UN EXEMPLE DE REPRESENTATIONS UNIPOTENTES ASSOCIEES A UNE ORBITE NILPOTENTE NON MINIMALE: LE CAS DES ORBITES DE DIMENSION 10 DE $so(4,3)$.

Hervé Sabourin.

Abstract : *Dans [TO], P.Torasso a donné une méthode pour construire une représentation minimale d'une groupe de Lie simple de rang au moins égal à 3. Nous proposons, dans ce travail, de montrer, sur un exemple, comment cette construction s'adapte au cas d'une orbite nilpotente non minimale. Dans le cas envisagé des orbites de dimension 10 de $so(4,3)$, nous obtenons une famille de représentations paramétrée par un sous-ensemble de la série discrète du revêtement à deux feuillets de $SL_2(\mathbb{R})$. En particulier, cette famille de représentations permet de caractériser la restriction à $SO(4,3)$ des représentations minimales de $SO(4,4)$ et $SO(5,3)$.*

0.INTRODUCTION et NOTATIONS.

0.1. Un des aspects de la théorie des représentations d'un groupe de Lie réductif réel G consiste à essayer d'associer, à chaque G-orbite coadjointe nilpotente, une représentation unitaire irréductible de G, s'inspirant en cela de la méthode de Kirillov pour les groupes nilpotents. Le cas le plus favorable a lieu lorsque la G-orbite en question est minimale. Dans [SA], en effet, on prouve l'existence d'une telle représentation, dite minimale, lorsque G est le revêtement universel de $SO_+(4,3)$ et on en donne une réalisation explicite. La méthode utilisée, qui s'inspire essentiellement d'une méthode des orbites due à M.Duflo [DU], a été, depuis, généralisée par P.Torasso [TO] et s'applique maintenant au cas d'un groupe de Lie simple de rang supérieur ou égal à 3.

Il semble intéréssant de voir dans quelle mesure cette méthode s'applique pour construire des représentations irréductibles associées à des orbites nilpotentes non minimales. Considérons le cas particulier où $G = \widetilde{SO_+(4,3)}$. On constate qu'il existe exactement deux G-orbites nilpotentes de dimension 10. Le but de ce travail est de montrer de quelle manière la méthode décrite dans [TO] permet de construire explicitement des familles de représentations associées respectivement à ces deux orbites.

0.2. Il existe une manière naturelle d'associer une représentation unitaire irréductible d'un groupe simple G à une G-orbite nilpotente coadjointe, au moins dans le cas où cette orbite est minimale.

Soit, en effet, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, dont on suppose qu'elle n'est pas de type A_n, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ la complexifiée de $\mathfrak{g}$ et $O_{min,\mathbb{C}}$ la $G_{\mathbb{C}}$-orbite minimale correspondante. On a, dans ce cas, deux résultats importants:

• L'intersection $O_{min,\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}$ se réduit, soit à une seule G-orbite notée O_{min}, soit à deux G-orbites O_{min} et $-O_{min}$.

• Il existe un et un seul idéal primitif et complètement premier J_0 de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, appelé idéal de Joseph de $\mathfrak{g}$, dont la variété associée $V(J_0)$ est l'adhérence de $O_{min,\mathbb{C}}$.

Compte-tenu de ceci, on dira qu'un élément π de $\widehat{G}$ est associé à O_{min} si l'annulateur infinitésimal $Ann\pi$ de π dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est égal à J_0.

La méthode décrite dans [TO] permet de prouver l'existence d'un tel π lorsque l'orbite O_{min} est G-admissible et lorsque G est de rang supérieur ou égal à 3.

Dans le cas où l'orbite est non minimale, la situation est plus délicate car on ne bénéficie plus des deux propriétés précédentes. Revenons au cas où $G = \widetilde{SO_+(4,3)}$, soit $O_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, les deux G-orbites nilpotentes de dimension 10 et soit $O_{10,\mathbb{C}}$ la $G_{\mathbb{C}}$-orbite de dimension 10 correspondante. La stratégie est, dans ce cas, la suivante:

1) . On constate, tout d'abord, que, pour tout sous-groupe parabolique maximal P de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$, l'orbite O_ε contient une P-orbite ouverte dense difféomorphe à une P-orbite dans le dual $\mathfrak{p}^*$ de $\mathfrak{p}$ qui, cependant, n'est pas nécéssairement de type unipotent.

2) . La méthode décrite dans [TO] appliquée à chaque O_ε nous permet d'associer, à chaque parabolique maximal standard P,une famille $(\pi_{P,\varepsilon,i}, i \in I_P)$ de représentations unitaires irréductibles de P, où I_P correspond à l'ensemble fini des données d'admissibilité de la P-orbite si celle-ci est de type unipotent, mais par contre décrit l' ensemble des représentations de la série discrète du revêtement à deux feuillets de $SL(2,\mathbb{R})$ si la P-orbite n'est pas de type unipotent.

3) . Il faut vérifier, ensuite, que l'on peut amalgamer ces P-représentations et on obtient, ainsi, une famille $\pi_{\varepsilon,i}, i \in I$, de représentations unitaires irréductibles de G, I parcourant un ensemble convenablement choisi d'éléments de la série discrète du revêtement à deux feuillets de $SL_2(\mathbb{R})$.

4) . Après avoir déterminé explicitement la représentation infinitésimale de $\pi_{\varepsilon,i}$, on montre, enfin, que, pour tout couple (ε, i), l'idéal $Ann\pi_{\varepsilon,i}$ est complètement premier et vérifie:

$$V(Ann\pi_{\varepsilon,i}) = \overline{O_{10,\mathbb{C}}}$$

On conclut ce travail par l'étude des restrictions à G des représentations minimales des groupes $\widetilde{SO_+(4,4)}$ et $\widetilde{SO_+(5,3)}$, dont les orbites minimales sont de dimension 10. On montre que ces restrictions se décomposent en facteurs irréductibles appartenant à la famille obtenue précédemment.

0.3. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Nous désignerons par G le revêtement universel de $SO_+(4,3)$, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

Soit $(e_i, e_{-i}), 1 \leq i \leq 4$, une base de $\mathbb{R}^8$ et $\mathcal{B}$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^8$, choisies telles que la base (e_i, e_{-i}) soit orthogonale relativement à $\mathcal{B}$ et telles que : $\forall i, \mathcal{B}(e_i, e_i) = 1, \mathcal{B}(e_{-i}, e_{-i}) = -1$. Soit $(E_{ij}), i, j \in \pm\{1,2,3,4\}$ la base usuelle de $gl(8)$ qui s'en déduit, $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan déployée de $so(4,3)$ dont une base est $H_i = E_{i,i} - E_{-i-i}, 1 \leq i \leq 3$. Soit $\eta_i, 1 \leq i \leq 3$ la base duale des (H_i) dans $\mathfrak{h}^*$. Le système de racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est de type B_3, donné par:

$$\Delta = \{\pm(\eta_i \pm \eta_j), 1 \leq i < j \leq 3, \pm\eta_i, 1 \leq i \leq 3\}$$

Soit $\Delta^+ = \{(\eta_i \pm \eta_j), 1 \leq i < j \leq 3; (\eta_i), 1 \leq i \leq 3\}$ le système de racines positives et

$\Pi = \{\alpha_1 = \eta_1 - \eta_2,\ \alpha_2 = \eta_2 - \eta_3,\ \alpha_3 = \eta_3\}$ le système de racines simples correspondant.

A chaque racine α de Δ, on associe les éléments $H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha}$ d'une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$ et la sous-algèbre $sl_2(\alpha)$ engendrée par $H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha}$. Soit $W_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$.
Nous adopterons, pour la suite, les notations suivantes :

$$\forall \alpha \in \Delta, \forall t \in \mathbb{R}, x_\alpha(t) = \exp tX_\alpha, w_\alpha(t) = \exp tW_\alpha,\ \forall t \in \mathbb{R}^*, h_\alpha(t) = \exp \ln|t| H_\alpha$$

En particulier, on pose: $w_\alpha = w_\alpha(\frac{\pi}{2}), w = w_{\eta_1-\eta_2}, \gamma = w_{\eta_1-\eta_3}(\frac{\pi}{2}), \sigma = w_{\eta_3}(\frac{\pi}{2})$.

Les crochets, dans $\mathfrak{g}$, sont donnés par : ($d_{ij} = 1$ si $i < j$, $= -1$, sinon)

$[X_{\eta_i-\eta_j},\ X_{\eta_j-\eta_k}] = X_{\eta_i-\eta_k}$
$[X_{\eta_i-\eta_j},\ X_{\eta_j+\eta_k}] = d_{ik}d_{jk}X_{\eta_i+\eta_k}$
$[X_{\eta_i+\eta_j},\ X_{-\eta_j-\eta_k}] = -d_{ij}d_{jk}X_{\eta_i-\eta_k}$
$[X_{\eta_i-\eta_j}, X_{-\eta_i-\eta_k}] = -d_{ik}d_{jk}X_{-\eta_j-\eta_k}$
$[X_{\eta_i-\eta_j}, X_{\eta_j}] = X_{\eta_i}$
$[X_{\eta_i-\eta_j}, X_{-\eta_i}] = -X_{-\eta_j}$
$[X_{\eta_i+\eta_j}, X_{-\eta_j}] = -d_{ij}X_{\eta_i}$
$[X_{\eta_i}, X_{\eta_j}] = -2d_{ij}X_{\eta_i+\eta_j}$
$[X_{\eta_i}, X_{-\eta_j}] = 2X_{\eta_i-\eta_j}$
$[X_{\eta_i}, X_{-\eta_i-\eta_j}] = d_{ij}X_{-\eta_j}$
$[X_{-\eta_i}, X_{-\eta_j}] = 2d_{ij}X_{-\eta_i-\eta_j}$

0.4. Le sous-groupe compact maximal. On choisit un sous-groupe compact maximal de G, K, que l'on identifie à $SU(2)^3$ de la manière suivante:

Soit $E =< e_i,\ 1 \le i \le 4 >$, $F =< e_{-i},\ 1 \le i \le 4 >$, $\mathfrak{k}' = so(4,4) \cap so(8)$ et K' le sous-groupe analytique d'un revêtement simplement connexe de $SO_+(4,4)$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}'$. Le groupe K' s'identifie à un revêtement de $SO(E) \times SO(F)$. Désignons, ensuite, par $\mathbf{H}$ le corps des quaternions.

Soit h_E :	E	$\longrightarrow$	$\mathbf{H}$,	h_F :	F	$\longrightarrow \mathbf{H}$
	e_1	$\longrightarrow$	$\mathbf{1}$		e_{-1}	$\longrightarrow \mathbf{1}$
	e_2	$\longrightarrow$	$\mathbf{i}$		e_{-2}	$\longrightarrow \mathbf{i}$
	e_3	$\longrightarrow$	$\mathbf{j}$		e_{-3}	$\longrightarrow \mathbf{j}$
	e_4	$\longrightarrow$	$\mathbf{k}$		e_{-4}	$\longrightarrow \mathbf{k}$

On sait que $SU(2)$ est la sphère unité de $\mathbf{H}$. Soit $S = SU(2)^4$. Posons ensuite:

$$\forall (a,b) \in SU(2)^2,\ \forall x \in E,\ \forall y \in F,\ a.x.b = h_E^{-1}(a.h_E(x).b),\quad a.y.b = h_F^{-1}(a.h_F(y).b).$$

Alors, S agit sur $E \oplus F$ par: $(a,b,c,d).(x,y) = (a.x.b^{-1}, c.y.d^{-1})$, et cette action permet d'identifier, via leurs algèbres de Lie, K' et S. Dans ces conditions, on a:

$$K = \{(a,b,c,d) \in S / c.\mathbf{k}.d^{-1} = \mathbf{k}\} = \{(a,b,c,\mathbf{k}^{-1}.c.\mathbf{k}),\ (a,b,c) \in SU(2)^3\}$$

0.5. Les sous-groupes paraboliques maximaux standards de G. Soit $\mathfrak{n} =< X_\alpha, \alpha \in \Delta^+ >$ $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ et B le sous-groupe de Borel de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ et de décomposition de Langlands $B = MAN$.

Soit, pour $1 \le i \le 3$, $\mathfrak{p}_i$ la sous-algèbre parabolique maximale standard associée à la racine simple α_i, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{a}_i \oplus \mathfrak{n}_i$ sa décomposition de Langlands et P_i le sous-groupe parabolique de G correspondant. Soit Γ_a le sous-groupe de G engendré par a.

