SUR L'IRREDUCTIBILITE DE LA VARIETE COMMUTANTE D'UNE PAIRE SYMETRIQUE REDUCTIVE DE RANG 1.

Hervé Sabourin et Rupert W.T. Yu

UMR 6086 (GLG) CNRS, Département de Mathématiques

Téléport 2, BP 30179, Boulevard Marie et Pierre Curie

86962 Futuroscope-Chasseneuil Cedex France

sabourin@mathlabo.univ-poitiers.fr, yuyu@mathlabo.univ-poitiers.fr

Résumé : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive complexe et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ une décomposition de $\mathfrak{g}$ en paire symétrique suivant une involution θ. La question se pose de savoir si la variété commutante de $\mathfrak{p}$ est irréductible. Le but de ce travail est de montrer que les seules paires symétriques réductives de rang 1 dont la variété commutante est irréductible sont de la forme $(so(n+1,\mathbb{C}), so(n,\mathbb{C}))$, $n > 0$. La démonstration proposée a de plus l'avantage de n'avoir jamais recours à la classification des paires symétriques.

Abstract : Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ be a reductive symmetric pair associated to the involution θ. The question is whether the commuting variety of $\mathfrak{p}$ is irreducible. We show in this paper that the only reductive symmetric pairs of rank 1 having an irreducible commuting variety are of the form $(so(n+1,\mathbb{C}), so(n,\mathbb{C}))$, $n > 0$. Our proof has the advantage that it does not use the classification of symmetric pairs.

I. Introduction et Notations. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive complexe, soit θ une involution de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition en sous-espaces propres de θ, suivant les valeurs propres respectives $+1$ et -1. On notera $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ la paire symétrique réductive correspondante. Soit G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ et K le sous-groupe algébrique connexe de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Soit, enfin, B la forme de Killing identifiant $\mathfrak{g}$ à son dual $\mathfrak{g}^*$.

Classification AMS : 17B20, 14L30

Mots-clés : paires symétriques réductives, paires symétriques de type R, variété commutante.

Introduisons la variété commutante de la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, soit :

$$\mathcal{C}(\mathfrak{p}) = \{(x, y) \in \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \ / \ [x, y] = 0\}.$$

On peut considérer la variété commutante $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, définie de manière analogue. Dans [RI], W. Richardson a démontré que $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ était irréductible. Par contre, la variété commutante d'une paire symétrique réductive quelconque n'est pas, en général, irréductible. En effet, on peut considérer l'exemple, cité par D.Panyushev dans [PA], de la paire $(sl(n, \mathbb{C}), gl(n-1, \mathbb{C})), n > 2$, issue de l'involution définie par la conjugaison par la matrice diagonale $I_{n,1} = diag(-1, \ldots, -1, 1)$. La variété commutante possède trois composantes irréductibles de dimensions respectives $2n-1, 2n-2, 2n-2$.

Citons, à ce propos, quelques résultats connus : pour cela, on se donne un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{p}$, on note r la dimension de $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire le rang de $\mathfrak{p}$, et p la dimension de $\mathfrak{p}$. L'ensemble $K.(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})$ est inclus dans $\mathcal{C}(\mathfrak{p})$. On note $\mathcal{R} = \overline{K.(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})}$ son adhérence de Zariski dans $\mathcal{C}(\mathfrak{p})$. La proposition qui suit résulte des travaux de D.Panyushev [PA] et R.Hotta-M.Kashiwara [HO-KA]. Notons, à ce propos, que le résultat établi dans [HO-KA] ne concerne que le cas d'une algèbre de Lie réductive et sa variété commutante mais qu'il se démontre de manière totalement analogue lorsqu'il s'agit d'une paire symétrique réductive.

