Sur la structure de Poisson transverse à une orbite nilpotente adjointe.

Exposé Nancy 24 Mars 2005

1. Introduction.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dual $\mathfrak{g}^*$, G son groupe adjoint agissant sur $\mathfrak{g}^*$ suivant l'action coadjointe. L'ensemble $\mathfrak{g}^*/G$ des G-orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^*$ joue un rôle très important en théorie de Lie. Lorsque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, via la forme de Killing, l'action coadjointe sur $\mathfrak{g}^*$ s'identifie à l'action adjointe sur $\mathfrak{g}$. On considère alors l'ensemble $\mathcal{N}$ des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$, puis $\mathcal{N}/G$. Cet ensemble sert, par exemple :

- En théorie des représentations, à la description du dual unitaire de G, via la "méthode des orbites".

- à l'étude de certains invariants géométriques d'une algèbre de Lie, comme, entre autres, la variété commutante.

Le but de cet exposé est d'aborder les deux questions suivantes, relatives aux éléments de $\mathcal{N}$, l'une de nature plutôt algébrique, l'autre de nature fortement géométrique, de montrer en quoi ces questions sont reliées et de donner quelques éléments de réponse :

Question 1 : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $e \in \mathfrak{g}$ un élément nilpotent, $\mathfrak{g}(e)$ son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$. On considère la décomposition :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(e) \oplus \mathfrak{n}$$

où $\mathfrak{n}$ est un supplémentaire quelconque de $\mathfrak{g}(e)$ dans $\mathfrak{g}$.

On dira que e est "Conormale" s'il existe un supplémentaire $\mathfrak{n}$ qui est une algèbre de Lie.

La question est : Peut-on déterminer toutes les orbites nilpotentes adjointes conormales ? ?

En particulier, une telle algèbre supplémentaire est un exemple d'algèbres dites "de Frobenius", c'est-à-dire d'indice 0. (On rappelle que l'indice d'une algèbre de Lie est la dimension minimale des stabilisateurs de ses éléments.)

Question 2 : Soit $(M, \{,\})$ une variété de Poisson, soit $m \in M$ et S_m la feuille symplectique passant par m. On sait définir de manière canonique , selon A.Weinstein, une sous-variété N de M, transverse en m à S_m, de dimension la codimension de S_m et possédant une structure de variété de Poisson : c'est la structure de Poisson transverse à la feuille S_m sur laquelle je reviendrai plus en détails ultérieurement. Si $M = \mathfrak{g}^*$ est le dual d'une algèbre de Lie complexe quelconque, munie de sa structure de Lie-Poisson , on sait que les feuilles symplectiques sont les orbites coadjointes.

La question est : Etudier la structure de Poisson transverse à une orbite nilpotent adjointe, lorsque $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

Bien que ce ne soit pas l'ordre dans lequel j'ai abordé ces deux problèmes , je vais commencer par donner quelques précisions sur la question 2.

2. La structure transverse à une orbite nilpotente adjointe.

2.1. Soit $(M,\{\})$ une variété de Poisson, $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble des fonctions (C^∞ ou régulières) sur M,Λ le bivecteur de Poisson associé à ce crochet. En chaque point $m \in M$, $\Lambda_m : T_m^*(M) \times T_m^*(M) \longrightarrow \mathbb{C}$ est la forme bilinéaire donnée par :

$$\forall f,g \in \mathcal{F}(M), \Lambda_m(d_m f, d_m g) = \{f,g\}(m)$$

A chaque $f \in \mathcal{F}(M)$, on associe son champ de vecteurs hamiltonien $\chi_f(g) = \{g,f\}$. On définit enfin, en chaque point m, l'application $\Lambda_m^\# : T_m^*(M) \longrightarrow T_m(M)$ par : $\Lambda_m^\#(d_m f) = \chi_{f,m}$.

Le rang de l'application linéaire $\Lambda_m^\#$ est, par définition, le rang au point m de la structure de Poisson sur M.

En particulier, si l'on a : $\forall m \in M, rg_m(M) = Cte = \dim M$, alors tout champ de vecteurs sur M est hamiltonien, et l'on peut munir M d'une structure symplectique, dont la 2-forme w correspondante est donnée, en tout point m, par :

$$\begin{aligned} w_m : T_m(M) \times T_m(M) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\chi_{f,m}, \chi_{g,m}) &\longrightarrow \{f,g\}(m) \end{aligned}$$

A chaque point m de M, on associe l'unique sous-variété connexe S_m de M, contenant M, vérifiant : $\forall x \in S_m, T_x(S) = Im\ \Lambda_x^\#$ et maximale au sens de l'inclusion, pour ces propriétés. S_m est une sous-variété de Poisson de M, de rang constant. On peut donc munir S_m d'une structure de variété symplectique : c'est la feuille symplectique contenant m.