1) Soit $\Pi_1 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$, $\Delta(\Pi_1) = \{\pm(\eta_2+\eta_3),\ \pm(\eta_2-\eta_3),\ \pm(\eta_2),\ \pm(\eta_3)\}$

• $\Delta_1 = \Delta - \Delta(\Pi_1),\ \Delta_1^+ = \Delta_1 \cap \Delta^+ = \{\eta_1 - \eta_2,\ \eta_1 + \eta_2,\ \eta_1 - \eta_3, \eta_1 + \eta_3, \eta_1\}$.

• $\mathfrak{h}_1 =< H_{\alpha_2}, H_{\alpha_3} >$

• $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus < X_\alpha, \alpha \in \Delta(\Pi_1) >$

• $\mathfrak{a}_1 =< H_{\eta_1} >$

• $\mathfrak{n}_1 =< X_\alpha, \alpha \in \Delta_1^+ >,\ \mathfrak{n}_1^- =< X_\alpha, -\alpha \in \Delta_1^+ >$.

• $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ est une sous-algèbre parabolique maximale de dimension 16 de $\mathfrak{g}$.

• $M_1 = \Gamma_{w^2}.(M_1)_o$ est le normalisateur de $\mathfrak{m}_1$ dans G, $A_1 = \exp \mathfrak{a}_1, N_1 = \exp \mathfrak{n}_1$ et $P_1 = M_1 A_1 N_1$.

2) Soit $\Pi_2 = \{\alpha_1, \alpha_3\},\ \Delta(\Pi_2) = \{\pm(\eta_1 - \eta_2),\ \pm(\eta_3)\}$

• $\Delta_2 = \Delta - \Delta(\Pi_2),\ \Delta_2^+ = \Delta_2 \cap \Delta^+ = \{\eta_2, \eta_1 + \eta_2,\ \eta_1 \pm \eta_3,\ \eta_2 \pm \eta_3, \eta_1\}$.

• $\mathfrak{h}_2 =< H_{\alpha_1}, H_{\alpha_3} >$

• $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{h}_2 \oplus < X_\alpha, \alpha \in \Delta(\Pi_2) >$

• $\mathfrak{a}_2 =< H_{\eta_1 + \eta_2} >$

• $\mathfrak{n}_2 =< X_\alpha, \alpha \in \Delta_2^+ >,\ \mathfrak{n}_2^- =< X_\alpha, -\alpha \in \Delta_2^+ >$.

• $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{n}_2$ est une sous-algèbre parabolique maximale de dimension 14 de $\mathfrak{g}$.

• $M_2 = \Gamma_{w^2_{\alpha_2}}.(M_2)_o$ est le normalisateur de $\mathfrak{m}_2$ dans G, $A_2 = \exp \mathfrak{a}_2, N_2 = \exp \mathfrak{n}_2$ et $P_2 = M_2 A_2 N_2$.

3) Soit $\Pi_3 = \{\alpha_1, \alpha_2\},\ \Delta(\Pi_3) = \{\pm(\eta_1 - \eta_2), \pm(\eta_1 - \eta_3),\ \pm(\eta_2 - \eta_3)\}$

• $\Delta_3 = \Delta - \Delta(\Pi_3),\ \Delta_3^+ = \Delta_3 \cap \Delta^+ = \{\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_1 + \eta_2,\ \eta_2 + \eta_3,\ \eta_1 + \eta_3,\ \eta_3\}$.

• $\mathfrak{h}_3 =< H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2} >$

• $\mathfrak{m}_3 = \mathfrak{h}_3 \oplus < X_\alpha, \alpha \in \Delta(\Pi_3) >$

• $\mathfrak{a}_3 =< H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + 3H_{\alpha_3} >$

• $\mathfrak{n}_3 =< X_\alpha, \alpha \in \Delta_3^+ >,\ \mathfrak{n}_3^- =< X_\alpha, -\alpha \in \Delta_3^+ >$.

• $\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{m}_3 \oplus \mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{n}_3$ est une sous-algèbre parabolique maximale de dimension 15 de $\mathfrak{g}$.

• $M_3 = \Gamma_{w^2_{\alpha_3+}}.(M_3)_o$ est le normalisateur de $\mathfrak{m}_3$ dans G, $A_3 = \exp \mathfrak{a}_3, N_3 = \exp \mathfrak{n}_3$ et $P_3 = M_3 A_3 N_3$.

1. LA METHODE DE CONSTRUCTION. Nous allons rappeler, dans ce paragraphe, les étapes essentielles de la méthode que nous allons utiliser pour construire les représentations souhaitées. On pourra se rapporter à [SA], paragraphe 1, pour de plus amples détails.

1.1 La stratégie que l'on utilise repose, tout d'abord, sur l'existence d'une paramétrisation du dual unitaire d'un groupe presque algébrique réel, dû à M.Duflo.

Soit P un groupe presque algébrique réel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$, soit q un élément de $\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{p}(q)$ et $P(q)$, respectivement le stabilisateur de q dans $\mathfrak{p}$ et P. Soit B_q la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{p}$, définie par: $\forall X, Y \in \mathfrak{p}, B_q(X,Y) = q([X,Y])$. Dans [DU], M.Duflo introduit les notions suivantes:

Définitions :

1) Une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{p}$ est dite de type fortement unipotent relativement à q si $\mathfrak{b}$ est algébrique, coisotrope relativement à la forme B_q, et si l'on a: $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}(q) +^u \mathfrak{b}$.

2) La forme q est dite de type unipotent si les deux conditions suivantes sont réalisées:

. Il existe un facteur réductif de $\mathfrak{p}(q)$ contenu dans $\ker q$.

. Il existe une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à q.

Soit $R(q)$ un facteur réductif de $P(q)$, $\mathfrak{r}(q)$ son algèbre de Lie. L'espace $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}(q)$ est naturellement muni d'une structure d'espace symplectique $R(q)$-invariante et cette structure permet de définir l'extension métaplectique $R(q)^{\mathfrak{p}}$ de $R(q)$. Le noyau de cette extension admet un et un seul élément non trivial, noté dorénavant ε. On rappelle, de plus, que tout élément de $R(q)^{\mathfrak{p}}$ peut s'écrire sous la forme $(x, \varphi(x)), x \in R(q), \varphi$ étant une fonction sur l'espace des Lagrangiens de $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}(q)$ à valeurs dans les complexes de module 1, calculée par G.Lion ([LI-VE]).

Soit $Y(q) = \{\tau \in \widehat{R(q)^{\mathfrak{p}}}/\tau(\varepsilon) = -Id\}$ et $\mathbb{E} = \{(q, \tau), q$ de type unipotent, $\tau \in Y(q)\}$. Le groupe P opère dans $\mathbb{E}$ et M.Duflo établit, dans [DU], une bijection de $\mathbb{E}/P$ sur $\widehat{P}$. L'image, par cette bijection, d'un couple (q, τ) sera notée $\pi_{q,\tau}$ et sera appelée P-représentation *"de type Duflo"*.

Soit, donc, (q, τ) un élément de $\mathbb{E}$. q étant de type unipotent, il existe des sous-algèbres de type fortement unipotent relativement à q, $P(q)$-invariantes; choisissons-en une, soit $\mathfrak{b}$. Posons ${}^{u}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, le radical unipotent de $\mathfrak{b}$. Soit A le sous-groupe analytique de P correspondant; Alors, $B = P(q).A = R(q) \times A$ est un sous-groupe fermé de P, d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. Soit μ la restriction de q à $\mathfrak{a}$. $R(q)$ opère dans $\mathfrak{a}$ en laissant stable μ, de sorte que l'extension $R(q)^{\mathfrak{a}}$ est bien définie et que l'on peut associer à τ un élément $\tilde{\tau}$ de $(\widehat{R(q)^{\mathfrak{a}}})$, défini par la formule suivante:

$$\forall (x, \varphi(x)) \in R(q)^{\mathfrak{a}},\ \tilde{\tau}(x, \varphi(x)) = \frac{\phi(x)}{\varphi(x)} \tau(x, \phi(x))$$

(Cette formule ne dépend pas du choix du représentant $(x, \phi(x))$ de x dans $R(q)^{\mathfrak{p}}$).

Soit T_μ la classe de représentation de A associée à μ par la correspondance de Kirillov, d'espace $\mathfrak{L}_\mu$, et S_μ la représentation métaplectique associée.

On définit une représentation du groupe B, notée $\tau \otimes S_\mu T_\mu$, dans le produit tensoriel de l'espace de τ et de l'espace de T_μ, soit $V_\tau \otimes \mathfrak{L}_\mu$, en posant :

$$\forall x \in R(q),\ \forall y \in A, (\tau \otimes S_\mu T_\mu)(xy) = \tilde{\tau}(x, \varphi(x)) \otimes S_\mu(x, \varphi(x)).T_\mu(y) \qquad (\mathbf{1})$$

Posons :

$$\pi_{q,\tau,\mathfrak{b}} = \mathrm{Ind}_B^P(\tau \otimes S_\mu T_\mu)$$

D'après [DU], 3.16, on sait que si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont deux sous-algèbres de type fortement unipotent relativement à q, $P(q)$-invariantes, alors les représentations $\pi_{q,\tau,\mathfrak{b}}$ et $\pi_{q,\tau,\mathfrak{b}'}$ sont irréductibles et équivalentes. La classe d'équivalence de ces représentations est la P-représentation *de type Duflo* $\pi_{q,\tau}$.

• Soit, maintenant, $X(q) = \{\tau \in Y(q)/d\tau$ est un multiple de $iq_{|\mathfrak{r}(q)}\}$. L'orbite $P.q$ sera dite *admissible* si $X(q) \neq \emptyset$. Les éléments de $X(q)$ sont, alors, appelés *"paramètres d'admissibilité"* de l'orbite. Le cas le plus favorable à cette construction a lieu lorsque l'orbite envisagée est admissible.

• Supposons G simple connexe et simplement connexe de rang supérieur ou égal à 3 et plaçons-nous dans le cas où l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G admet une unique G-orbite nilpotente coadjointe minimale et admissible, O_{min}. Soit (P_i) une famille de sous-groupes paraboliques maximaux standards de G . On vérifie que, pour chaque i, O_{min} contient une et une seule P_i-orbite ouverte dense, isomorphe à une P_i-orbite coadjointe, et que chacune de ces P_i-orbites est admissible et de type unipotent. On peut, donc, associer, à chaque P_i, une famille $\pi_{i,\tau}$ de P_i-représentations de type Duflo. On utilise, ensuite, un résultat fondamental de J.Tits ([SE]) selon lequel G est somme amalgamée de ses sous-groupes paraboliques maximaux standard suivant leurs intersections pour en déduire l'existence d'une famille π_τ de G-représentations unitaires irréductibles.

1.2. La construction précédente repose, comme on vient de le voir, sur le fait que les orbites considérées sont "de type unipotent". Citons, plus généralement, une paramétrisation da

la représentation coadjointe due encore à M.Duflo ([DU], chapitre 1). En reprenant les notations précédentes, soit $q \in \mathfrak{p}^*$ une forme de type unipotent et $\mathfrak{p}(q) = \mathfrak{r}(q) \oplus^u \mathfrak{p}(q)$. On introduit les ensembles suivants:

$$\mathcal{L}(q) = \{\lambda \in \mathfrak{p}(q)^* / \lambda_{|^u \mathfrak{p}(q)} = q_{|^u \mathfrak{p}(q)}\}$$

L'opération "restriction" induit un isomorphisme de $\mathcal{L}(q)$ sur $\mathfrak{r}(q)^*$.

$$\mathcal{D} = \{(q, \lambda),\ q \text{ de type unipotent } \lambda \in \mathcal{L}(q)\}$$

Le groupe P opère naturellement sur $\mathcal{D}$.

Soit, maintenant, $(q, \lambda) \in \mathcal{D}$ et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à q. Soit $f \in \mathfrak{p}^*$ telle que:

$$f_{|^u \mathfrak{b}} = q_{|^u \mathfrak{b}}, \quad f_{|\mathfrak{p}(q)} = q_{|\mathfrak{p}(q)}$$

M.Duflo établit les résultats suivants:

. La P-orbite $P.f$ ne dépend pas des choix de $\mathfrak{b}$ et f. On note $O_{q,\lambda}$ cette orbite.

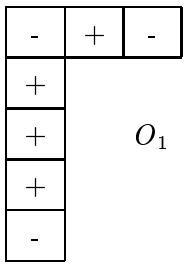
. L'application $(q, \lambda) \longrightarrow O_{q,\lambda}$ induit une bijection de $\mathcal{D}/P$ sur $\mathfrak{p}^*/P$.

