telle que $p_1(\sigma_i) \cap V_i^s$ soit dense dans $p_1(\sigma_i)$. D'après la démonstration du théorème 6, on sait que : $\dim \sigma_i \leq \dim V + \dim V_i^s - s$. D'où : $\dim V//G \leq \dim V_i^s - s \leq mod(G,V)$. Comme , d'autre part, $mod(G,V) = \dim V//G = \dim V^m - m$ ($m = \max_{v \in V} dimG.v = \dim \mathfrak{g}$), il s'en suit que :

$$\dim V_i^s - s = mod(G,V) = \dim V^m - m$$

Montrons que $V_i^s = V^m$.

Soit Y une sous-variété fermée irrd́uctible G-invariante et propre de V. Comme l'action de G est stable, il existe un ouvert dense U de $V//G$ au-dessus duquel les fibres sont des G-orbites. $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert non vide, donc dense de V. Supposons que $Y//G = V//G$. Soit $v \in \pi^{-1}(U)$. Alors, $\pi(v) \in Y//G$. Il existe donc $z \in Y$ tel que $\pi(v) = \pi(z)$. Or, $\pi^{-1}(\pi(v)) = G.v$. Comme $z \in G.v \cap Y$, alors $v \in Y$. Ainsi, $\pi^{-1}(U) \subset Y$. D'où $Y = V$, ce qui n'est pas possible. Donc, $Y//G$ est une sous-variété fermée propre de $V//G$, ce qui implique que : $\dim Y//G < \dim V//G$, ou encore $degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(Y)^G < degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(V)^G$.

Soit $V_j^l, l < m$, une nappe de V. On obtient alors, à l'aide du corollaire 3 : $\dim V_j^l - l = degtr_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(\overline{V_j^l})^G < mod(G,V) = \dim V^m - m$. Ceci est vrai, pour tout $l < m$. L'égalité obtenue précédemment, à savoir $\dim V_i^s - s = \dim V^m - m$ implique donc que $s = m$ et $V_i^s = V^m$.

On a, par ailleurs, la formule suivante obtenue dans la démonstration du théorème 6 : $\dim V - s = \dim \sigma_i - \dim p_1(\sigma_i)$, ce qui nous donne : $\dim V//G = \dim V^m - m = \dim \sigma_i - \dim p_1(\sigma_i)$. D'où: $\dim V//G = \dim V + \dim V//G - \dim p_1(\sigma_i)$ et donc :

$$\dim p_1(\sigma_i) = \dim V$$

Ainsi, $p_1(\sigma_i)$ est un ouvert dense de V.

Supposons que $\sigma(V)$ contienne deux composantes irréductibles σ_i, σ_j. De ce qui précède, on en déduit que $U = p_1(\sigma_i) \cap p_1(\sigma_j)$ est un ouvert non vide de V. Soit $v \in U$. Alors, $v = p_1(v,\alpha) = p_1(v,\beta), (v,\alpha) \in \sigma_i, (v,\beta) \in \sigma_j$. Comme $(v,\alpha) \in p_1^{-1}(v)$ et que $p_1^{-1}(v)$ est irréductible, il s'en suit que $p_1^{-1}(v) \subset \sigma_i$. De même, on montre que $p_1^{-1}(v) \subset \sigma_j$; comme ceci est vrai pour tout v de U, on a $p_1^{-1}(U) \subset \sigma_i \cap \sigma_j$. Or, l'intersection de deux composantes irréductibles est nécessairement rare et ne peut donc contenir un ouvert non vide. L'irréductibilité de $\sigma(V)$ s'en suit.

III. Le cas d'une paire symétrique.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive complexe, munie d'une involution θ, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la paire symétrique correspondante, K le groupe réductif d'algèbre de lie $\mathfrak{k}$ agissant dans l'espace vectoriel $\mathfrak{p}$.

On rappelle certains résultats connus :

- L'espace $\mathfrak{p}//K$ s'identifie à l'espace des K-orbites semi-simples dans $\mathfrak{p}$. Il existe, de plus, un ouvert dense de $\mathfrak{p}//K$ formé des orbites semi-simples régulières. L'application $\pi : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}//K$ est donnée par :

$$\text{si } x = x_s + x_n \text{ est la décomposition de Jordan de } x, \pi(x) = K.x_s$$

l'ensemble des orbites semi-simples régulières est un ouvert dense de $\mathfrak{p}//K$; Chaque fibre au-dessus de cet ouvert est une K-orbite.