Proposition 1 :

a) **[HO-KA]** *$\mathcal{R}$ est l'unique composante irréductible de $\mathcal{C}(\mathfrak{p})$ de dimension maximale égale à $p + r$.*

b) **[PA]** *Si la paire symétrique est de rang maximal, c'est-à-dire si r est égal au rang de $\mathfrak{g}$, alors la variété $\mathcal{C}(\mathfrak{p})$ est irréductible.*

En dehors du cas du rang maximal ou du cas diagonal $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \Delta(\mathfrak{g}))$, l'irréductibilité de $\mathcal{C}(\mathfrak{p})$ ne semble pas connue en général. En fait, les seuls exemples qui ont été traités jusqu'à présent et où l'on peut conclure sur la réductibilité de $\mathcal{C}(\mathfrak{p})$ concernent des paires symétriques de rang 1. Deux questions se posent donc :

- 1) Quelles sont, précisément, les paires symétriques réductives de rang 1 dont la variété commutante est irréductible ?

- 2) La variété commutante $\mathcal{C}(\mathfrak{p})$ d'une paire symétrique réductive de rang strictement plus grand que 1 est-elle irréductible ?

L'objet de ce travail est de répondre à la question 1) et de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2 : *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ une paire symétrique réductive de rang 1. Alors, la variété commutante de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est irréductible si et seulement si il existe un entier $n > 0$ tel que :*

$$([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \oplus \mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = (so(n+1, \mathbb{C}), so(n, \mathbb{C}))$$

Ce théorème, qui a été conjecturé par T.Levasseur et D.Panyushev, semble avoir été démontré par ce dernier en utilisant la classification des paires symétriques de rang 1 et des K-orbites correspondantes . Le travail qui suit propose une démonstration qui n'a pas recours à ces classifications.

Nous tenons à remercier P.Tauvel pour la disponibilité dont il a su faire preuve à notre égard et pour ses travaux sur les paires symétriques qui nous ont été particulièrement utiles.

Nous adopterons, pour la suite, les notations introduites dans ce paragraphe.

II. Paires symétriques de type R. Nous allons nous intéresser aux paires symétriques qui satisfont à la propriété suivante :

Définition : *Une paire symétrique réductive $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est dite de type R si :*

$$\forall X \in \mathfrak{p}, X \neq 0, \dim \mathfrak{p}^X = 1.$$

Soit $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{C}(\mathfrak{p}) \ / \ x$ et y soient liés $\}$. Manifestement, la condition de dépendance linéaire est une condition fermée. Ainsi, $\mathcal{C}$ est un fermé de $\mathcal{C}(\mathfrak{p})$.

Proposition 3 : *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ une paire symétrique réductive de rang 1. Alors, la variété commutante $\mathcal{C}(\mathfrak{p})$ est irréductible si et seulement si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est de type R.*

Preuve : On a : $\dim \mathfrak{a} = 1$, par hypothèse. Il s'en suit que $K.(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}) \subset \mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ est fermé, il vient : $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$. D'après la proposition 1, $\mathcal{R}$ est l'unique composante irréductible de $\mathcal{C}(\mathfrak{p})$ de dimension maximale; l'inclusion précédente et le fait que $K.\mathfrak{a}$ est dense dans $\mathfrak{p}$ impliquent donc l'égalité : $\mathcal{R} = \mathcal{C}$. Ainsi, $\mathcal{C}(\mathfrak{p})$ est irréductible si et seulement si $\mathcal{C}(\mathfrak{p}) = \mathcal{C}$, ce qui donne immédiatement le résultat souhaité. ■

Proposition 4 : *Soit n un entier strictement positif. Alors, la paire symétrique $(so(n+1, \mathbb{C}), so(n, \mathbb{C}))$ est de type R, et, par conséquent, sa variété commutante est irréductible.*

Preuve : On peut identifier $\mathfrak{p}$ à $\mathbb{C}^n$ et on sait, qu'à un isomorphisme près, l'action de $\mathfrak{k} = so(n, \mathbb{C})$ sur $\mathfrak{p}$ est l'action naturelle de $so(n, \mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^n$.

Supposons $n \neq 2, 4$ et considérons l'application $\mathfrak{k}$-linéaire $\phi : \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{k}$ définie par : $\phi(x \wedge y) = [x, y]$. Du fait de la simplicité de l'algèbre $so(n, \mathbb{C})$, cette application est surjective et comme les deux espaces considérés sont de même dimension, elle est bijective. Il s'en suit que si $x, y \in \mathfrak{p}$ sont tels que $[x, y] = 0$, nécessairement x et y sont liés, ce qui prouve bien que la paire symétrique est de type R.