En particulier, si f est de type unipotent, $P.f = O_{f,0}$.

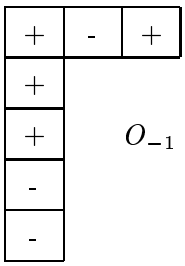
2. LES G-ORBITES NILPOTENTES DE DIMENSION 10 DE $\mathfrak{g}$.

2.1. On sait que l'on peut classifier les $G_{\mathbb{C}}$-orbites nilpotentes adjointes à l'aide des partitions de l'entier 7. (voir, par exemple [CO-MG], ch.5) On constate, ainsi, qu'il existe une seule $G_{\mathbb{C}}$-orbite de dimension 10, associée à la partition $(3, 1, 1, 1, 1)$.

La classification des G-orbites s'obtient aussi à partir des partitions de 7. A chaque partition, on associe un diagramme de Young "signé", c'est-à-dire un diagramme dont les boites sont remplies de signes "+" ou "-" selon une règle donnée par le théorème 9.3.4 du ch.9 de [CO]. Si l'on applique ce théorème à la partition $(3, 1, 1, 1, 1)$, on obtient deux diagrammes:



O_1



O_{-1}

Soit $X_\varepsilon = \dfrac{X_{-\eta_1-\eta_2} + \varepsilon X_{\eta_2-\eta_1}}{4}$, $\varepsilon = \pm 1$. On a, de plus:

$$O_\varepsilon = G.X_\varepsilon,\ \varepsilon = \pm 1$$

On notera f_ε l'élément du dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ correspondant à X_ε par la forme de Killing $\mathcal{K}$.

Posons :

$$X_{1,\varepsilon} = X_{\eta_2+\eta_3} + \varepsilon X_{\eta_3-\eta_2}$$
$$X_{2,\varepsilon} = X_{\eta_2-\eta_3} + \varepsilon X_{-\eta_2-\eta_3}$$
$$X_{3,\varepsilon} = X_{\eta_2} + \varepsilon X_{-\eta_2}$$

Soit $\mathfrak{g}(X_\varepsilon)$ le stabilisateur, dans $\mathfrak{g}$, de X_ε. On obtient :

$$\mathfrak{g}(X_\varepsilon) = sl_2(\eta_3) \oplus < X_{i,\varepsilon}, 1 \leq i \leq 3 > \oplus\ \mathfrak{n}_1^-$$

Proposition 2.1 :

1) Le stabilisateur $G(X_\varepsilon)$ de X_ε dans G est donné par :

$$G(X_\varepsilon) = \Gamma_{w^2}.G(X_\varepsilon)_0$$

2) L 'orbite $O_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$ est G-admissible et possède $3 - \varepsilon$ paramètres d'admissibilité.

Preuve :

1) Soit $H = H_{\eta_1+\eta_2} + H_{\eta_1-\eta_2}$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ se décompose, suivant l'action adjointe de H, en sous-espaces propres, de la manière suivante:

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(-2) \oplus \mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(2)$, avec:

$\mathfrak{g}(-2) = \mathfrak{n}_1^-,\ \mathfrak{g}(0) = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{g}(2) = \mathfrak{n}_1$.

Soit $G(0)$ le stabilisateur de H dans G. On a : $G(0) = M_1.A_1, G(0)_0 = (M_1)_0.A_1$ la composante neutre de $G(0)$. On obtient:

$$G(X_\varepsilon) = \Gamma_{w^2} G(0)_0(X_\varepsilon).N_1^-$$

Choisissons pour $\mathfrak{n}_1^-$ la base (B):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} X_{-\eta_1}, X_{\eta_3-\eta_1} + X_{-\eta_1-\eta_3}, X_{-\eta_1-\eta_2} + X_{\eta_2-\eta_1}, X_{-\eta_1-\eta_3} - X_{-\eta_1+\eta_3}, X_{-\eta_1-\eta_2} - X_{\eta_2-\eta_1}$$

Moyennant cette base, $\mathfrak{n}_1^-$ s'identifie à $\mathbb{R}^5$. Le groupe $(M_1)_0$ agit, de manière naturelle, sur $\mathfrak{n}_1^- \simeq \mathbb{R}^5$ et s'identifie à la composante neutre du groupe des automorphismes de $\mathbb{R}^5$ laissant invariante la forme quadratique, définie dans la base (B), par:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2$$

Ainsi,

$$(M_1)_0 \sim \widetilde{SO_+(3,2)}$$

L'action de $G(0)_0$ sur X_ε est donnée par:

$$\forall x \in (M_1)_0, x.\exp tH_{\eta_1}.X_\varepsilon = e^{-t}(x.X_\varepsilon)$$

Donc, $q(x \exp tH_{\eta_1} X_\varepsilon) = e^{-2t} q(X_\varepsilon)$, et, comme le vecteur X_ε est non isotrope, il s'en suit que: $G(0)_0(X_\varepsilon) \subset (M_1)_0$. Plus précisément, on constate , en considérant l'orthogonal de X_ε pour la forme q, que :

$G(0)_0(X_1)$ s'identifie au sous-groupe de $\widetilde{SO_+(3,2)}$ des automorphismes de $\mathbb{R}^4$, laissant invariante la forme quadratique:

$$q_1(x_1, x_2, x_4, x_5) = x_1^2 + x_2^2 - x_4^2 - x_5^2$$

D'où: $G(0)_0(X_1) = \widetilde{SO_+(2,2)}$.

$G(0)_0(X_{-1})$ s'identifie au sous-groupe de $\widetilde{SO_+(3,2)}$ des automorphismes de $\mathbb{R}^4$, laissant invariante la forme quadratique:

$$q_{-1}(x_1, x_2, x_3, x_5) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_5^2$$

D'où: $G(0)_0(X_{-1}) = \widetilde{SO_0(3,1)}$. On en déduit bien le résultat annoncé.

2) On constate que :

$$\Gamma_{w^2} \cap G(X_1)_0 = \{1, w^4\}, \quad \Gamma_{w^2} \cap G(X_{-1})_0 = \{1\}$$

Il s'en suit que le stabilisateur $G(X_1)$ possède deux composantes connexes, tandis que $G(X_{-1})$ en possède quatre.

Soit $\mathfrak{r}_\varepsilon = sl_2(\eta_3) \oplus < X_{i,\varepsilon},\ 1 \leq i \leq 3 >, (R_\varepsilon)_0$ le sous-groupe analytique de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_\varepsilon$, et $R_\varepsilon = \Gamma_{w^2}.(R_\varepsilon)_0$ un facteur réductif de $G(X_\varepsilon)$. Pour déterminer l'extension métaplectique $R_\varepsilon^{\mathfrak{g}}$, on vérifie que l'on peut identifier $\mathfrak{n}_1$ à un sous-espace lagrangien L de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(X_\varepsilon)$. On constate, ensuite, que $\forall x \in R_\varepsilon,\ x.L = L$. On choisit une orientation $\widetilde{L}$ sur L et on pose: $t(x)^2 = \varepsilon(\widetilde{L}, x.\widetilde{L})$, où $\varepsilon(\widetilde{L}, \widetilde{L'})$ désigne l'orientation relative des Lagrangiens orientés $\widetilde{L}$ et $\widetilde{L'}$. Suivant les définitions de [LI-VE], On en déduit que:

$$R_\varepsilon^{\mathfrak{g}} = \{(x, t(x)), x \in R_\varepsilon\}$$

On vérifie, successivement, que:

1) Γ_{w^2} s'identifie à un sous-groupe, noté $\widetilde{\Gamma_{w^2}}$, de $R_\varepsilon^{\mathfrak{g}}$, l'image de w^2 dans $\widetilde{\Gamma_{w^2}}$ étant $(w^2, -i)$.

2) Pour tout x de $(R_\varepsilon)_0, t(x)^2 = 1$.

3) $((R_\varepsilon)_0)^{\mathfrak{g}}$ possède exactement deux composantes connexes et $x \longrightarrow (x, 1)$ définit bien un morphisme injectif de groupes, identifiant $(R_\varepsilon)_0$ à la composante neutre de $((R_\varepsilon)_0)^{\mathfrak{g}}$.

4) On a l'isomorphisme de groupes suivant :

$$R_\varepsilon^{\mathfrak{g}} \simeq \widetilde{\Gamma_{w^2}}.((R_\varepsilon)_0)^{\mathfrak{g}}$$

avec :

$$\widetilde{\Gamma_{w^2}} \cap ((R_1)_0)^{\mathfrak{g}} = \{(1,1); (w^4, -1)\},\ \widetilde{\Gamma_{w^2}} \cap ((R_{-1})_0)^{\mathfrak{g}} = \{(1,1)\}$$

Soit χ le caractère de $((R_\varepsilon)_0)^{\mathfrak{g}}$ défini par : $\chi(x, t(x)) = 1, \forall x \in (R_\varepsilon)_0,\ \chi(1, -1) = -1$.

Soit $\tau_{s,\varepsilon}$ le caractère de $\widetilde{\Gamma_{w^2}}$ défini par:

$$\tau_{s,\varepsilon}(w^2, -i) = \exp -i\pi \frac{s(3+\varepsilon) + (1+\varepsilon)}{4}, s \in \mathbb{N}, 0 \leq s \leq 3$$

On en déduit que $X(f_\varepsilon) = \{\tau_{s,\varepsilon} \otimes \chi, 0 \leq s \leq 3\}$, d'où le résultat.

2.2 Les P_i-orbites associées à O_ε. Soit $f_{i,\varepsilon}$ la restriction de f_ε à $\mathfrak{p}_i$ et $r_i : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{p}_i^*$ l'application restriction.

Proposition 2.2 :

1) Pour $1 \leq i \leq 3$, la P_i-orbite $P_i.X_\varepsilon$ est l'unique P_i-orbite ouverte, dense, contenue dans O_ε.

2) L'application r_i induit un difféomorphisme de $P_i.X_\varepsilon$ sur $P_i.f_{i,\varepsilon}$.

3) Chaque P_i-orbite $P_i.f_{i,\varepsilon}$ est P_i-admissible.

4) la forme $f_{1,\varepsilon}$ est de type unipotent, par contre, la forme $f_{i,\varepsilon}, i = 2, 3$ n'est pas de type unipotent.

Preuve:

1) Il suffit de montrer que O_ε contient une et une seule B-orbite ouverte dense. Or, on peut écrire:

$$B.X_\varepsilon = N_1 A_1 \Gamma_{w^2}(B \cap (M_1)_0).X_\varepsilon \ \subset N_1 A_1 \Gamma_{w^2}(M_1)_0.X_\varepsilon$$

sachant que $N_1.G(0).N_1^-$ est un ouvert dense de G et que $N_1^- \subset G(X_\varepsilon)$, on en déduit que le nombre de B-orbites ouvertes dans $G.X_\varepsilon$ est égal au nombre de $(B\cap(M_1)_0)$-orbites ouvertes dans $(M_1)_0.X_\varepsilon$, ou encore au nombre de $(B \cap (M_1)_0)$-orbites ouvertes de l'espace symétrique $(M_1)_0/(M_1)_0(X_\varepsilon)$.

On utilise, pour calculer ce nombre, les résultats de T.Matsuki ([MA], Proposition 1).

Soit $\mathfrak{h}_{11} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}_1, \mathfrak{h}_{11}^\varepsilon = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}_1(X_\varepsilon), K_1^\varepsilon = K \cap (M_1)_0(X_\varepsilon)$. Posons:

$$W(\mathfrak{h}_{11}) = \{w \in W / w(\mathfrak{h}_{11}^\varepsilon) = \mathfrak{h}_{11}^\varepsilon\}, W(K_1^\varepsilon) = N_{K_1^\varepsilon}(\mathfrak{h}_{11})/Z_{K_1^\varepsilon}(\mathfrak{h}_{11})$$

On a:

$$\natural((B \cap (M_1)_0) \setminus (M_1)_0/(M_1)_0(X_\varepsilon)) = \frac{|W(\mathfrak{h}_{11})|}{|W(K_1^\varepsilon|)}$$

Le calcul effectué dans notre situation montre que ce cardinal est 1.

2) Désignons par b_ε la restriction de f_ε à $\mathfrak{b}$, par $r_b : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{b}^*$ la projection canonique, et montrons que r_b induit un difféomorphisme de $B.f_\varepsilon$ sur $B.b_\varepsilon$, ce qui revient à démontrer l'égalité des stabilisateurs.

L'inclusion $B(X_\varepsilon) \subset B(b_\varepsilon)$ est triviale. Il est donc clair que : $B \cap G(0)(X_\varepsilon) \subset B(X_\varepsilon) \subset B(b_\varepsilon)$.