2.2. Soit N une sous-variété de M. On suppose que :

$$\forall m \in N, T_m(M) = \Lambda_m^\#((T_m(N)^\perp)) \oplus T_m(N)$$

Cette condition revient à dire que la restriction à $T_m(N)^\perp$ de la forme bilinéaire Λ_m est non dégénérée.

On peut donc définir la projection canonique : $p_m : T_m(M) \longrightarrow T_m(N)$.

A.Weinstein montre alors que l'on définit, sur N, une structure de Poisson dite "induite" par :

$$\forall m \in N, \Lambda_{N,m}^\# = p_m \circ \Lambda_{M,m}^\# \circ p_m^*$$

$$\forall f,g \in \mathcal{F}(N), \{f,g\}_N = \Lambda_M(df \circ p, dg \circ p)$$

2.3. Soit N une sous-variété de M, transverse en m à la feuille symplectique S_m, et de dimension la codimension de S_m.

On a : $T_m(M) = T_m(S_m) \oplus T_m(N)$. Ceci implique que que la forme Λ_m est non dégénérée sur $T_m(N)^\perp$ et cette condition reste vraie dans un voisinage ouvert U de N. Suivant ce qui précéde, on peut alors munir U de la structure de Poisson induite.

De plus, A.Weinstein montre que deux sous-variétés satisfaisant aux propriétés précédentes sont nécessairement reliées par un isomorphisme local de Poisson.

On peut donc définir la structure de Poisson sur N comme étant la structure de Poisson transverse à la feuille symplectique S_m.

L'existence et la caractérisation d'une telle structure sont assurées concrètement par le théorème de décomposition de A.Weinstein suivant :

Théorème : *Soit $(M,\{\})$ une variété de Poisson, $m \in M$. On suppose que $rg_m(M) = 2r$. Il existe un voisinage U de m dans M, un système de coordonnées locales*

$(q_1, \dots, q_r, p_1, \dots, p_r, z_1, \dots, z_s)$ sur U tel que :

$$\{,\}_U = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1,k<l}^{k,l=s} \phi_{k,l}(z) \frac{\partial z_k}{\partial z_l}$$

où les $\phi_{k,l}$ sont des fonctions lisses, ne dépendant que de $z_1, \dots z_s$ et s'annulant en m.

On retrouve bien ici, localement, une décomposition de la structure de Poisson de M en un produit d'une structure symplectique correspondant à la feuille symplectique S_m et d'une struture de Poisson définie par les fonctions $\phi_{k,l}$.

Dans ce cas, $N \cap U = \{x \in U, p_i(x) = p_i(m), q_i(x) = q_i(m)\}$ et l'application : $x \longrightarrow (z_1(x), \dots, z_s(x))$ est une carte locale de N.

Concrètement donc, la structure de Poisson transverse est donnée par la matrice antisymétrique $\Lambda_N(x) = (\{z_i, z_j\}(x)) = (\phi_{i,j}(x))$, qui n'est autre que la matrice du bivecteur de Poisson en x associé à la structure sur N.

2.4. Soit maintenant $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de groupe adjoint G, de dual $\mathfrak{g}^*$. On a clairement les identifications suivantes,en chaque $\mu \in \mathfrak{g}^*$:

$$T_\mu(\mathfrak{g}^*) \simeq \mathfrak{g}^*$$
$$T^*_\mu(\mathfrak{g}^*) \simeq \mathfrak{g}$$

Si $F \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$, on peut donc considérer $d_\mu F$, la différentielle de F en μ, comme un élément de $\mathfrak{g}$ et on pose :

$$\forall F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*), \Gamma_\mu(d_\mu F, d_\mu G) = \mu([d_\mu F, d_\mu G])$$

Cette structure de Poisson est l'unique structure de Poisson sur $\mathfrak{g}^*$ satisfaisant à l'égalité :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \{X, Y\} = [X, Y]$$

C'est la structure de Lie-Poisson.

En particulier, on obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda^\#_\mu : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ X &\longrightarrow \operatorname{ad}^* X.\mu \end{aligned}$$

Ceci implique que : $Im\Lambda^\#_\mu = \mathfrak{g}.\mu$.

On en déduit donc qu'en chaque point $\mu \in \mathfrak{g}^*$ la feuille symplectique passant par μ est l'orbite co-adjointe $G.\mu$. On peut donc définir la structure de Poisson transverse N_μ à $G.\mu$.

Concrètement, on réalise N_μ de la manière suivante :

Soit $\mathfrak{n}$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}(\mu)$ dans $\mathfrak{g}$. On a :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\mu) \oplus \mathfrak{n}$$
$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}(\mu)^\perp \oplus \mathfrak{n}^\perp$$
$$T_\mu(\mathfrak{g}^*) = T_\mu(G.\mu) \oplus \mathfrak{n}^\perp$$

Posons :

$$N_\mu = \mu + \mathfrak{n}^\perp$$

Il s'en suit que :

$$T_\mu(\mathfrak{g}^*) = T_\mu(G.\mu) \oplus T_\mu(N)$$

On vérifie bien ainsi que N_μ est transverse en μ à l'orbite $G.\mu$ et on sait aussi que deux supplémentaires quelconques de $\mathfrak{g}(\mu)$ donnent la même structure transverse.