Les cas $n = 2$ ou $n = 4$ se traitent par un calcul direct. ∎

III. Irréductibilité de la variété commutante en rang 1.

Compte-tenu de la proposition 3 et de la proposition 4, il suffit, pour démontrer le théorème 2, de supposer que la paire symétrique est de rang 1 et de type R et de montrer que, dans ce cas, on a, pour un entier strictement positif n : $([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \oplus \mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = (so(n+1, \mathbb{C}), so(n, \mathbb{C}))$.

On peut, tout d'abord, faire les deux remarques suivantes :

- $\mathcal{I} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \oplus \mathfrak{p}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. La paire symétrique $(\mathcal{I}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}])$ est donc réductive de type R.

On peut ainsi supposer, sans perte de généralité, que :

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{k}. \qquad \textbf{(1)}$$

- Soit $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathfrak{g}$. On sait que : $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. En utilisant (1) et le fait que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est θ-stable, on obtient : $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{p}$. Comme la paire symétrique est de type R, on en déduit que, soit $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, soit $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 1$ et, dans ce dernier cas, nécessairement $\mathfrak{p} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), \mathfrak{k} = 0$. La paire symétrique correspondante est donc du type $(so(2), so(1))$.

On peut donc se ramener à l'hypothèse suivante :

$$\mathfrak{g} \text{ est une algèbre de Lie semi-simple.} \qquad \textbf{(2)}$$

Le résultat qui suit est dû à P.Tauvel [TA 1], corollaire 8.4.1.

Proposition 5 : *Toute K-nappe dans $\mathfrak{p}$ contient une K-orbite nilpotente.*

On pourra noter que l'on a un résultat similaire concernant les G-nappes dans $\mathfrak{g}$. On peut en lire la démonstration qui est analogue à celle de la proposition 5 dans [TA 2], chapitre 17.

On peut donc supposer l'existence dans $\mathfrak{p}$ d'un élément nilpotent non nul x. On associe à x le sl_2-triplet normal $(x,h,y), x,y \in \mathfrak{p},\ h \in \mathfrak{k}$. Soit $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\mathfrak{n}\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\mathfrak{n}}$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres suivant l'action de $ad\ h$, $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{g}_n \cap \mathfrak{p},\ \mathfrak{k}_n = \mathfrak{g}_n \cap \mathfrak{k}$. Posons, enfin :

$$m = \max\{n\ /\mathfrak{p}_n \neq 0\},\ l = \max\{n\ /\mathfrak{k}_n \neq 0\}.$$

Nous aurons besoin, pour la suite, d'un certain nombre de résultats bien connus relatifs à l'action du sl_2-triplet (x,h,y). On pourra se référer pour cela à [SP-ST].

Lemme 6 : *Soit (x,h,y) définis comme précedemment.*

(i) Pour tout entier strictement positif j, l'application $(ad\ y)^j$: $\mathfrak{g}_j \longrightarrow \mathfrak{g}_{-j}$ est bijective.

En particulier, on a :

$$(ad\ y)^{2j+1}(\mathfrak{p}_{2j+1}) = \mathfrak{k}_{-2j-1}, (ad\ y)^{2j+1}(\mathfrak{k}_{2j+1}) = \mathfrak{p}_{-2j-1}. \tag{3}$$

(ii) Par dualité selon la forme de Killing B, on a :

$$\forall j, \dim \mathfrak{p}_j = \dim \mathfrak{p}_{-j}, \quad \dim \mathfrak{k}_j = \dim \mathfrak{k}_{-j}. \tag{4}$$

(iii) Pour tout entier j, on a :

$$\mathfrak{p}_j = (\mathfrak{p}_j \cap \mathfrak{p}^x) \oplus [y, \mathfrak{k}_{j+2}] = (\mathfrak{p}_j \cap \mathfrak{p}^y) \oplus [x, \mathfrak{k}_{j-2}]. \tag{5}$$

$$\mathfrak{k}_j = (\mathfrak{k}_j \cap \mathfrak{k}^x) \oplus [y, \mathfrak{p}_{j+2}] = (\mathfrak{k}_j \cap \mathfrak{k}^y) \oplus [x, \mathfrak{p}_{j-2}]. \tag{6}$$