D'autre part, soit b_{ε,n_1} la restriction de f_ε à $\mathfrak{n}_1$. On a: $B(b_\varepsilon) \subset B(b_{\varepsilon,n_1}) = B \cap G(0)(X_\varepsilon).N_1$. D'où:

$$B \cap G(0)(X_\varepsilon) \subset B(b_\varepsilon) \subset B \cap G(0)(X_\varepsilon).N_1$$

Ainsi, on a: $B(b_\varepsilon) = B \cap G(0)(X_\varepsilon).N_1(b_\varepsilon)$. Comme $N_1(b_\varepsilon) = \{1\}$, on en déduit l'égalité:

$$B(X_\varepsilon) = B(b_\varepsilon)$$

De ce qui précède, on déduit que l'application restriction r_i induit un difféomorphisme de $B.X_\varepsilon$ sur $B.f_{i,\varepsilon}$. Ces deux B-orbites sont, respectivement, ouvertes, denses, dans $P_i.X_\varepsilon$ et $P_i.f_{i,\varepsilon}$, ce qui induit le difféomorphisme annoncé entre les P_i-orbites.

3) On constate l'existence d'un isomorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(X_\varepsilon)$ sur $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_i(X_\varepsilon)$ qui permet d'identifier les deux structures symplectiques correspondantes. On peut, donc, considérer $P_i(X_\varepsilon)^{\mathfrak{p}_i}$ comme un sous-groupe de $G(X_\varepsilon)^{\mathfrak{g}}$. Il s'en suit que la restriction d'un paramètre d'admissibilité de O_ε à $P_i(X_\varepsilon)^{\mathfrak{p}_i}$ est un paramètre d'admissibilité de $P_i.X_\varepsilon$.

4) Il suffit, pour la forme $f_{1,\varepsilon}$, de considérer la sous-algèbre $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{p}_1(f_{1,\varepsilon}) \oplus \mathfrak{n}_1$ et de constater que celle-ci est de type fortement unipotent relativement à $f_{1,\varepsilon}$ pour conclure.

Soit $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{n}_2$. On vérifie, facilement, que cette algèbre est coisotrope relativement à $f_{2,\varepsilon}$ et qu'elle satisfait à la condition de Pukansky. Selon la terminologie de Duflo, [DU], $\mathfrak{b}_2$ est donc *de type unipotent*. Or, elle n'est pas de type fortement unipotent car $\mathfrak{b}_2 \neq \mathfrak{p}_2(f_{2,\varepsilon}) + {}^u\mathfrak{b}_2$. En utilisant le lemme 22, ch.1 de [DU], on en déduit que $f_{2,\varepsilon}$ n'est pas de type unipotent.

On raisonne de la même façon pour $f_{3,\varepsilon}$ en considérant, cette fois, la sous-algèbre

$$\mathfrak{b}_3 = sl_2(\eta_1 - \eta_2) \oplus < H_{\eta_3} > \oplus < X_{\eta_3-\eta_1}, X_{\eta_3-\eta_2} > \oplus \mathfrak{n}_3$$

3. UNE FAMILLE DE REPRESENTATIONS UNIPOTENTES ASSOCIEE A $O_{10,\mathbb{C}}$.

La méthode de construction, décrite dans le paragraphe 1, va nous permettre, dans un premier temps, de faire correspondre, à un triplet $(O_\varepsilon, \tau_i, P_i), 1 \leq i \leq 3, \tau_i \in Y(f_{i,\varepsilon})$, une famille $\pi_{\varepsilon,\tau,i}$ de P_i-représentations unitaires irréductibles.

3.1 Considérons, tout d'abord, le cas du parabolique P_1. Soit $B_{1,\varepsilon} = R_\varepsilon.N_1$. La formule **(1)**, appliquée à cette situation, permet de définir un caractère $\rho_{s,\varepsilon}$ de $B_{1,\varepsilon}$ de la manière suivante:

$$\forall x \in R_\varepsilon, (x, t(x)) \in (R_\varepsilon)^{\mathfrak{g}},\ \forall Y \in \mathfrak{n}_1, \rho_{s,\varepsilon}(x \exp Y) = \tau_{s,\varepsilon}(x)t(x)e^{-2i\pi f_{1,\varepsilon}(Y)}$$

Posons, dans ces conditions :

$$\pi^1_{\varepsilon,s} = \mathrm{Ind}_{B_{1,\varepsilon}}^{P_1} \rho_{s,\varepsilon}$$

Cette représentation est une P_1-représentation de type Duflo, associée au couple $(f_{1,\varepsilon}, \tau_{s,\varepsilon})$.

3.2 Puisque la P_2-orbite dense n'est pas de type unipotent, on ne peut pas, à priori, lui associer de P_2-représentation "de type Duflo" selon la méthode de construction du paragraphe 1. Cependant, on peut utiliser la paramétrisation de la représentation coadjointe décrite dans ce même paragraphe .

Soit f_2 l'élément de $\mathfrak{p}_2^*$ associé, via la forme de Killing, à $X_{-\eta_1-\eta_2}$. f_2 est de type unipotent, la P_2-orbite correspondante étant en fait la P_2-orbite dense de l'orbite minimale. On note $RSL_2(\mathbb{R})$ le revêtement à deux feuillets de $SL_2(\mathbb{R})$ et on rappelle, à ce sujet (voir [SA], 3.3), que $R_2 = SL_2(\eta_3) \times RSL_2(\eta_1 - \eta_2)$ est un facteur réductif du stabilisateur $P_2(f_2)$ et que $R_2^{\mathfrak{p}_2} = SL_2(\eta_3) \times (RSL_2(\eta_1 - \eta_2))^{\mathfrak{p}_2}$. Soit $\lambda_{2,\varepsilon}$ la restriction de $f_{2,\varepsilon}$ à R_2. Suivant la terminologie du paragraphe 1, on obtient:

$$P_2.f_{2,\varepsilon} = O_{f_2,\lambda_{2,\varepsilon}}$$

Compte-tenu de cette situation, on va construire des P_2-représentations "de type Duflo" associées au couple (f_2, τ), $\tau \in Y(f_2)$ étant, d'une certaine manière, lié au paramètre $\lambda_{2,\varepsilon}$ de l'orbite.

L'extension $(RSL_2(\eta_1 - \eta_2))^{\mathfrak{p}_2}$ a été décrite explicitement dans [SA], 3.2, en tant que sous-groupe de $(RSL_2(\eta_1 - \eta_2))^{\mathfrak{g}}$ ([SA], proposition 2.3.1). On peut dire, en particulier, que :

. Un élément de $(RSL_2(\eta_1 - \eta_2))^{\mathfrak{p}_2}$ s'écrit sous la forme $(x, t(x)), x \in RSL_2(\eta_1 - \eta_2), t(x)$ racine quatrième de l'unité telle que:

$$t(w^2) = -i \qquad (\mathbf{2})$$

. On peut identifier $RSL_2(\eta_1 - \eta_2)$ à un sous-groupe de $RSL_2(\eta_1 - \eta_2)^{\mathfrak{p}_2}$.

Un élément quelconque de $Y(f_2)$ est de la forme $\eta \otimes \tau$ où $\eta \in \widehat{SL_2(\eta_3)}$ et τ est une représentation unitaire irréductible de $(RSL_2(\eta_1 - \eta_2))^{\mathfrak{p}_2}$ telle que $\tau(\varepsilon) = -Id$. A l'aide des rappels précédents, on constate que τ est alors entièrement déterminé par sa restriction τ_r à $RSL_2(\eta_1 - \eta_2)$. Considérons, dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{Z} = \{\tau \otimes 1/\tau_r \in \widehat{RSL_2(\eta_1 - \eta_2)}\}$. On peut, entre autres, motiver ce choix par le fait que la restriction du paramètre $\lambda_{2,\varepsilon}$ à $SL_2(\eta_3)$ est triviale. $\mathcal{Z}$ est inclus dans $Y(f_2)$, on peut donc utiliser la formule **(1)** et on définit, ainsi, la représentation :

$$\pi^2_\tau = \mathrm{Ind}_{B_2}^{P_2} \tau \otimes S_2.T_2, \tau \in \mathcal{Z}$$

où:

. $B_2 = M_2.N_2$

. μ_2 est la restriction de f_2 à $\mathfrak{n}_2$.

$\mathfrak{l}_2 =< X_{\eta_1}, X_{\eta_1 \pm \eta_3}, X_{\eta_1+\eta_2} >, L_2 = \exp \mathfrak{l}_2, t_2 = e^{-2i\pi\mu_2}$.

. $T_2 = \mathrm{Ind}_{L_2}^{N_2} t_2$ est la N_2-représentation de Kirillov associée à μ_2.

. S_2 est la représentation métaplectique de l'extension $R_2^{\mathfrak{p}_2}$ dans l'espace de T_2.

3.3 On procède de la même façon pour le parabolique P_3. On note f_3 l'élément de $\mathfrak{p}_3^*$ associée à $X_{-\eta_1-\eta_2}$ par la forme de Killing. Soit $R_3 = \Gamma_{\sigma^2}.\exp \mathbb{R}H_{\eta_3}.RSL_2(\eta_1-\eta_2)$ un facteur réductif de $P_3(f_3)$ et $\lambda_{3,\varepsilon}$ la restriction de $f_{3,\varepsilon}$ à R_3. On montre, dans ce cas, que:

$$P_3.f_{3,\varepsilon} = O_{f_3,\lambda_{3,\varepsilon}}$$

On peut, comme précédemment, identifier $\mathcal{Z}$ à un sous-ensemble de $Y(f_3)$ et on définit la représentation:

$$\pi_\tau^3 = \mathrm{Ind}_{B_3}^{P_3}\, \tau \otimes S_3.T_3, \tau \in \mathcal{Z}$$

où:

. $B_3 = R_3.\exp \mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_3 = \mathfrak{n}_3 \oplus < X_{\eta_3-\eta_1}, X_{\eta_3-\eta_2} >$.

. μ_3 est la restriction de f_3 à $\mathfrak{u}_3$.

. T_3 est la U_3-représentation de Kirillov associée à μ_3.

. S_3 est la représentation métaplectique de l'extension $R_3^{\mathfrak{p}_3}$ dans l'espace de T_3.

3.4 La construction d'une famille de G-représentations unitaires irréductibles à partir des P_i-représentations définies précédemment repose sur le théorème suivant, dont la démonstration est en tout point conforme à celle du théorème 2.4.2 de [SA] :

Théorème 3.1 : *Soit G un groupe simple réel déployé, connexe et simplement connexe, de rang n supérieur ou égal à 3. Soit B un sous-groupe de Borel de G, soit P_i la famille des sous-groupes maximaux standards de G, Soit π_i une représentation unitaire irréductible de P_i. On suppose que :*

1) Pour tout i, la restriction de π_i à B est irréductible.

2) Pour tous i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$ les restrictions de π_i et π_j à $P_i \cap P_j$ sont équivalentes.

Alors, il existe une représentation unitaire irréductible π de G, et une seule, à équivalence près, telle que:

$$\pi_{|P_i} = \pi_i, \forall i$$

Tout revient, donc, à étudier dans quelle mesure les P_i-représentations précédentes satisfont aux deux conditions du théorème 3.1.

3.5 Nous noterons, dorénavant, $C_0 = RSL_2(\eta_1-\eta_2)$, $B_0 = \Gamma_{w^2}.A_0N_0$, $S_0 = A_0.N_0$. Pour répondre à la question posée, nous avons besoin de précisions sur le dual unitaire de $RSL_2(\mathbb{R})$. Ce dual, selon des résultats bien connus à lire, par exemple, dans [BA], se décompose, en dehors de la représentation triviale, en trois catégories:

. La série principale.

. La série complémentaire.

. La série discrète et les limites de la série discrète, $D_{\pm n}$, $n \in \dfrac{\mathbb{N}^*}{2}$.

Intéressons-nous, en particulier, à la série discrète et aux limites de la série discrète. L'ensemble des représentations correspondantes est paramétré par l'ensemble des demi-entiers $\frac{\mathbb{Z}^*}{2}$. Il nous faut préciser les espaces de réalisation utilisés dans chaque cas.

• Supposons, tout d'abord, $n \in \frac{\mathbb{N}^*}{2}, n > 1$. Soit le demi-plan de Poincaré $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}/Im(z) > 0\}$.