On va pouvoir préciser la structure de Poisson transverse à l'aide d'une formule dite "formule des contraintes de Dirac",valable pour le dual d'une algèbre de Lie quelconque. Nous allons décrire cette formule dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire celui d'une algèbre de Lie semi-simple.

3. **Le cas semi-simple.**

3.1. On suppose maintenant que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe, que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On définit un système de racines $\Delta(\mathfrak{h})$, $\Pi(\mathfrak{h})$ une base de racines simples et on note K la forme de Killing qui permet d'identifier $\mathfrak{g}$ à son dual $\mathfrak{g}^*$. Soit $x \in \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}$ un supplémentaire quelconque de $\mathfrak{g}^x$ dans $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{n}^\perp$ l'orthogonal dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{n}$ relativement à K. Alors, $N = x + \mathfrak{n}^\perp$ est la structure transverse à l'orbite adjointe $G.x$.

Soit $(Z_i)_{1\leq i\leq k}$ une base de $\mathfrak{g}(\mu)$ et $(X_j)_{1\leq j\leq p}$ une base du supplémentaire $\mathfrak{n}$. On considère la base $(\overline{Z_i}, \overline{X_j})$, duale de la base précédente relativement à K. Nécessairement, la famille $(\overline{Z_i})$ est une base de $\mathfrak{n}^\perp$ et on identifie $\mathfrak{n}^\perp$ à $\mathbb{C}^k$ par l'application $q = (q_1, \ldots, q_k) \longrightarrow \sum_{i=1}^{i=k} q_i\overline{Z_i}$, ce qui nous donne un système de coordonnées linéaires pour N.

On pose ensuite :

$$C_N(q)_{l,m} = \sum_{s=1}^{s=k} K(x + q_s\overline{Z_s}, [X_l, X_m])$$

$$B_N(q)_{l,j} = \sum_{s=1}^{s=k} K(q_s\overline{Z_s}, [X_l, Z_j])$$

$$A_N(q)_{i,j} = \sum_{s=1}^{s=k} K(q_s\overline{Z_s}, [Z_i, Z_j])$$

On notera respectivement $C_N(q), D_N(q)$ et $A_N(q)$ les matrices de termes généraux donnés par les formules précédentes. On sait que la matrice $C_N(q)$ est inversible en $q = 0$, elle le reste donc lorsque q parcourt un voisinage V de 0, bien choisi dans $\mathfrak{n}^\perp$.

La matrice $\Lambda_N(q)$ du bivecteur de Poisson Λ_N est alors définie par :

$$\Lambda_N(q) = A_N(q) +^t B_N(q)C_N(q)^{-1}B_N(q)$$

On constate finalement que les coefficients $B_N(q)_{l,j}$ et $A_N(q)_{i,j}$ sont linéaires en les coordonnées q_i, que le coefficient $C_N(q)_{l,m}$ est affine en les q_i. Il s'en suit que la matrice inverse de $C_N(q)$ a des coefficients rationnels en les coordonnées q_i. Ainsi, chaque crochet de Poisson $\{q_i, q_j\}$ de la structure transverse est rationnel en $(q_1, \ldots, q_k)$.

Compte-tenu de ce qui précède, il est donc intéressant de se poser les questions suivantes :

• Dans quels cas, cette structure est-elle polynômiale ?

• La nature " polynômiale" de la structure, lorsqu'elle existe, dépend-elle du choix du supplémentaire ?

• Dans le cas où cette structure est polynômiale, on peut définir une notion de "degré" de la structure, comme étant par exemple le plus grand des degrés des coefficients de de la matrice Λ_N. Cette notion de degré est-elle intrinsèque , c'est-à-dire est-elle indépendante du choix du supplémentaire ?

Nous allons tenter de donner des réponses à ces questions.

3.2. Soit O une orbite nilpotente adjointe de $\mathfrak{g}$. On sait associer à O, de manière canonique, un sl_2-triplet (h, e, f), h étant l'élément semi-simple correspondant à la caractéristique de l'orbite. Dans ce cas, e est un générateur de O. On note $\mathfrak{N}$ l'ensemble des supplémentaires de $\mathfrak{g}(e)$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{N}_h$ le sous-ensemble des supplémentaires *adh*-invariants. On démontre tout d'abord le résultat suivant :

Proposition 1 :$\mathfrak{N}_h$ *est une variété algébrique irréductible.*

On en arrive au résultat fondamental :

Théorème 2 :*Soit* $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}_h$, $N = e+\mathfrak{n}^\perp$ *la structure de Poisson trasnverse à G.e associée à* $\mathfrak{n}$. *La matrice* $\Lambda_N(q)$ *du bivecteur de Poisson de* N *est à coefficients polynômiaux en la variable* q.