(iv) Pour tout entier $j \geq 1$, on a :

$$[x, \mathfrak{p}_{j-2}] = \mathfrak{k}_j,\ [x, \mathfrak{k}_{j-2}] = \mathfrak{p}_j. \tag{7}$$

(v) Pour tout entier $j \leq 1$, on a :

$$[y, \mathfrak{p}_j] = \mathfrak{k}_{j-2},\ [y, \mathfrak{k}_j] = \mathfrak{p}_{j-2}. \tag{8}$$

Lemme 7 : *On a les résultats suivants :*
a) x est pair, c'est-à-dire : $\forall j, \mathfrak{g}_{2j+1} = 0$.
b) $m = 2$ et $l \leq 4$.

Preuve :

• Supposons x non pair. D'après (3) et (4), il existe un entier $j \neq 0$ tel que : $\mathfrak{p}_{2j+1} \neq 0$. Soit $2r+1 = \max\{n, n \text{ impair}, \ / \ \mathfrak{p}_n \neq 0\}$. Soit $y \in \mathfrak{p}_{2r+1}$, $y \neq 0$. Comme $\dim \mathfrak{p}^x = 1$, nécessairement, $[x, y] \neq 0$, donc $\mathfrak{k}_{2r+3} \neq 0$ et, ainsi, suivant (3) et (4) , $\mathfrak{p}_{2r+3} \neq 0$, ce qui contredit la définition de r.

• Il est clair, tout d'abord, que $m \geq 2$.

Supposons $m > 2$. Comme $\mathfrak{k}_{m+2} \neq 0$ suivant l'hypothèse du type R, on en déduit que : $l \leq m+2$. D'autre part, $[y, \mathfrak{k}_l] \neq 0$ et, d'après (8), $[y, \mathfrak{k}_l] = \mathfrak{p}_{l-2}$, ce qui implique $l = m+2$.

Comme $2m > m+2$, alors $[\mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_m] = 0$. L'hypothèse selon laquelle la paire symétrique est de type R implique que $\dim \mathfrak{p}_m = 1$. Supposons qu'il existe un entier m', $2 < m' < m$ tel que $\mathfrak{p}_{m'} \neq 0$. Comme $[\mathfrak{p}_{m'}, \mathfrak{p}_m] = 0$, il vient : $\dim \mathfrak{p}_m > 1$, ce qui est impossible.

Supposons, enfin, $m > 6$. On obtient, à l'aide de (7) et (8) : $\mathfrak{p}_{m-4} \neq 0$, ce qui est en contradiction avec ce qui précède. Ainsi, on a : $2 \leq m \leq 6$..

Supposons $m = 6$.

On sait que $\dim \mathfrak{p}_6 = 1$. D'autre part, on a, selon (7) : $[x, \mathfrak{p}_6] = \mathfrak{k}_8$, ce qui implique que $\dim \mathfrak{k}_8 = 1$.

On a aussi : $(ad\ x)^2(\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{p}_6$ et $x \in \ker(ad\ x)^2$. D'où : $\dim \mathfrak{p}_2 \geq 2$.

Soit $z \in \mathfrak{p}_6 \backslash \{0\}$. Alors, pour des raisons de dimension, l'application $ad\ z : \mathfrak{p}_2 \longrightarrow \mathfrak{k}_8$ est de noyau non nul et, donc, $\dim \mathfrak{p}^z > 1$,ce qui est impossible.

Supposons $m = 4$.

On a, selon des arguments similaires à ceux déjà utilisés : $\dim \mathfrak{p}_0 = \dim \mathfrak{p}_4 = \dim \mathfrak{k}_6 = 1$.