Posons:

$$\Theta_n = \{f, \text{ analytique sur } \mathcal{P}, \text{ telle que } \frac{\Gamma(n-1)}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathcal{P}} |f(z)|^2 y^{n-2} dxdy < +\infty\}$$

Θ_n est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par :

$$\forall f, g \in \Theta_n, \ < f, g >= \frac{\Gamma(n-1)}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathcal{P}} f(z)\overline{g(z)} y^{n-2} dxdy$$

D'autre part, on rappelle que le groupe C_0 peut se réaliser de la manière suivante:

$$C_0 = \{(g, \phi), g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \phi \text{ holomorphe sur } \mathcal{P} \text{ telle que } \phi(z)^2 = cz + d\}$$

On fait agir C_0 sur Θ_n par la formule:

$$\forall (g, \phi) \in C_0, \forall f \in \Theta_n, \mathcal{D}_n(g, \phi).f(z) = (a - cz)^{-n} f(\frac{dz - b}{a - cz})$$

Les $D_n, n > 1$, forment la série discrète holomorphe de C_0.

Soit $\Theta_{-n} = \{f/\overline{f} \in \Theta_n\}$. C_0 agit sur Θ_{-n} par :

$$\forall (g, \phi) \in C_0, \forall f \in \Theta_{-n}, \mathcal{D}_n^-(g, \phi).f(z) = (a - c\overline{z})^{-n} f(\frac{dz - b}{a - cz})$$

Les $D_{-n}, n > 1$ forment la série discrète anti-holomorphe de C_0.

• Considérons, maintenant, le cas $n = 1$. Posons:

$$\Theta_1 = \{f, \text{ analytique sur } \mathcal{P}, \text{ telle que } \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_{\mathcal{P}} |f(z)|^2 y^{-1-\varepsilon} dxdy < +\infty\}$$

$$\Theta_{-1} = \{f/\overline{f} \in \Theta_1\}$$

Ces espaces sont des espaces de Hilbert, leurs produits scalaires respectifs se déduisant, comme précédemment, de la définition de Θ_1. Le groupe C_0 agit sur ces espaces selon les mêmes formules que celles qui définissent $D_{\pm n}, n > 1$. On note D_1 et D_{-1} les représentations correspondantes.

• Restent les cas $n = \pm\frac{1}{2}$. La représentation $D_{\frac{1}{2}}$ est la composante paire de la représentation métaplectique, dont un espace de réalisation est $L^2(\mathbb{R}^{+*})$. On pose : $\Theta_{\frac{1}{2}} = \Theta_{-\frac{1}{2}} = L^2(\mathbb{R}^{+*})$. On rappelle les formules qui décrivent $D_{\frac{\varepsilon}{2}}$:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{+*}), \forall u \in \mathbb{R}, D_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{\eta_1 - \eta_2}(u)).f(t) = e^{-i\pi\varepsilon u t^2} f(t)$$

$$D_{\frac{\varepsilon}{2}}(h_{\eta_1 - \eta_2}(e^u)).f(t) = e^{\frac{u}{2}} f(te^u)$$

$$D_{\frac{\varepsilon}{2}}(w).f(t) = e^{\frac{-i\pi\varepsilon}{4}} \int e^{-2i\pi\varepsilon xt} f(x) dx$$

Les $D_n, \ n \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ sont les limites de la série discrète de C_0.

3.6. Soit $n \in \frac{\mathbb{N}^*}{2}, n \geq 1$. Considérons les espaces suivants:

$$L_n^2(\mathbb{R}^{+*}) = L^2(\mathbb{R}^{+*}, (2t)^{n-1} dt)$$

On définit les opérateurs:

$$\forall f \in L^2_n(\mathbb{R}^{+*}), \forall z \in \mathcal{P}, \psi_n(f)(z) = \int_{\mathbb{R}^{+*}} e^{2i\pi zt} f(t)(2t)^{n-1} dt$$

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{+*}), \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \psi'_n(f)(t) = (2t)^{\frac{1-2n}{4}} f(\sqrt{2t})$$

On vérifie que ψ_n est une isométrie de $L^2_n(\mathbb{R}^{+*})$ sur Θ_n, que ψ'_n est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^{+*})$ sur $L^2_n(\mathbb{R}^{+*})$.

En conséquence, posons:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{n,1}(f)(z) &= \psi_n \circ \psi'_n(f)(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{+*}} e^{i\pi z t^2} t^{n-\frac{1}{2}} f(t) dt, \ n \geq 1 \\
\mathcal{I}_{n,-1}(f)(z) &= \overline{I_{n,1}(\overline{f})(z)} \ n \geq 1 \\
\mathcal{I}_{\frac{1}{2},\varepsilon} &= Id
\end{aligned}$$

En utilisant, notamment, [FA-KO], théorème 13.1.1, on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.3 : *Pour tout $n \in \frac{\mathbb{N}^*}{2}$, $\mathcal{I}_{n,\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$, est un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}^{+*})$ sur $\Theta_{\varepsilon n}$.*

Faisons agir le sous-groupe de Borel B_0 sur $L^2(\mathbb{R}^{+*})$, selon les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
S_{\varepsilon,s}(x_{\eta_1-\eta_2}(u)).f(t) &= e^{-i\varepsilon\pi u t^2} f(t) \\
S_{\varepsilon,s}(h_{\eta_1-\eta_2}(e^u)).f(t) &= e^{\frac{u}{2}} f(te^u) \\
S_{\varepsilon,s}(w^2).f(t) &= \tau_{s,\varepsilon}(w^2) f(t)
\end{aligned}$$

Lemme 3.4. : *Soit $n \in \frac{\mathbb{N}^*}{2}$. L'opérateur $\mathcal{I}_{n,\varepsilon}$ entrelace $S_{\varepsilon,s}$ et la restriction de $D_{\varepsilon n}$ à B_0 si et seulement si:*

$$n \equiv \frac{s(3+\varepsilon) + (1+\varepsilon)}{4} \ \mathrm{mod}(2)$$

On notera, dorénavant:

$$\forall s, 0 \leq s \leq 3, \mathcal{D}_{\varepsilon,s} = \{D_{\varepsilon n}, n \in \frac{\mathbb{N}^*}{2}, \ n \equiv \frac{s(3+\varepsilon) + (1+\varepsilon)}{4} \ \mathrm{mod}(2)\}$$

3.7 Considérons, maintenant, les représentations $\pi^1_{\varepsilon,s}$ et π^2_τ et étudions leur restriction à $P_1 \cap P_2$. Pour cela, posons :

$R = R_\varepsilon \cap P_2 = \Gamma_{w^2}.SL_2(\eta_3)$.

$B_{12} = B_{1,\varepsilon} \cap P_2 = R.N_1$. $B'_{12} = B_2 \cap P_1 = R.\exp \mathbb{R}H_{\eta_1-\eta_2}.N_{12}$,

où $N_{12} = \exp \mathfrak{n}_{12}$ et $\mathfrak{n}_{12} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$.

• L'orbite $B.X_\varepsilon$ est ouverte et dense dans $G.X_\varepsilon$, il en est donc de même dans $P_1.X_\varepsilon$. Il s'en suit que $R_\varepsilon.B$ est un ouvert de Zariski de P_1. Comme $B_{1,\varepsilon}$ contient R_ε, l'ensemble $B_{1,\varepsilon}.P_1 \cap P_2$

contient donc un ouvert de P_1 dont le complémentaire, dans P_1, est une sous-variété de codimension supérieure ou égale à 1. De ceci, on peut déduire que :

$$\pi^1_{\varepsilon,s|P_1\cap P_2} = \mathrm{Ind}_{B_{12}}^{P_1\cap P_2}(\rho_{\varepsilon,s|B_{12}})$$

En utilisant le procédé d'induction par étages, on en déduit l'équivalence :

$$\pi^1_{\varepsilon,s|P_1\cap P_2} \simeq \mathrm{Ind}_{B'_{12}}^{P_1\cap P_2}(\mathrm{Ind}_{B_{12}}^{B'_{12}}(\rho_{\varepsilon,s|B_{12}}))$$

• De manière tout à fait analogue, on montre que:

$$\pi^2_{\tau|P_1\cap P_2} = \mathrm{Ind}_{B'_{12}}^{P_1\cap P_2}(\tau\otimes S_2.T_2)_{|B'_{12}}$$

• Tout revient à établir l'équivalence entre les deux représentations $\mathrm{Ind}_{B_{12}}^{B'_{12}}(\rho_{\varepsilon,s|B_{12}})$ et $(\tau\otimes S_2.T_2)_{|B'_{12}}$. Pour cela, posons : $B"_{12} = R.\exp\mathbb{R}H_{\eta_1-\eta_2}.N_1$, puis $\xi_{\varepsilon,s} = \mathrm{Ind}_{B_{12}}^{B"_{12}}\rho_{\varepsilon,s}$. La représentation $\xi_{\varepsilon,s}$ admet une réalisation dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^{+*})$ selon le modèle suivant:

Soit $\mathcal{H}_{\varepsilon,s}$ l'espace de $\xi_{\varepsilon,s}$ en tant que représentation induite et soit $\varphi : \mathcal{H}_{\varepsilon,s} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{+*})$, défini par :

$$\varphi(f)(t) = t^{-\frac{1}{2}}f(j(t)),\ \text{avec}\ j(t) = \exp(-\ln t.H_{\eta_1-\eta_2})$$

On vérifie, sans difficulté, que φ est un opérateur unitaire d'inverse donné par :

$$\forall f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^*), \varphi^{-1}(f)(j(t)x) = \rho_{\varepsilon,s}(x)^{-1}.t^{\frac{1}{2}}.f(t), \forall x\in B_{12}$$

Les formules de la représentation sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\xi_{\varepsilon,s}(h_{\eta_1-\eta_2}(e^u)).f(t) &= e^{\frac{u}{2}}f(te^u)\\
\xi_{\varepsilon,s}(x_{\eta_1-\eta_2}(u)).f(t) &= e^{-i\pi\varepsilon ut^2}f(t)\\
\xi_{\varepsilon,s}(w^2).f(t) &= \tau_{s,\varepsilon}(w^2)t(w^2)f(t)\\
\xi_{\varepsilon,s}(x).f(t) &= f(t), \forall x\in SL_2(\eta_3)\\
\xi_{\varepsilon,s}(x_{\eta_1+\eta_2}(u)).f(t) &= e^{-i\pi u}f(t)\\
\xi_{\varepsilon,s}(x_\alpha(u)).f(t) &= f(t), \alpha = \eta_1, \eta_1\pm\eta_3
\end{aligned}$$

Le groupe $B"_{12}$ peut se décomposer de la manière suivante : $B"_{12} = (R\times S_0).L_2$.

Soit $t_\varepsilon(\exp Y) = e^{-2i\pi f_{1,\varepsilon}(Y)}$ le caractère de L_2. Les formules précédentes permettent alors de montrer que :

$$\xi_{\varepsilon,s} \simeq t.S_{\varepsilon,s}\otimes t_\varepsilon$$

$$\mathrm{Ind}_{B_{12}}^{B'_{12}}\rho_{\varepsilon,s} \simeq \mathrm{Ind}_{B"_{12}}^{B'_{12}}(t.S_{\varepsilon,s}\otimes t_\varepsilon)$$

($t : x\longrightarrow t(x)$ est la fonction utilisée dans la définition des éléments des extensions métaplectiques correspondantes et on a pris soin de prolonger $t.S_{\varepsilon,s}$ à $R.S_0$ en posant $(t.S_{\varepsilon,s})(x) = t(x).Id, \forall x\in SL_2(\eta_3)$.)

On désignera par $V_{s,\varepsilon}$ l'espace de cette représentation.

Considérons, maintenant, la représentation $(\tau\otimes S_2.T_2)_{|B'_{12}}$ et faisons, dorénavant, l'hypothèse suivante:

$$(H_s) :\ \tau\in\mathcal{D}_{\varepsilon,s}.$$

Posons :

$$\mathcal{F} = \{f : N_2 \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{+*})/.f(nl) = t_\varepsilon(l)^{-1} f(n), \forall l \in L_2, \forall n \in N_2 \\ . \int_{N_2/L_2} ||f(n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{+*})} dn < +\infty\}$$

La représentation $(\tau \otimes S_2.T_2)_{|B'_{12}}$ se réalise dans $\mathcal{F}$ par :

$$(\tau \otimes S_2.T_2)(y).f(n) = f(y^{-1}n), \forall y, n \in N_2$$
$$(\tau \otimes S_2.T_2)(x).f(n) = S_{\varepsilon,s}(x).t(x).f(x^{-1}nx), \forall x \in R.S_0, \forall n \in N_2$$

Posons $\gamma = \mathrm{Ind}_{B''_{12}}^{B'_{12}}(t.S_{\varepsilon,s} \otimes t_\varepsilon), \gamma' = (\tau \otimes S_2.T_2)_{|B'_{12}}$. Soit, maintenant, $\theta : V_{s,\varepsilon} \longrightarrow \mathcal{F}$ défini par:

$$\theta(f)(n) = f(n), \forall n \in N_2$$

Montrons que θ entrelace γ et γ'. En effet, on peut écrire :

$$\forall y, n \in N_2, \theta(\gamma(y).f)(n) = f(y^{-1}n) = \gamma'(y)\theta(f)(n)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in R.S_0, \theta(\gamma(x).f)(n) &= f(x^{-1}n) \\ &= f(x^{-1}nxx^{-1}) \\ &= S_{\varepsilon,s}(x)t(x)f(x^{-1}nx) \\ &= \gamma'(x)\theta(f)(n) \end{aligned}$$

Ainsi, sous l'hypothèse (H_s), les restrictions de $\pi^1_{\varepsilon,s}$ et π^2_τ à $P_1 \cap P_2$ sont bien équivalentes.