Remarque : Ce résultat a été démontré par R.Cushman et M.Roberts dans le cas où $\mathfrak{n} = \Im \operatorname{ad} f$.

Une idée de la preuve : Voir Appendice 1.

3.3. On peut donc se demander si la structure transverse reste polynômiale si l'on considère un supplémentaire qui n'est pas $\operatorname{ad} h$-invariant. La réponse est non comme le montre l'exemple III de l'Appendice 2.

On peut définir, pour chaque structure transverse N, défini à partir d'un supplémentaire $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}_h$ une notion de degré, en considérant le degré $deg_N(\Lambda_{N,i,j}$ du coefficient $\Lambda_N(q)_{i,j}$, suivant la variable q, et en posant :

$$deg_N(\Lambda) = \sup_{i,j} deg_N(\Lambda_{N,i,j})$$

La question est de savoir si ce degré dépend ou non du choix du supplémentaire comme le laissent penser les travaux de Cushman et Damianou.

La réponse est également négative comme le montrent les exemples I et II de l'Appendice 2..

4. **Quelques résultats qur les orbites conormales.**

Supposons, maintenant, qu'il existe, dans $\mathcal{N}_h$ un supplémentaire $\mathfrak{n}_0$ qui soit une algèbre de Lie et considérons la structure transverse associée $N_0 = e+\mathfrak{n}_0^\perp$. Suivant la terminologie introduite par M.Roberts, une orbite vérifiant une telle propriété est dite "*conormale*".

Il est clair que, dans ce cas, la matrice $C_{N_0}(q)$ ne dépend pas de la variable q. Il s'en suit que :

1- La structure transverse est polynômiale.

2 - $deg_{N_0}(\Lambda) \leq 2$.

On dit alors que la structure transverse N_0 est "*quadratique*".

Il semble donc intéressant, ne serait-ce que pour cela, de déterminer les orbites nilpotentes adjointes conormales. On dispose, à ce sujet, de deux résultats.

4.1. **A propos des orbites nilpotentes sphériques.** Soit B un sous-groupe de Borel de G, associé au système de racines Δ. Une G-orbite nilpotente est dite “sphérique” si elle contient une B-orbite dense. Ces orbites ont été classifiées, par exemple par D.Panyushev : ce sont celles de hauteur inférieure ou égale à 3. En particulier, les orbites nilpotentes sphériques de $sl_n(\mathbb{C})$ sont toutes les orbites de hauteur inférieure à 2, définies par les partitions suivantes : $(2^a, 1^b)$.

En utilisant des résultats de D.Panyushev sur “les stabilisateurs en position générale”, on a le résultat suivant :

Proposition 2 : *Toute orbite nilpotente sphérique est conormale.*

Une idée de la preuve : Voir Appendice 1.

4.2. **A propos des orbites conormales de $\mathbf{sl_n}$.** Certaines de ces orbites ont déjà été exhibées par M.Rais. Le même auteur a aussi prouvé, dans des notes non publiées, que toute orbite nilpotente minimale d'une algèbre de Lie semi-simple quelconque était conormale.

On sait que les orbites nilpotentes de sl_n sont paramétrées par les partitions :
$(\lambda_1, \ldots, \lambda_p), \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p$.
J'obtiens le résultat suivant :

Théorème : *Soit O une orbite nilpotente de $sl_n(\mathbb{C})$ de partition $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ telle que :*

$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq s,\ |\lambda_i - \lambda_j| \leq 1$$

Alors, O est conormale.

Il est à remarquer que cette classe contient l'orbite régulière, les orbites sphériques et celles déjà exhibées par M.Rais. La démonstration de ce théorème est très technique et consiste, en gros, à déterminer le centralisateur d'un générateur bien choisi d'une telle orbite.

Je conjecture, en fait, que cette classe d'orbites est l'ensemble des orbites conormales de sl_n.

• La question se pose enfin de savoir si toute structure transverse d'une orbite nilpotente conormale reste quadratique. La réponse est encore non, comme l'exemple IV de l'Appendice 2.

Appendice 1.

Une idée de la preuve du théorème 1.

On utilise certains arguments introduits par Slodowy et la formule des contraintes de Dirac.Pour cela, On introduit tout d'abord la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres sous l'action de $\operatorname{ad} h$, soit :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i)$$

On considère ensuite l'application : $\lambda : \mathbb{C}^* \longrightarrow G$ donnée par : $\forall t \in \mathbb{C}^*, \lambda(t) = \exp \lambda_t h$, où λ_t est un nombre complexe tel que : $e^{\lambda_t} = t$. Dans ces conditions, on a :

$$\forall t \in \mathbb{C}^*, \forall X \in \mathfrak{g}(i), \operatorname{Ad} \lambda(t).X = t^i X$$

On obtient alors une action de $\mathbb{C}^*$ sur la variété N à l'aide de la formule :

$$\forall t \in \mathbb{C}^*, \forall v \in N, \rho(t).v = t^{-2} \operatorname{Ad} \lambda(t).v$$

On fait agir $\mathbb{C}^*$ sur le coefficient $C_N(q)_{l,m}$, par ρ, de la manière suivante :

$$\rho(t).C_N(q)_{l,m} = C_N(\rho(t^{-1}).q)_{l,m}$$

Comme $\mathfrak{n}$ est un supplémentaire $\operatorname{ad} h$-invariant, on peut considérer que chaque vecteur X_i est un vecteur-poids de poids ν_i.