Si $\dim \mathfrak{p}_2 \geq 2$, le même raisonnement que celui du cas précédent aboutit à une contradiction. Donc, $\dim \mathfrak{p}_2 = 1$. L'application $ad\ x$: $\mathfrak{p}_2 \longrightarrow \mathfrak{k}_4$ est de noyau non nul, ce qui implique $\mathfrak{k}_4 = 0$.

D'où : $[\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_4] = 0$, ce qui contredit l'hypothèse du type R. Ainsi, $m = 2$ et $l \leq 4$. ■

On est ramené, pour $\mathfrak{g}$, à la forme suivante : $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_{-4} \oplus \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{k}_4$.

Lemme 8 : *On a :*

$$\dim \mathfrak{p}_2 = \dim \mathfrak{p}_{-2} = 1, \ \mathfrak{k}_4 = \mathfrak{k}_{-4} = 0, \ \dim \mathfrak{k}_{-2} = \dim \mathfrak{k}_2 = \dim \mathfrak{p}_0.$$

Preuve : Supposons $\dim \mathfrak{p}_2 > 1$ et $\mathfrak{p}_0 \neq 0$. Pour tout $z \in \mathfrak{p}_2 \backslash \{0\}$, l'application $ad\ z : \mathfrak{p}_0 \longrightarrow \mathfrak{k}_2$ est surjective d'après (7) et, donc, bijective en raison de la propriété du type R. Considérons un tel z et supposons-le indépendant de x, ce qui est possible compte-tenu de l'hypothèse. Soit λ une valeur propre de $(ad\ x)^{-1} ad\ z$ en tant qu'élément de $End(\mathfrak{p}_0)$. L'application $ad\ (\lambda x - z) : \mathfrak{p}_0 \longrightarrow \mathfrak{k}_2$ est donc non injective, ce qui est en contradiction avec ce qui précède.

Il s'en suit que $\mathfrak{p}_0 = 0$, ce qui implique : $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_{-4} \oplus \mathfrak{p}_{-2} \oplus \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{k}_4$.

Soit $\mathfrak{q} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_2 \oplus \mathfrak{k}_4$. Il s'agit d'une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{g}^h$ comme facteur de Levi. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{k}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant h, Π un système de racines simples associé et $\Pi_0 \subset \Pi$ le sous-système correspondant à $\mathfrak{q}$.

Les espaces $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_{-2}, \mathfrak{k}_4, \mathfrak{k}_{-4}$ sont stables par $\mathfrak{h}$. Soit $\alpha \in \Pi \backslash \Pi_0, X_\alpha$ un vecteur-racine correspondant. De ce qui précéde, on déduit que X_α appartient à $\mathfrak{p}_2$ ou à $\mathfrak{k}_4$. Mais le fait que $[\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2] = \mathfrak{k}_4$ et que α soit une racine simple implique que $X_\alpha \in \mathfrak{p}_2$. Supposons qu'il existe deux racines distinctes α, β dans $\Pi \backslash \Pi_0$. Comme $\alpha - \beta$ n'est pas racine, $[X_\alpha, X_{-\beta}] = 0$; mais $X_{-\beta} \in \mathfrak{p}_{-2}$ et donc $\dim \mathfrak{p}^{X_\alpha} > 1$, ce qui est impossible. Ainsi : $\Pi \backslash \Pi_0 = \{\alpha\}$. Tout vecteur-racine dans $\mathfrak{p}_2$ est donc de la forme $X_{\alpha+\beta_i}, 0 \leq i \leq s$, où $\forall i, \beta_i \in \mathbb{N}.\Pi_0$.

Pour tout y de $\mathfrak{p}_2 \backslash \{0\}$, l'application $ad\ y : \mathfrak{p}_2 \longrightarrow \mathfrak{k}_4$ est surjective, d'après (7), et, selon l'hypothèse du type R, $\dim \mathfrak{p}_2 = \dim \mathfrak{k}_4 + 1$. Si l'on choisit $y = X_\alpha$, on en déduit que $\mathfrak{k}_4$ est engendré par des vecteurs de poids respectifs $(2\alpha + \beta_1, \ldots, 2\alpha + \beta_s)$. Considérons maintenant le cas où $y = X_{\alpha+\beta_i}$, pour un indice i donné. Pour des raisons analogues, $\mathfrak{k}_4$ est aussi engendré par des vecteurs associés à la famille de poids $(2\alpha + \beta_i, \ldots, 2\alpha + \beta_i + \beta_j, \ldots, 2\alpha + \beta_i + \beta_s)$. Pour des raisons de hauteur de racines, il apparait clairement que les deux familles de poids précédentes ne seront identiques qu'à la condition que l'entier s soit inférieur ou égal à 1.