On peut établir, suivant une méthode tout à fait analogue, les mêmes résultats pour les restrictions à $P_1 \cap P_3$ ou $P_2 \cap P_3$ des représentations concernées. On a, donc, le résultat suivant:

Proposition 3.5 : *Soit $s \in \{0,1,2,3\}$, soit $\tau \in \mathcal{D}_{\varepsilon,s}$. Alors, les restrictions de $\pi^1_{\varepsilon,s}, \pi^2_\tau$ et π^3_τ aux paraboliques $P_1 \cap P_2, P_1 \cap P_3$, ou $P_2 \cap P_3$ sont deux à deux équivalentes.*

Proposition 3.6 : *Soit $s \in \{0,1,2,3\}$, soit $\tau \in \mathcal{D}_{\varepsilon,s}$. Alors, la restriction à B de $\pi^1_{\varepsilon,s}, \pi^2_\tau$ ou π^3_τ est irréductible.*

Preuve : Il suffit de le vérifier pour $\pi^1_{\varepsilon,s}$. On constate que la forme b_ε est de type unipotent et on montre, facilement, que la restriction à B de $\pi^1_{\varepsilon,s}$ n'est autre qu'une B-représentation de type Duflo associée au couple $(\tau_{s|R\cap B}, b_\varepsilon)$. Elle est donc bien irréductible.

3.8 Compte-tenu des propositions 3.5, 3.6 et du théorème 3.1, on peut maintenant énoncer le théorème suivant:

Théorème 3.7 : *Soit $\varepsilon = \pm 1, s \in \{0,1,2,3\}$ et $\tau = D_{\varepsilon n} \in \mathcal{D}_{\varepsilon,s}$. Il existe une représentation unitaire irréductible de G, notée $\pi_{\varepsilon,n}$, unique à équivalence près, telle que :*

$$\pi_{\varepsilon,n|P_1} = \pi^1_{\varepsilon,s}$$
$$\pi_{\varepsilon,n|P_2} = \pi^2_\tau$$
$$\pi_{\varepsilon,n|P_3} = \pi^3_\tau$$

3.9 Il est important, pour la suite, de pouvoir décrire explicitement la représentation $\pi_{\varepsilon,n}$. On remarque, pour cela, que G est engendré par P_1 et w, si bien qu'il suffit de déterminer $\pi_{\varepsilon,n}(x), \forall x \in P_1$ et $\pi_{\varepsilon,n}(w)$.

• Soit $\mathfrak{s}_1 =< H_{\eta_1-\eta_2}, H_{\eta_1+\eta_2}, X_{\eta_2}, X_{\eta_2-\eta_3}, X_{\eta_2+\eta_3} >$ une sous-algèbre supplémentaire de $\mathfrak{b}_{1,\varepsilon}$ dans $\mathfrak{p}_1$, et S_1 le sous-groupe analytique de G correspondant. L'ensemble $S_1.B_{1,\varepsilon}$ est un ouvert de P_1. Posons, ensuite: $\forall (a,b,c,t,u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}$,

$$j_1(a,b,c,t,u) = w_{\eta_1-\eta_3}^{1-e(t)} h_{\eta_1+\eta_2}(t) x_{\eta_2-\eta_3}(a) x_{\eta_2+\eta_3}(b) x_{\eta_2}(c) h_{\eta_1-\eta_2}(\frac{1}{u}),\ \ e(t) = \frac{t}{|t|}$$

On constate que l'ensemble $j_1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}).B_{1,\varepsilon}$ est un ouvert de P_1 dont le complémentaire dans P_1 est une sous-variété de codimension supérieure ou égale à 1. Soit, alors, $J_1(f) = f \circ j_1$. Il s'en suit que J_1 est un opérateur unitaire de l'espace $\mathcal{H}_{\varepsilon,s,1}$ de $\pi^1_{\varepsilon,s}$ sur $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*})$, d'inverse défini par :

$$\forall f \in C_c^\infty, \forall x \in B_1, J_1^{-1}(f)(j_1(a,b,c,t,u)x) = \delta_1(x)^{\frac{1}{2}}.\rho_{s,\varepsilon}(x)^{-1}.f(a,b,c,t,u)$$

où δ_1 est la fonction module de P_1 relativement à $B_{1,\varepsilon}$.

On peut, donc, réaliser $\pi^1_{\varepsilon,s}$ dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*})$ et on obtient les formules suivantes, pour un système de générateurs de P_1.

Proposition 3.8 : *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}), (a,b,c,t,u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}, v \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\begin{aligned}
\pi_{\varepsilon,n}(x_{\eta_1-\eta_2}(v))f(a,b,c,t,u) &= e^{i\pi e(t)(c^2+ab-\varepsilon u^2)v} f(a,b,c,t,u)\\
\pi_{\varepsilon,n}(h_{\eta_1-\eta_2}(e^v))f(a,b,c,t,u) &= f(ae^v, be^v, ce^v, t, ue^v)\\
\pi_{\varepsilon,n}(x_{\eta_1+\eta_2}(v))f(a,b,c,t,u) &= e^{-i\pi e(t)\frac{v}{t^2}} f(a,b,c,t,u)\\
\pi_{\varepsilon,n}(x_{\eta_2-\eta_3}(v))f(a,b,c,t,u) &= f(a-\frac{v}{t}, b, c, t, u)\\
\pi_{\varepsilon,n}(x_{\eta_3}(v))f(a,b,c,t,u) &= f(a, b-v^2a-2vce(t), c+vae(t), t, u)\\
\pi_{\varepsilon,n}(x_{-\eta_3}(v))f(a,b,c,t,u) &= f(a-v^2b+2vce(t), b, c-vbe(t), t, u)\\
\pi_{\varepsilon,n}(x_{\eta_3-\eta_2}(v))f(a,b,c,t,u) &= \frac{\lambda_s(v,t,a)}{|1-vta|^{\frac{3}{4}}} f(\frac{a}{|1-vta|^{\frac{1}{2}}}, \frac{b-vt(c^2+ab)}{|1-vta|^{\frac{1}{2}}}, \alpha c, \alpha t, \alpha u)\\
avec\ \lambda_s(v,t,a) = e^{-is\frac{\pi}{2}\frac{1-e(1-vta)}{2}}.(-1)^{\frac{(2-e(t)+e(v))(1-e(1-vta))}{4}},\ \ \alpha &= \frac{e(1-vta)}{|1-vta|^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Les calculs qui permettent d'obtenir ces formules sont analogues à ce qui a été fait dans [SA], Prop. 3.5.2 et 3.5.3, nous ne les reproduirons pas ici.

• Réalisation de $\pi_{\varepsilon,n}(w)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*})$.

Soit $j_2(t) = j_1(0,0,0,t,1)$. L'ensemble $j_2(\mathbb{R}^*.B_2)$ est un ouvert de P_2 dont le complémentaire est une sous-variété de codimension supérieure ou égale à 1. L'opérateur $J"_2 : f \longrightarrow f \circ j_2$ est un opérateur unitaire de l'espace $\mathcal{H}_{\tau,2}$ de π^2_τ dans $L^2(\mathbb{R}^*, V_2)$, où V_2 est l'espace de la représentation T_2.

Soit $r_2 : f \longrightarrow r_2(f)(a,b,c) = f(j_1(a,b,c,1,1))$. r_2 est un opérateur de V_2 sur $L^2(\mathbb{R}^3, V_n)$, V_n étant l'espace de τ. Ainsi, on peut réaliser, par transport de structure, $\pi_{\tau,2}$ dans l'espace

$L^2(\mathbb{R}^*, L^2(\mathbb{R}^3, V_n))$, à l'aide de l'opérateur $J_2' : f \longrightarrow J_2(f)(t) = r_2(f \circ j_2(t))$, dont l'inverse est donnée par:

$$J_2^{'-1}(f)(j_2(t)x) = \delta_2(x)^{-1}(\tau \otimes S_2.T_2).r_2^{-1}(f(t)), \forall x \in B_2$$
$$r_2^{-1}(f)(j_1(a,b,c,1,1)l) = t_2(l)^{-1}.f(a,b,c), \forall l \in L_2$$

où δ_2 est la fonction module de P_2 relativement à B_2.

A l'aide des opérateurs $\mathcal{I}_{n,\varepsilon}$, on peut, donc, réaliser π_τ^2 dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^*, L^2(\mathbb{R}^3, L^2(\mathbb{R}^{+*})))$ en utilisant l'opérateur:

$$J_{2,n,\varepsilon}(f)(t)(a,b,c) = \mathcal{I}_{n,\varepsilon}(J_2'(f)(t)(a,b,c))$$

Soit, enfin, l'opérateur $\varphi : L^2(\mathbb{R}^*, L^2(\mathbb{R}^3, L^2(\mathbb{R}^{+*}))) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}+*)$ défini par :

$$\varphi(f)(a,b,c,t,u) = f(t)(a,b,c)(u)$$

Lemme 3.9 : *L'application canonique φ est un opérateur unitaire qui entrelace les restrictions de $\pi_{\varepsilon,s}^1$ et π_τ^2 à $P_1 \cap P_2$.*

La preuve de ce résultat est conséquence de la détermination explicite d'un opérateur d'entrelacement entre les représentations $\mathrm{Ind}_{B_{12}}^{B_{12}'} \rho_{\varepsilon,s}$ et $(\tau \otimes S_2.T_2)_{|B_{12}'}$. Pour cela, on suit le procédé décrit dans [SA], 3.5.1.

On obtient, finalement, une réalisation de π_τ^2 dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*})$, notée de la même façon, par la formule :

$$\forall x \in P_2, \pi_\tau^2(x) = \varphi \circ J_{2,n,\varepsilon} \circ \pi_{\tau,2}(x) \circ J_{2,n,\varepsilon}^{-1} \circ \varphi^{-1}$$

Proposition 3.10 : *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}), (a,b,c,t,u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}$. On a :*

$$\pi_{\varepsilon,n}(w).f(a,b,c,t,u) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}e(t)}}{2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\pi e(t)(\alpha b + \beta a + 2\gamma c)} (\tau_{\varepsilon,n}(w).f_*(\alpha,\beta,\gamma,t))(u) d\alpha d\beta d\gamma$$

avec :

$$\tau_{\varepsilon,n}(w) = \mathcal{I}_{n,\varepsilon}^{-1} \circ \tau(w) \circ \mathcal{I}_{n,\varepsilon}$$

$f_*(a,b,c,t)$ est l'élément de $L^2(\mathbb{R}^{+*})$ défini par :

$$f_*(a,b,c,t)(u) = f(a,b,c,t,u)$$

Pour établir cette formule, on utilise une méthode analogue à celle de [SA], paragraphe 3.5.3.

3.10 Il reste maintenant à établir que la représentation $\pi_{\varepsilon,n}$ répond bien au problème posé, à savoir qu'elle est associée à l'orbite $O_{10,\mathbb{C}}$.

Soit $E = L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}), E^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ de E, pour la représentation $\pi_{\varepsilon,n}$, $\pi_{\varepsilon,n}^\infty$ la représentation de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ dans E^∞, induite par $\pi_{\varepsilon,n}$, et soit $J_{\varepsilon,n}$ l'annulateur de $\pi_{\varepsilon,n}^\infty$ dans $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. On notera $V(J_{\varepsilon,n})$ la variété des zéros, dans $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, de l'idéal gradué associé dans l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, à l'idéal $J_{\varepsilon,n}$.