Soit $\Delta_N(q)$ le déterminant de la matrice $C_N(q)$. En utilisant alors la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sl_2-modules, on montre que :

$$C_N(t^{2+n_1}q_1, \ldots, t^{2+n_k}q_k)_{i,j} = t^{2+\nu_i+\nu_j} C_N(q_1, \ldots, q_k)_{i,j}, \; n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$$
$$\Delta_N(t^{2+n_1}q_1, \ldots, t^{2+n_k}q_k) = \Delta_N(q_1, \ldots, q_k)$$

Compte-tenu de la définition des coefficients de $C_N(q)$, le polynôme $\Delta_N(q)$ possède un terme constant non nul. Ceci implique donc que ce déterminant est constant.

Une idée de la preuve de la proposition 2.

En fait, des travaux de D.Panyushev, on déduit qu'il existe un générateur x de l'orbite sphérique $G.x$ tel que, si $Q = G^x$, $S = Q \cap \theta(Q)$ (θ, involution de Cartan), alors :

$B.x$ est dense dans $G.x$.

$P = S.B$ est un sous-groupe parabolique de G, tel que $S = Q \cap P$.

Soit $\mathfrak{p}$ l'algèbre de Lie de P et $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}^x$. On a :

$$\begin{aligned}\dim(\mathfrak{q} + \mathfrak{p}) &= \dim \mathfrak{q} + \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{s} \\ &= \dim \mathfrak{q} + \dim \mathfrak{p}^x + \dim P.x - \dim \mathfrak{s} \\ &= \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{p}^x - \dim \mathfrak{s}\end{aligned}$$

Comme $\mathfrak{s} = \mathfrak{p}^x$, on en déduit que :

$$\dim(\mathfrak{q} + \mathfrak{p}) = \dim \mathfrak{g}$$

On a, donc, pour une telle orbite :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q} + \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \oplus (\mathfrak{t}_1 \oplus {}^u\mathfrak{p})$$

où $\mathfrak{t}_1$ est un tore.

Posons : $\mathfrak{s}_O = \mathfrak{t}_1 \oplus {}^u\mathfrak{p}$. Alors, il est clair que $\mathfrak{s}_O$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, supplémentaire de $\mathfrak{g}^x$.

Exemples et contre-exemples.

Pour sl_4, on a les orbites nilpotentes suivantes :
- L'orbite régulière : (4).
- L'orbite sous-régulière : $(3,1)$.
- L'orbite sphérique non minimale : $(2,2)$.
- L'orbite minimale : $(2,1,1)$.

L'orbite sous-régulière de $\mathbf{sl}_(\mathbf{4},\mathbb{C})$.

On suppose que $\mathfrak{g} = sl(4,\mathbb{C})$ et on considère l'orbite nilpotente associée à la partition $(3,1)$. La caractéristique de cette orbite est $(2,0,2)$, sa hauteur est 4. On considère le sl_2-triplet (h^+, e, f), où h^+ est l'élément de $\mathfrak{h}$ correspondant à cette caractéristique. La base de racines simples $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ vérifie alors :

$$\alpha_1(h^+) = 2,\ \alpha_2(h^+) = 0,\ \alpha_3(h^+) = 2$$

Dans ces conditions, on peut écrire :

$$e = X_{\alpha_1} + X_{\alpha_2+\alpha_3},\ h^+ = 2H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + 2H_{\alpha_3}$$

Une base de vecteurs-poids de $\mathfrak{g}^e$ est donnée par :

$$\begin{array}{ll} Z_1 = H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} - H_{\alpha_3}, & Z_2 = X_{\alpha_1} + X_{\alpha_2+\alpha_3} \\ Z_3 = X_{\alpha_3}, & Z_4 = X_{\alpha_1+\alpha_2} \\ Z_5 = X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} & \end{array}$$

Considérons ensuite les vecteurs suivants :

$$\begin{array}{llll} X_1 = H_{\alpha_1}, & X_2 = H_{\alpha_2+\alpha_3}, & X_3 = X_{\alpha_1}, & X_4 = X_{\alpha_2} \\ X_5 = X_{-\alpha_2}, & X_6 = X_{-\alpha_1}, & X_7 = X_{-\alpha_3}, & X_8 = X_{-\alpha_1-\alpha_2} \\ X_9 = X_{-\alpha_2-\alpha_3}, & X_{10} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} & & \end{array}$$

Soit $\mathfrak{n}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par les $(X_i, 1 \leq i \leq 10)$. Il s'agit bien d'un supplémentaire $\mathrm{ad}\, h^+$-invariant de $\mathfrak{g}^e$.