Comme $\dim \mathfrak{p}_2 > 1$, nécessairement $s = 1$ et donc : $\dim \mathfrak{p}_2 = 2, \dim \mathfrak{k}_4 = 1$.

L'hypothèse (1) implique : $[\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_{-2}] = \mathfrak{k}_0$. Cela nous donne : $2 \leq \dim \mathfrak{k}_0 \leq 3$.

Par ailleurs, comme $\mathfrak{p}_2 = Vect < X_\alpha, X_{\alpha+\beta_1} >, \mathfrak{p}_{-2} = Vect < X_{-\alpha}, X_{-\alpha-\beta_1} >$, on constate que : $\mathfrak{k}_0 = Vect < H_\alpha, H_{\alpha+\beta_1}, X_{\beta_1}, X_{-\beta_1} >$ et $\dim \mathfrak{k}_0 = 4$, ce qui est impossible. D'où :

$$\dim \mathfrak{p}_2 = 1. \qquad \textbf{(9)}$$

On en déduit immédiatement que $\mathfrak{k}_{\pm 4} = 0$.

Enfin, L'application $ad\ x : \mathfrak{p}_0 \longrightarrow \mathfrak{k}_2$ est surjective d'après (7) et $\mathfrak{p}_0^x = 0$. Ceci implique que : $\dim \mathfrak{k}_2 = \dim \mathfrak{p}_0$. ■

Posons : $\widetilde{\mathfrak{k}} = [\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_0]$, $\widetilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_0$, $\widetilde{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{k}} \oplus \widetilde{\mathfrak{p}}$.

$\widetilde{\mathfrak{g}}$ est un idéal de $\mathfrak{g}_0$. Donc, la paire $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{k}})$ est une paire symétrique réductive de type R. A l'aide de considérations identiques à celles du début de cette démonstration, on se ramène aux cas suivants :

ou bien $\widetilde{\mathfrak{g}} = 0$, et on déduit de ce qui précède que $\mathfrak{g}$ est de dimension 3, ce qui impose que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = (so(3, \mathbb{C}), so(2, \mathbb{C}))$.

ou bien $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{k}}) = (\mathbb{C}, 0) = (so(2), so(1))$,

ou bien $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est semi-simple.

D'autre part, on remarque que :

(i) - $h \in \mathfrak{k}_0 \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_0)$. Donc, $h \notin \widetilde{\mathfrak{g}}$.

(ii) - De l'hypothèse (1) et de (9), on déduit que :

$$\mathfrak{k}_0 = \widetilde{\mathfrak{k}} \oplus [\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_{-2}] = \widetilde{\mathfrak{k}} \oplus \mathbb{C}.h$$

(iii) - On a les égalités dimensionnelles suivantes :

$$\dim \mathfrak{k}_2 = \dim \mathfrak{k}_{-2} = \dim \widetilde{\mathfrak{p}},$$
$$\dim \mathfrak{k} = \dim \widetilde{\mathfrak{k}} + 2 \dim \widetilde{\mathfrak{p}} + 1,$$
$$\dim \mathfrak{p} = \dim \widetilde{\mathfrak{p}} + 2$$

Preuve du théorème 2 : Si $\dim \mathfrak{g} \leq 3$, il est facile de constater que nécessairement $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = (so(3, \mathbb{C}), so(2, \mathbb{C}))$ ou $(so(2, \mathbb{C}), so(1, \mathbb{C}))$. On peut donc, pour la suite, se restreindre au cas où : $\dim \mathfrak{g} > 3$.