La représentation $\pi_{\varepsilon,n}$ sera dite associée à l'orbite nilpotente $O_{10,\mathbb{C}}$ si l'on a:

$$V(J_{\varepsilon,n}) = \overline{O_{10,\mathbb{C}}}$$

Rappelons, d'autre part, que, d'après un résultat obtenu indépendamment par A.Joseph [JO] et W.Borho-J.L.Brylinski [BB], tout idéal primitif de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ a pour variété des zéros la clôture de Zariski d'une et d'une seule orbite nilpotente. De ceci, on déduit que $\pi_{\varepsilon,n}$ est associé à une orbite nilpotente de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, soit $O_{\varepsilon,n}$.

Nous savons, de plus, que:

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\mathrm{J}_{\varepsilon,\mathrm{n}}) = \dim \mathrm{O}_{\varepsilon,\mathrm{n}}$$

(GKdim est la dimension de Gelfand-Kirillov.)

Soit $J_{1,\varepsilon,n} = J_{\varepsilon,n} \cap U(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}})$ l'idéal annulateur de la représentation $\pi^{1,\infty}_{\varepsilon,n}$. En utilisant [DU], théorème 4.16 et proposition 4.13, on a :

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{U}(\mathfrak{p}_{1\mathbb{C}})/\mathrm{J}_{1,\varepsilon,\mathrm{n}}) \geq 10$$

L'injection naturelle $U(\mathfrak{p}_{1\mathbb{C}}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ induit une injection de $U(\mathfrak{p}_{1\mathbb{C}})/J_{\varepsilon,n}$ dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/J_{1\varepsilon,n}$. D'où:

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\mathrm{J}_{\varepsilon,\mathrm{n}}) \geq 10 \qquad (\mathbf{3})$$

On va, en fait, montrer que cette inégalité est une égalité, ce qui, compte tenu de ce qui prècède, et du fait qu'il n'y a qu'une seule orbite de dimension 10 dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, aboutit au résultat souhaité.

Tout repose, maintenant, sur la proposition suivante, dont l'analogue dans le cas minimal est dû à P.Torasso ([TO], Prop.6.2). On rappelle que si X est une variété algébrique affine irréductible complexe lisse et $D(X)$ l'algèbre des opérateurs différentiels réguliers sur X, alors $D(X)$ est un domaine d'intégrité et on a : $\mathrm{GKdim}(\mathrm{D}(\mathrm{X})) = 2\dim \mathrm{X}$.

Proposition 3.11 : *Il existe un espace vectoriel complexe V de dimension 5, un ouvert affine U de V et un morphisme d'algèbres :*

$$D_{\varepsilon,n} : U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow D(U)$$

tel que $J_{\varepsilon,n} = \ker D_{\varepsilon,n}$.

Tout revient, en fait, à déterminer la représentation $\pi^{\infty}_{\varepsilon,n}$, ce qui revient à déterminer $\pi^{\infty}_{\varepsilon,n}(X)$ pour $X \in \mathfrak{p}_1$ et $\pi^{\infty}_{\varepsilon,n}(X_{\eta_2-\eta_1})$.

Soit E_1^{∞} l'espace des vecteurs C^{∞} pour la restriction de $\pi_{\varepsilon,n}$ à P_1 . Cette restriction est une représentation induite et on est dans la même situation que celle décrite dans [TO], paragraphe 6. On rappelle, à ce propos, les deux résultats suivants:

Lemme 3.12 ([TO], Lemme 6.10): *Soit G un groupe de Lie, ρ une représentation continue de G dans un espace de Banach E, Ω une variété C^{∞} et $\phi : \Omega \longrightarrow E$ une application à valeurs dans le sous-espace E^{∞} des vecteurs C^{∞} de E pour ρ, qui soit C^{∞} pour la topologie de E^{∞}. Alors l' application: $\Phi : \Omega \times G \longrightarrow E^{\infty}$ définie par : $\Phi(x,g) = \rho(g).\phi(x)$ est C^{∞}.*

Lemme 3.13 ([PO], Th.5.1) : *Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de lie $\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, H un sous-groupe fermé de G, π une représentation unitaire de H d'espace $\mathcal{H}$, $\rho = \mathrm{Ind}_H^G \pi$ la représentation induite d'espace $\mathcal{H}_\rho$ et $\mathcal{H}_\rho^{\infty}$ l'espace des vecteurs C^{∞} de $\mathcal{H}_\rho$.*

Alors, $\mathcal{H}_\rho^\infty$ est l'espace des fonctions $\varphi \in C^\infty(G,\mathcal{H})$ telles que, pour tout a de $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, $a.\varphi \in \mathcal{H}_\rho$. Si φ est dans $\mathcal{H}_\rho^\infty$, alors elle prend ses valeurs dans l'espace des vecteurs C^∞ de π. De plus, on a:

$$\forall a \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}), \rho(a)\varphi = a.\varphi$$

($a.\varphi$ désigne l'action usuelle de a sur φ en tant qu'opérateur différentiel agissant sur $C^\infty(G,\mathcal{H})$.)

De ceci, on déduit le résultat suivant, analogue à [TO], Lemme 6.12 :

Proposition 3.14 : *On a :*

$$E_1^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*})$$

Il existe un unique homorphisme d'algèbres :

$$D_{\varepsilon,n} : U(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}}) \longrightarrow D(\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{*2})$$

tel que :

$$\forall \varphi \in E_1^\infty, \forall a \in U(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}}), \pi_{\varepsilon,n}^\infty(a).\varphi = D_{\varepsilon,n}(a).\varphi$$

D'ailleurs, des calculs de dérivation simples donnent les formules suivantes pour un système de générateurs de $\mathfrak{p}_1$.

Proposition 3.15 : *Soit $f \in E_1^\infty, (a,b,c,t,u)$ le système de coordonnées canonique dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}$. On a:*

$$\begin{aligned}
\pi_{\varepsilon,n}^\infty(X_{\eta_1-\eta_2}).f &= i\pi e(t)(c^2+ab-\varepsilon u^2).f \\
\pi_{\varepsilon,n}^\infty(H_{\eta_1-\eta_2}).f &= a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c} + u\frac{\partial f}{\partial u} \\
\pi_{\varepsilon,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_3}).f &= -\frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial a} \\
\pi_{\varepsilon,n}^\infty(X_{\eta_3}).f &= ae(t)\frac{\partial f}{\partial c} - 2ce(t)\frac{\partial f}{\partial b} \\
\pi_{\varepsilon,n}^\infty(X_{-\eta_3}).f &= -be(t)\frac{\partial f}{\partial c} - 2ce(t)\frac{\partial f}{\partial a} \\
\pi_{\varepsilon,n}^\infty(X_{\eta_3-\eta_2}).f &= -c^2t\frac{\partial f}{\partial b} + \frac{at}{2}(\frac{3}{2}f + a\frac{\partial f}{\partial a} - b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c} + t\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial u})
\end{aligned}$$

Il reste à déterminer l'opérateur $\pi_{\varepsilon,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_1})$. On utilise, pour cela, la formule suivante :

$$\pi_{\varepsilon,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_1}) = -\pi_{\varepsilon,n}(w) \circ \pi_{\varepsilon,n}^\infty(X_{\eta_1-\eta_2}) \circ \pi_{\varepsilon,n}(w^{-1})$$

Soit E_2^∞ l'espace des vecteurs C^∞ pour la restriction de $\pi_{\varepsilon,n}$ à P_2. Cette restriction est une représentation induite. A l'aide des lemmes 3.12 et 3.13, on obtient :

$$E_2^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*, L^2(\mathbb{R}^{+*})^\infty)$$

où $L^2(\mathbb{R}^{+*})^\infty$ désigne l'espace des vecteurs C^∞ de $\tau_{\varepsilon,n}$.

D'après [RA], théorème 5., on a : $L^2(\mathbb{R}^{+*})^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ et, donc :

$$E_2^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*})$$

Maintenant, des calculs simples de dérivation sous le signe intégral donnent :

$$\forall f \in E_2^\infty, \frac{\partial^2}{\partial c^2}(\pi_{\varepsilon,n}(w).f) = -4\pi^2\pi_{\varepsilon,n}(w)(c^2.f)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial b}(\pi_{\varepsilon,n}(w).f) = -\pi^2\pi_{\varepsilon,n}(w)(ab.f)$$

On adoptera, pour la suite, la notation suivante: $\mu_n(f)(u) = u^n.f(u), n \in \mathbb{Z}$, f étant une fonction quelconque. A l'aide des formules précédentes, on aboutit au résultat suivant :

$$\forall f \in E_2^\infty, (\pi_{\varepsilon,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_1}).f)_* = \frac{ie(t)}{4\pi}(\Delta f)_* + i\pi e(t)\varepsilon\mu_{2,n,\varepsilon}.f_*$$

avec,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial c^2} + 4\frac{\partial^2}{\partial a \partial b},\ \mu_{2,n,\varepsilon} = \tau_{\varepsilon,n}(w) \circ \mu_2 \circ \tau_{\varepsilon,n}(w^{-1})$$

Tout revient, finalement, à déterminer l'opérateur $\mu_{2,n,\varepsilon}$.

Considérons le cas $\varepsilon = 1$ et supposons, tout d'abord, $n \geq 1$.

Pour tout g de $L^2(\mathbb{R}^{+*})^\infty$, on a:

$$\mu_{2,n,1}(g) = \mathcal{I}_{n,1}^{-1} \circ \tau(w) \circ \mathcal{I}_{n,1} \circ \mu_2 \circ \mathcal{I}_{n,1}^{-1} \circ \tau(w^{-1}) \circ \mathcal{I}_{n,1}(g)$$

On suppose, tout d'abord, que g appartient à l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ à support compact. Soit δ l'opérateur suivant : $\delta(g)(u) = \frac{1}{u}g'(u)$. Les deux formules suivantes ont bien un sens et se vérifient facilement :

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{I}_{n,1}(g) = i\pi\mathcal{I}_{n,1} \circ \mu_2(g) \tag{4}$$

$$\forall \phi \in \Theta_{\varepsilon n},\ \tau(w)(\frac{\partial}{\partial z}\tau(w^{-1})\phi)(z) = nz\phi(z) + z^2\frac{\partial}{\partial z}\phi(z) \tag{5}$$

Ainsi, on a :

$$\mu_{2,n,1}(g) = \frac{1}{i\pi}\mathcal{I}_{n,1}^{-1} \circ \tau(w)(\frac{\partial}{\partial z}[(\tau(w^{-1}) \circ \mathcal{I}_{n,1}(g)]),\ \text{d'après } (4)$$
$$= \frac{n}{i\pi}(\mathcal{I}_{n,1}^{-1} \circ \mu_1)(\mathcal{I}_{n,1}(g)) + \frac{1}{i\pi}(\mathcal{I}_{n,1}^{-1} \circ \mu_2)(\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{I}_{n,1}(g))],\ \text{d'après } (5)$$

On a, par ailleurs, les formules suivantes :

$$\forall z \in \mathcal{P}, z.\mathcal{I}_{n,1}(g)(z) = \frac{i}{2\pi}((n-\frac{3}{2})\mathcal{I}_{n,1}(\mu_{-2}g) + \mathcal{I}_{n,1} \circ \delta(g)) \tag{6}$$

$$z^2.\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{I}_{n,1}(g)(z) = -\frac{i}{4\pi}((n-\frac{3}{2})^2\mathcal{I}_{n,1}(\mu_{-2}g) + (n-\frac{3}{2})(\mathcal{I}_{n,1} \circ \delta(g)) + (n-\frac{3}{2})(\mathcal{I}_{n,1} \circ \delta(g))$$

$$+(n-\frac{3}{2})[2\mathcal{I}_{n,1}(\mu_{-2}g)+\mathcal{I}_{n,1}\circ\delta(f)]+3\mathcal{I}_{n,1}\circ\delta(g)+\mathcal{I}_{n,1}(g") \qquad (7)$$

On en déduit, ainsi, que:

$$\mu_{2,n,1}(g)(u)=\frac{1}{4\pi^2}[(n-\frac{3}{2})(n-\frac{1}{2})\frac{g(u)}{u^2}-g"(u)] \qquad (8)$$

Comme, d'après [RA], théorème 5, l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ est un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R}^{+*})^\infty$, la formule (8) reste valable pour tout g de $L^2(\mathbb{R}^{+*})^\infty$. les calculs classiques sur la représentation métaplectique permettent de vérifier que cette formule reste vraie pour $n=\frac{1}{2}$. D'où:

$$\forall f\in E_2^\infty, \pi_{1,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_1})(f)=\frac{ie(t)}{4\pi}\Delta f+\frac{i}{\pi}e(t)(n-\frac{3}{2})(n-\frac{1}{2})(f)-\frac{i}{\pi}e(t)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \qquad (9)$$

Il est clair que l'on peut établir des formules totalement analogues pour l'opérateur $\pi_{-1,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_1})$.