La base $(\overline{Z_i})$ que nous choisissons pour l'orthogonal $\mathfrak{n}^\perp$ est, à des constantes non nulles près, celle qui est issue de la base de $\mathfrak{g}$, duale de la base (Z_i, X_j) relativement à K :

$$\begin{array}{ll} \overline{Z_1} = H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} - H_{\alpha_3}, & \overline{Z_2} = X_{-\alpha_2-\alpha_3} \\ \overline{Z_3} = X_{-\alpha_3}, & \overline{Z_4} = X_{-\alpha_1-\alpha_2} \\ \overline{Z_5} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} & \end{array}$$

Exemple I.

On va calculer la matrice $\Lambda'_N(q) = B_N(q)C_N^{-1}(q)D_N(q)$, dont le degré nous donnera celui de la structure transverse $N = e + \mathfrak{n}^{\perp}$, et on obtient :

$$C_N(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -q_4 & 0 & 4q_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4q_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_N(q) = \begin{pmatrix} 0 & -q_2 & 0 & q_4 & q_5 \\ 0 & 2q_2 & q_3 & 0 & q_5 \\ 0 & q_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_4 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 4q_1 & 0 & -q_4 \\ 0 & 0 & 0 & -4q_1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda'_N(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4q_1q_3 & -4q_1q_4 & 0 \\ 0 & -4q_1q_3 & 0 & 4q_2q_1 - 64q_1^3 & -\frac{2}{3}q_3q_2 + 16q_1^2q_3 \\ 0 & 4q_1q_4 & -4q_1q_2 + 64q_1^3 & 0 & \frac{2}{3}q_4q_2 - 16q_1^2q_4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}q_3q_2 - 16q_1^2q_3 & -\frac{2}{3}q_4q_2 + 16q_1^2q_4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci implique que le degré de la structure transverse N est 3.

Exemple II.

Considérons maintenant le sous-espace $\mathfrak{n}'$ de $\mathfrak{g}$ engendré par les $(X'_i, 1 \leq i \leq 10)$, définis par :

$$X'_1 = H_{\alpha_1}, X'_2 = H_{\alpha_2}, X'_i = X_i, \forall i, 3 \leq i \leq 10$$

Il s'agit encore d'un supplémentaire $\operatorname{ad} h^+$-invariant de $\mathfrak{g}^e$.

La base $(\overline{Z_i})$ de ${\mathfrak{n}'}^{\perp}$ est alors la suivante :

$$\overline{Z_1} = H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + 3H_{\alpha_3}, \qquad \overline{Z_2} = X_{-\alpha_2-\alpha_3}$$
$$\overline{Z_3} = X_{-\alpha_3}, \qquad \overline{Z_4} = X_{-\alpha_1-\alpha_2}$$
$$\overline{Z_5} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$$

On obtient, cette fois, pour la structure transverse $N' = e + {\mathfrak{n}'}^{\perp}$:

$$C_{N'}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{N'}(q) = \begin{pmatrix} 0 & -q_2 & 0 & q_4 & q_5 \\ 0 & q_2 & -q_3 & q_4 & 0 \\ 0 & q_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_4 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & -4q_1 & 0 & -q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & -4q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4q_1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda'_{N'}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12q_1q_3 & 12q_1q_4 & 0 \\ 0 & 12q_1q_3 & 0 & 0 & -2q_3q_2 \\ 0 & -12q_1q_4 & 0 & 0 & 2q_4q_2 \\ 0 & 0 & 2q_3q_2 & -2q_4q_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ceci nous montre que, dans ce cas, la structure transverse N' est de degré 2.

Exemple III : Structure transverse non polynômiale.

Soit $\mathfrak{n}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, engendré par les vecteurs $(X''_i), 1 \leq i \leq 10$, définis par :

$$X''_1 = H_{\alpha_1}, \quad X''_2 = H_{\alpha_2}, \quad X''_3 = X_{\alpha_1}, \quad X''_4 = X_{\alpha_2}$$
$$X''_5 = X_{-\alpha_2}, \quad X''_6 = X_{-\alpha_1} + X_{\alpha_3}, \quad X''_7 = X_{-\alpha_3}, \quad X''_8 = X_{-\alpha_1-\alpha_2}$$
$$X''_9 = X_{-\alpha_2-\alpha_3}, \quad X''_{10} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$$

Il s'agit bien d'un supplémentaire de $\mathfrak{g}^e$ dans $\mathfrak{g}$, qui n'est pas $\mathrm{ad}\, h^+$-invariant.