Supposons qu'il existe une paire symétrique réductive de rang 1 et de type R qui ne soit pas de la forme $(so(n+1, \mathbb{C}), so(n, \mathbb{C})), n > 0$, et on choisit une telle paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ de dimension minimale. La paire correspondante $(\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{k}})$ est donc de la forme $(so(n+1, \mathbb{C}), so(n, \mathbb{C}))$ pour un entier $n > 0$. Des remarques (i), (ii) et (iii), on déduit que :

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{-2} \oplus so(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}.h \oplus \mathfrak{k}_2$$

Or, d'après (iii), $\dim \mathfrak{k}_2 = \dim \widetilde{\mathfrak{p}} = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} = n$. Donc, $\mathfrak{k}$ est une algèbre de Lie réductive de rang $[\dfrac{n}{2}] + 1$ et de dimension $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

$= \dim so(n+2,\mathbb{C})$.

Soit $\widetilde{\mathfrak{q}} = so(n,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}.h \oplus \mathfrak{k}_2$. C'est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{k}$. Compte-tenu du rang de $\mathfrak{k}$, $\widetilde{\mathfrak{q}}$ est une sous-algèbre parabolique maximale et il existe un système de racines simples Π de $\mathfrak{k}$, un système de racines simples Π_0 de $so(n,\mathbb{C})$ tels que :

- $\Pi_0 \subset \Pi$.

- $\widetilde{\mathfrak{q}}$ est une sous-algèbre parabolique correspondant à Π_0.

- $\Pi \backslash \Pi_0 = \{\alpha\}$.

En résumé, $\mathfrak{k}$ est une algèbre de Lie réductive possédant les trois propriétés suivantes :

- rg $\mathfrak{k}$ = rg $so(n,\mathbb{C}) + 1$.

- $\dim \mathfrak{k} = \dim so(n+2,\mathbb{C})$.

- Le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{k}$ contient celui de $so(n,\mathbb{C})$.

D'autre part, l'hypothèse selon laquelle $\mathfrak{g}$ est de dimension strictement plus grande que 3 implique que $\widetilde{\mathfrak{g}} \neq 0$. Dans ce cas, il est clair que $\mathfrak{k}_2 \neq 0$ et donc que l'algèbre réductive $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{-2} \oplus so(n,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}.h \oplus \mathfrak{k}_2$ est nécessairement semi-simple. Pour des raisons de dimension, il s'en suit que la seule algèbre de Lie semi-simple satisfaisant aux trois propriétés précédentes est $\mathfrak{k} = so(n+2,\mathbb{C})$. Venons-en, pour finir, à l'algèbre $\mathfrak{g}$. On a, de la même façon :

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2$.

- Le rang de $\mathfrak{g}$ est $[\frac{n+1}{2}]$.

- $\dim \mathfrak{g} = \dfrac{(n+2)(n+3)}{2} = \dim so(n+3,\mathbb{C})$. On utilise les mêmes arguments que précédemment pour montrer que $\mathfrak{g} = so(n+3,\mathbb{C})$, ce qui nous fait aboutir à une contradiction. ■

REFERENCES

[HO-KA] R.Hotta, M.Kashiwara *The invariant holonomic system on a complex semi-simple Lie algebra*, Inventiones Math. 75 (1984), p.327-358.

[PA] **D.Panyushev** *The Jacobian modules of a representation of a Lie algebra and geometry of commuting varieties.* Compositio Math. 94 (1994) p.181-199.

[RI] **W.Richardson** *Commuting varieties of semi-simple Lie algebras and algebraic groups.* Compositio Math. 38 (1979) p.311-327.

[SP-ST] **T.A.Springer, R.Steinberg** *Conjugacy classes.* "Seminar on algebraic groups and related finite groups". Lecture notes in Math. 131. p.167-266, Berlin Heidelberg New York : Springer 1970.

[TA 1] **P.Tauvel** *Quelques résultats sur les algèbres de Lie semi-simples symétriques.* Notes du séminaire "Théorie de Lie", Poitiers 1999.

[TA 2] **P.Tauvel** *Introduction à la théorie des algèbres de Lie.* Diderot Editeurs 1998.