Soit $U=\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^{*2}$. C'est un ouvert affine de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^5$. D'autre part, on sait que $E^\infty\subset E_1^\infty\cap E_2^\infty$. La proposition 3.14 et la formule **(9)** permettent de définir les opérateurs différentiels $D_{\varepsilon,n}(a), a\in U(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}})$ et $D_{\varepsilon,n}(X_{\eta_2-\eta_1})$, appartenant à $D(U)$ et tels que :

$$\forall\varphi\in E^\infty, \pi_{\varepsilon,n}^\infty(a).\varphi=D_{\varepsilon,n}(a).\varphi,\ \forall a\in U(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}})$$
$$\pi_{\varepsilon,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_1}).\varphi=D_{\varepsilon,n}(X_{\eta_2-\eta_1}).\varphi$$

On sait, par ailleurs, que l'action de $D(U)$ sur l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^{+*}$ est fidèle et continue. On en déduit, donc, l'existence d'un morphisme d'algèbres, $D_{\varepsilon,n}$, de $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ à valeurs dans l'algèbre $D(U)$ des opérateurs différentiels réguliers sur U et il est clair que ce morphisme a pour noyau l'annulateur $J_{\varepsilon,n}$, ce qui démontre la proposition 3.11.

Comme $GK\dim(D(U))=10$, on en déduit, donc, que : $GK\dim(U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})/J_{\varepsilon,n})\leq 10$, ce qui implique l'égalité, d'après **(3)**. D'où le résultat suivant:

Proposition 3.16 : *Soit $\varepsilon=\pm1, s\in\{0,1,2,3\}, D_{\varepsilon n}\in\mathcal{D}_{\varepsilon,s}$. La représentation $\pi_{\varepsilon,n}$ est associée à l'orbite $O_{10,\mathbb{C}}$.*

4. La restriction à G des représentations minimales de $\widetilde{SO(4,4)}$ et $\widetilde{SO(5,3)}$.

4.1. Soit $G_1=\widetilde{SO(4,4)}, \mathfrak{g}_1=so(4,4)$. Le plongement de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$ s'effectue de la manière suivante:

En reprenant les notations de **0.2.**, on considère la base usuelle $H_i, 1\leq i\leq 4$, d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_1$ de $\mathfrak{g}_1$ contenant $\mathfrak{h}$, le système de racines $\Delta_1=\{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j, 1\leq i<j\leq 4\}$. Le plongement de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}_1$ est donné, outre l'inclusion naturelle $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}_1$, par :

$$X_{\pm\eta_i\pm\eta_j}=X_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j},\ 1\leq i<j\leq 3$$
$$X_{\eta_i}=X_{\varepsilon_i+\varepsilon_4}+X_{\varepsilon_i-\varepsilon_4},\ 1\leq i\leq 3$$
$$X_{-\eta_i}=X_{\varepsilon_i+\varepsilon_4}+X_{\varepsilon_4-\varepsilon_i},\ 1\leq i\leq 3$$

4.2. Désignons par $O_{1,min}$ la G_1-orbite nilpotente minimale.

Proposition 4.1 : *La G_1-orbite $O_{1,min}$ contient une et une seule G-orbite ouverte, dense, de dimension* 10*, et cette G-orbite est un revêtement d'ordre* 2 *de O_1.*

Preuve: Posons: $Y_1 = X_1 + (X_{\varepsilon_4-\varepsilon_1} - X_{-\varepsilon_4-\varepsilon_1})$. On vérifie que Y_1 appartient à $O_{1,min}$.

On constate, tout d'abord, que $\mathfrak{g}(X_1) = \mathfrak{g}(Y_1)$ et, donc, que la G-orbite $G.Y_1$ est de dimension 10. Le fait que cette orbite soit dense dans $O_{1,min}$ se démontre de la même façon que dans la proposition 5.1.1 de [SA].

Le plongement de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}_1$ induit, par passage au dual et via la forme de Killing, une application G-équivariante et surjective j de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$ et on constate que $j(G.Y_1) = G.X_1 = O_1$. Par ailleurs, le calcul des stabilisateurs donne :

$$G(Y_1) =< w^4 > .G(Y_1)_0,\ G(X_1) =< w^2 > .G(X_1)_0$$

Comme $G(Y_1)_0 = G(X_1)_0$, le résultat s'en suit.

Venons-en à la projection de $O_{1,min}$ sur les paraboliques standards de G. Pour cela, nous désignerons par ξ_1 l'élément de $\mathfrak{g}_1^*$ associé à Y_1 par la forme de Killing. On constate que la restriction de ξ_1 à $\mathfrak{p}_j, 1 \leq j \leq 3$ est égale à $f_{j,1}$. En utilisant les mêmes techniques que celles introduites dans la démonstration de la proposition 2.2, on obtient le résultat suivant:

Proposition 4.2 : *Pour tout $j \in \{1,2,3\}$, la P_j-orbite $P_j.Y_1$ est l'unique P_j-orbite ouverte, dense, contenue dans $G.Y_1$ et cette P_j-orbite est un revêtement d'ordre* 2 *de $P_j.f_{j,1}$.*

4.3. Soit $\pi_{1,min}$ la représentation minimale de G_1. L'existence de cette représentation est assurée par les travaux de P.Torasso ([TO]). Sa construction, qui repose sur la restriction aux paraboliques standards, est identique à celle réalisée pour la représentation minimale de G dans ([SA]). Intéressons-nous à la restriction de $\pi_{1,min}$ aux paraboliques P_j.

La restriction à P_1. On a défini au paragraphe 2 les groupes $B_{1,\varepsilon}$. On vérifie, tout d'abord, que:

$$\pi_{1,min|P_1} \simeq \mathrm{Ind}_{(B_{1,1})_0}^{P_1} \rho_1$$

où ρ_1 est le caractère de $(B_{1,1})_0$, trivial sur son facteur réductif et égal à $e^{-2i\pi f_{1,1}}$ sur N_1. D'où:

$$\pi_{1,min|P_1} \simeq \mathrm{Ind}_{B_{1,1}}^{P_1}(\mathrm{Ind}_{(B_{1,1})_0}^{B_{1,1}} \rho_1)$$

On constate, enfin, l'équivalence: $\mathrm{Ind}_{(B_{1,1})_0}^{B_{1,1}} \rho_1 \simeq \rho_{1,0} \oplus \rho_{1,1}$. Ainsi, on a:

$$\pi_{1,min|P_1} \simeq \pi_{1,0}^1 \oplus \pi_{1,1}^1$$

La restriction à P_2. On procède, pour étudier cette restriction, comme dans ([SA]), paragraphe 5.2. On note, respectivement, S^+ et S^-, les composantes paires et impaires de la représentation métaplectique de $RSL_2(\mathbb{R})$ et on obtient:

$$\pi_{1,min|P_2} \simeq \mathrm{Ind}_{B_2}^{P_2} S^+ \otimes S_2.T_2 \ \oplus\ \mathrm{Ind}_{B_2}^{P_2} S^- \otimes S_2.T_2$$

On sait, par ailleurs, suivant la terminologie introduite dans le paragraphe 3, que $S^+ = D_{\frac{1}{2}}$ et $S^- = D_{\frac{3}{2}}$. Donc, on a:

$$\pi_{1,min|P_2} \simeq \pi_{D_{\frac{1}{2}}}^2 \oplus \pi_{D_{\frac{3}{2}}}^2$$

La restriction à P_3. On obtient pour les mêmes raisons:

$$\pi_{1,min|P_3} \simeq \pi^3_{D_{\frac{1}{2}}} \oplus \pi^3_{D_{\frac{3}{2}}}$$

La représentation $\pi_{1,min}$ se réalise dans l'espace $F = L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{*2})$ et on obtient, suivant la même méthode que celle décrite dans 3.9., des formules explicites. Soit $\pi_{1,\frac{1}{2}}$ et $\pi_{1,\frac{3}{2}}$ les deux représentations de G obtenues par amalgames respectifs de $(\pi^1_{1,0}, \pi^2_{D_{\frac{1}{2}}}, \pi^3_{D_{\frac{1}{2}}})$ et $(\pi^1_{1,1}, \pi^2_{D_{\frac{3}{2}}}, \pi^3_{D_{\frac{3}{2}}})$. Soit :

$$F_p = \{f \in F / f(a,b,c,t,-u) = f(a,b,c,t,u), \forall (a,b,c,t,u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{*2}\}$$

$$F_i = \{f \in F / f(a,b,c,t,-u) = -f(a,b,c,t,u), \forall (a,b,c,t,u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{*2}\}$$

On vérifie que F_p est stable par $\pi_{1,\frac{1}{2}}$ et que F_i est stable par $\pi_{1,\frac{3}{2}}$. On aboutit, alors, au résultat suivant:

Proposition 4.3. : *La restriction à G de la représentation minimale de $\widetilde{SO(4,4)}$ n'est pas irréductible. Elle se décompose en facteurs irréductibles dans la famille $(\pi_{\varepsilon,n})$ et on obtient:*

$$\pi_{1,min|G} = \pi_{1,\frac{1}{2}} \oplus \pi_{1,\frac{3}{2}}$$

4.4. Soit $G_2 = \widetilde{SO(5,3)}$. La restriction à G de la représentation minimale $\pi_{2,min}$ de G_2 s'étudie de manière tout à fait analogue; nous en passerons, donc, les détails. Désignons par $0_{2,min}$ la G_2-orbite nilpotente minimale.

Proposition 4.4 : *La G_2-orbite $0_{2,min}$ contient une et une seule G-orbite ouverte, dense, de dimension 10, et cette G-orbite est un revêtement d'ordre 2 de O_{-1}.*

Proposition 4.5. : *La restriction à G de la représentation minimale de $\widetilde{SO(5,3)}$ n'est pas irréductible. Elle se décompose en facteurs irréductibles dans la famille $(\pi_{\varepsilon,n,s})$ et on obtient:*

$$\pi_{2,min|G} = \pi_{-1,\frac{1}{2}} \oplus \pi_{-1,\frac{3}{2}}$$

BIBLIOGRAPHIE

[BA] **V.BARGMANN** *Irreducible unitary representations of the Lorentz group.* Ann. of Math. 48 (1947), 568-640.

[BB] **W.BORHO et J.L.BRYLINSKI** *Differential operators on homogeneous spaces III.* Inventiones Math.80 (1985), 1-68

[CO-MG] **D.H.COLLINGWOOD et W.M.MAC GOVERN** *Nilpotent orbits in semi-simple Lie algebras.* Van Nostrand Reinhold, Mathematics series.

[DU] **M. DUFLO** *Théorème de Mackey pour les groupes de Lie algébriques.* Acta Mathematica, vol. 149, 1982.

[FA-KO] **J.FARAUT et A.KORANYI** *Analysis on symmetric cones.* Oxford mathematical monographies, Clarendon press, Oxford.

[JO] **A. JOSEPH** *The minimal orbit in a simple Lie algebra and its associated maximal ideal.* Ann. Sci. E.N.S., 4e série, t.9, 1976.

[LI-VE] **G. LION et M. VERGNE** *The Weil representation, Maslov index and theta series.* Birkkhauser, Boston 1980.

[MA] **T.MATSUKI** *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups.* J.Math.Soc.Japan. Vol.31, n°2, 1979.

[PO] **N.S. POULSEN.** *On C^∞-vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups.* J. Funct. An. - n° 9, (1972) p. 87-120.

[RA] **R.RANGA RAO.** *Unitary representations defined by boundary conditions - The case of $sl(2,\mathbb{R})$.* Acta Math.139, (19..), 185-216.

[SA] **H.SABOURIN** *Une représentation unipotente associée à l'orbite minimale: le cas de $so(4,3)$.* J.Funct.Anal., 137, (1996), 394-465.

[SE] **J.P. SERRE** *Arbres, amalgames, SL_2.* Astérisque n° 46.

[TO] **P.TORASSO** *Méthode des orbites de Kirillov-Duflo et représentations minimales des groupes simples sur un corps local de caractéristique nulle.* Duke.Math.J., 90, (1997), 261-377.

Hervé Sabourin

UPRESA 6086 "Groupes de Lie et Géométrie"

Département de Mathématiques

SP2MI, Bd3, Teleport 2

BP 179, 86960 Futuroscope Cedex.

E-mail : sabourin@mathlabo.univ-poitiers.fr