Soit $N_1 = e + \mathfrak{n}_1^\perp$ la structure transverse correspondante. La base choisie pour l'orthogonal $\mathfrak{n}_1^\perp$ est la suivante :

$$\overline{Z_1} = H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + 3H_{\alpha_3}, \quad \overline{Z_2} = X_{-\alpha_2-\alpha_3}, \quad \overline{Z_3} = X_{-\alpha_3} - X_{\alpha_1}$$
$$\overline{Z_4} = X_{-\alpha_1-\alpha_2}, \quad \overline{Z_5} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$$

On se place maintenant dans l'ouvert $U_1 = e + V_1$ de N_1 défini par :

$$V_1 = \{\sum_{i=1}^{i=5} q_i \overline{Z_i}, q_3 \neq 1\}$$

Les calculs donnent alors :

$$C_{N_1}(q) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2(1-q_3) & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2q_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -q_4 & 0 & 0 & q_2 & 0 & 1-q_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
2(1-q_3) & -1+2q_3 & 0 & -q_2 & 0 & 0 & 4q_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1+q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$D_{N_1}(q) = \begin{pmatrix}
0 & -q_2 & 0 & q_4 & q_5 \\
0 & q_2 & -q_3 & q_4 & 0 \\
0 & q_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -q_4 & q_2 & 0 & 0 \\
0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\
4q_3 & 0 & 0 & -q_5 & q_2 \\
0 & 0 & -4q_1 & 0 & -q_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & q_3 \\
0 & -4q_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & q_3 & 0 & 0 & -4q_1
\end{pmatrix}$$

$$\Lambda'_{N_1}(q) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 4q_3^2 & -8q_3q_4 & -4q_3q_5 \\
0 & 0 & 12q_1q_3(q_3-1) & 12q_1q_4(1-2q_3) & -12q_1q_3q_5 \\
-4q_3^2 & -12q_1q_3(q_3-1) & 0 & q_3q_5 & -2q_2q_3 \\
8q_1q_4 & -12q_1q_4(1-2q_3) & -q_3q_5 & 0 & q_5^2 + 2q_2q_4\frac{2q_3-1}{q_3-1} \\
4q_1q_5 & 12q_1q_3q_5 & 2q_2q_3 & -q_5^2 - 2q_2q_4\frac{2q_3-1}{q_3-1} & 0
\end{pmatrix}$$

Exemple IV : L'orbite $(3,2)$ de $\mathbf{sl_5}$.

Voici un exemple de structure transverse à une orbite conormale qui est de degré strictement supérieur à 2.

On considère cette fois l'orbite nilpotente de partition $(3,2)$ dans $\mathfrak{g} = sl_5(\mathbb{C})$. Cette orbite est conormale. Soit (h^+, e, f) le sl_2-triplet associé, $(1,1,1,1)$ la caractéristique, $(\alpha_i), 1 \leq i \leq 4$, le système de racines simples correspondant. On a :

$$e = X_{\alpha_1+\alpha_2} + X_{\alpha_2+\alpha_3} + X_{\alpha_3+\alpha_4}$$

Une base de vecteurs-poids de $\mathfrak{g}^e$ est donnée par :

$$\begin{array}{ll}
Z_1 = 2H_{\alpha_1} - H_{\alpha_2} + H_{\alpha_3} - 2H_{\alpha_4}, & Z_2 = X_{\alpha_1} + X_{\alpha_3} \\
Z_3 = X_{\alpha_2} + X_{\alpha_4}, & Z_4 = X_{\alpha_1+\alpha_2} + X_{\alpha_3+\alpha_4} \\
Z_5 = X_{\alpha_2+\alpha_3}, & Z_6 = X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \\
Z_7 = X_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, & Z_8 = X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}
\end{array}$$

Considérons maintenant le supplémentaire $\mathfrak{n}_f = Im\,\mathrm{ad}\, f$ de $\mathfrak{g}^e$, $\mathfrak{n}_f^\perp = \mathfrak{g}^f$ et $N_f = e + \mathfrak{g}^f$. On utilise la base suivante de $\mathfrak{n}_f$:

$$\begin{array}{llll}
X_1 = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, & X_2 = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & X_3 = X_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, & X_4 = X_{-\alpha_1-\alpha_2} \\
X_5 = X_{-\alpha_2-\alpha_3}, & X_6 = X_{-\alpha_3-\alpha_4}, & X_7 = X_{-\alpha_1}, & X_8 = X_{-\alpha_2} \\
X_9 = X_{-\alpha_3}, & X_{10} = X_{-\alpha_4}, & X_{11} = H_{\alpha_1+\alpha_2} & \\
X_{12} = H_{\alpha_2+\alpha_3}, & X_{13} = H_{\alpha_3+\alpha_4}, & X_{14} = X_{\alpha_1} - X_{\alpha_3} & \\
X_{15} = X_{\alpha_2} - X_{\alpha_4}, & X_{16} = X_{\alpha_1+\alpha_2} - X_{\alpha_3+\alpha_4} & &
\end{array}$$