De ceci, on déduit que l'action de K sur $\mathfrak{p}$ est stable.

- Soit $\mathcal{N}$ le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$. Alors, on a :

$$\pi^{-1}(\pi(0)) = \mathcal{N} \cap \mathfrak{p}$$

De plus, le nombre de K-orbites nilpotentes dans $\mathfrak{p}$ est fini, ce qui montre que l'action de K dans $\mathfrak{p}$ est visible.

Notons r le rang de $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire la dimension commune des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$. Le théorème de restriction de Chevalley nous donne l'isomorphisme : $\mathbb{C}[\mathfrak{p}]^K \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{a}]^W$. D'où : $\dim \mathfrak{p}//K = r$. Comme l'action de K est visible, on peut appliquer le théorème 8 et, à l'aide du théorème 6, on obtient :

$$\dim \sigma(\mathfrak{p}) = \dim \mathfrak{p} + r$$

- On rappelle également que $K.x$ est une orbite de dimension maximale dans $\mathfrak{p}$ si et seulement si x est régulier. Dire que la K-action dans $\mathfrak{p}$ est localement libre revient à dire qu'il existe x régulier dans $\mathfrak{p}$ tel que : $\dim K.x = \dim \mathfrak{k}$ ou encore $\mathfrak{k}^x = \{0\}$. Cette dernière condition revient à dire que $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, ou encore que $\mathfrak{p}$ est de rang maximal.

Le théorème 9 implique le corollaire suivant :

Corollaire 10 : *On suppose que la paire symétrique* $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ *est de rang maximal. Alors, la variété commutante de* $\mathfrak{p}$ *est irréductible.*

On remarque, par ailleurs, que, moyennant l'identification usuelle de $\mathfrak{p}$ avec son dual, la variété commutante de $\mathfrak{p}$ est définie par :

$$\sigma(\mathfrak{p}) = \{(x, y) \in \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} / \ [x, y] = 0\}$$

Proposition 11 : *Pour toute paire symétrique* $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$, *l'ensemble* $\overline{K.\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$ *est une composante irréductible de* $\sigma(\mathfrak{p})$.

Preuve : Soit $\mathcal{R} = \overline{K.\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$. Soit $\mathfrak{a}^0$ l'ensemble des éléments génériques de $\mathfrak{a}$; Il s'agit d'un ouvert dense de $\mathfrak{a}$. Soit $e = (x, y) \in \mathfrak{a}^0 \times \mathfrak{a}$. Alors, on sait que $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^x$ et que $\mathfrak{k}^x = \mathfrak{m}$ est le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{k}$. Donc, $\mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}^x, \mathfrak{k}^e = \mathfrak{k}^x$ et $\dim K.e = \dim K.x$.

D'autre part, soit $k \in K$ tel que $k.x \in \mathfrak{a}$ et $z \in \mathfrak{a}$. On a : $[k^{-1}.z, x] = k^{-1}.[z, k.x] = 0$. Donc, $k^{-1}.z \in \mathfrak{a}$ et k appartient ainsi au normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans K. Ainsi,l'ensemble $K.e \cap \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ est fini. Ceci implique l'égalité :

$$\dim K.e = \dim K.\mathfrak{a}^0 \times \mathfrak{a} - \dim \mathfrak{a}^0 \times \mathfrak{a}$$

D'où, avec ce qui précède :

$$\dim K.x = \dim \mathcal{R} - 2r$$

Ainsi, $\dim \mathcal{R} = \dim \mathfrak{k} - \dim m + 2r$. Or, on a l'égalité : $\dim \mathfrak{k} - \dim \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{m} - \dim \mathfrak{a}$. D'où :

$$\dim \mathcal{R} = \dim \mathfrak{p} + r = \dim \sigma(\mathfrak{p})$$

Ceci prouve que $\mathcal{R}$ est une composante irréductible de $\sigma(\mathfrak{p})$.

Corollaire 12 : *Si la paire symétrique* $(\mathfrak{k}, \mathfrak{p})$ *est de rang maximal, alors* $\sigma(\mathfrak{p}) = \mathcal{R}$.