La base choisie, pour $\mathfrak{g}^f$, est la suivante :

$$\begin{array}{ll}
\overline{Z_1} = 2H_{\alpha_1} - H_{\alpha_2} + H_{\alpha_3} - 2H_{\alpha_4}, & \overline{Z_2} = X_{-\alpha_1} + X_{-\alpha_3} \\
\overline{Z_3} = X_{-\alpha_2} + X_{-\alpha_4}, & \overline{Z_4} = X_{-\alpha_1-\alpha_2} + X_{-\alpha_3-\alpha_4} \\
\overline{Z_5} = X_{-\alpha_2-\alpha_3}, & \overline{Z_6} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} \\
\overline{Z_7} = X_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, & \overline{Z_8} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}
\end{array}$$

On obtient :

$$\Lambda'_N(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -75q_1^2 & 15q_1q_2 & -5q_1q_2 & \frac{1}{3}q_2^2 & \{z_2,z_7\} & \{z_2,z_8\} \\ 0 & 75q_1^2 & 0 & -15q_3q_1 & 5q_3q_1 & \{z_3,z_6\} & -\frac{1}{3}q_3^2 & \{z_3,z_8\} \\ 0 & -15q_1q_2 & 15q_3q_1 & 0 & 0 & \{z_4,z_6\} & \{z_4,z_7\} & \{z_4,z_8\} \\ 0 & 5q_1q_2 & -5q_3q_1 & 0 & 0 & \{z_5,z_6\} & \{z_5,z_7\} & \{z_5,z_8\} \\ 0 & -\frac{1}{3}q_2^2 & -\{z_3,z_6\} & -\{z_4,z_6\} & -\{z_5,z_6\} & 0 & \{z_6,z_7\} & \{z_6,z_8\} \\ 0 & -\{z_2,z_7\} & -\{z_3,z_7\} & -\{z_4,z_7\} & -\{z_5,z_7\} & -\{z_6,z_7\} & 0 & \{z_7,z_8\} \\ 0 & -\{z_2,z_8\} & -\{z_3,z_8\} & -\{z_4,z_8\} & -\{z_5,z_8\} & -\{z_6,z_8\} & -\{z_7,z_8\} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\{z_2,z_7\} &= \frac{375}{2}q_1^3 + 10q_5q_1 - 5q_4q_1 - \frac{2}{3}q_2q_3 \\
\{z_2,z_8\} &= -\frac{75}{2}q_1^2q_2 + 10q_1q_6 - \frac{1}{3}q_2q_4 \\
\{z_3,z_6\} &= \frac{125}{2}q_1^3 - 10q_5q_1 + 5q_4q_1 + \frac{2}{3}q_2q_3 \\
\{z_3,z_8\} &= -\frac{25}{2}q_1^2q_3 - 10q_1q_7 + \frac{1}{3}q_3q_4 \\
\{z_4,z_6\} &= -\frac{25}{2}q_1^2q_2 + 2q_2q_5 - \frac{5}{2}q_1q_6 \\
\{z_4,z_7\} &= -\frac{75}{2}q_1^2q_3 - 2q_3q_5 + \frac{5}{2}q_1q_7 \\
\{z_4,z_8\} &= -\frac{3}{2}q_3q_6 + \frac{3}{2}q_2q_7 + 10q_1q_2q_3 \\
\{z_5,z_6\} &= \frac{25}{2}q_1^2q_2 - 2q_2q_5 - \frac{5}{2}q_1q_6 \\
\{z_5,z_7\} &= \frac{25}{2}q_1^2q_3 + 2q_3q_5 + \frac{5}{2}q_1q_7 \\
\{z_5,z_8\} &= \frac{3}{2}q_3q_6 - \frac{3}{2}q_2q_7 - 5q_1q_2q_3 \\
\{z_6,z_7\} &= \frac{625}{4}q_1^4 - \frac{25}{2}q_1^2q_4 - 5q_1q_2q_3 - 25q_1^2q_5 + 5q_1q_8 + \frac{1}{6}q_2q_7 + 2q_4q_5 - q_5^2 + \frac{1}{6}q_3q_6 \\
\{z_6,z_8\} &= -\frac{125}{4}q_1^3q_2 + \frac{5}{2}q_1q_2q_4 + 5q_1q_2q_5 + \frac{3}{2}q_2^2q_3 - \frac{3}{2}q_2q_8 - q_5q_6 + \frac{4}{3}q_4q_6 \\
\{z_7,z_8\} &= \frac{125}{4}q_1^3q_3 - \frac{15}{2}q_1q_3q_4 + 25q_1^2q_7 - \frac{3}{2}q_2q_3^2 + \frac{3}{2}q_3q_8 - \frac{4}{3}q_4q_7 + q_5q_7
\end{aligned}$$

On constate, alors, que le degré de la structure transverse N est 4.