Canad. J. Math. Vol. **57** (4), 2005 pp. 750–770

# Sur la structure transverse à une orbite nilpotente adjointe

Hervé Sabourin

*Abstract.* We are interested in Poisson structures transverse to nilpotent adjoint orbits in a complex semi-simple Lie algebra, and we study their polynomial nature. Furthermore, in the case of $sl_n$, we construct some families of nilpotent orbits with quadratic transverse structures.

## Introduction

L'objet de ce travail est une contribution à l'étude de la structure de Poisson transverse à une orbite nilpotente adjointe dans une algèbre de Lie semi-simple complexe.

Soit $\mathfrak{g}$ une telle algèbre de Lie, $G$ son groupe adjoint. Chaque $G$-orbite nilpotente $O$ est entièrement caractérisée par la donnée d'un $sl_2$-triplet $(h, e, f)$, où $e$ est un générateur de l'orbite et $h$ sa caractéristique. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est identifiée à son dual $\mathfrak{g}^*$, via la forme de Killing, et peut ainsi être munie de la structure de Lie–Poisson correspondante. On sait alors réaliser la structure de Poisson transverse à $O$ dans $\mathfrak{g}$, en choisissant un supplémentaire quelconque $\mathfrak{n}$ du centralisateur $\mathfrak{g}^e$ de $e$ dans $\mathfrak{g}$ et en considérant la variété affine $N = e + \mathfrak{n}^{\perp}$. On sait, d'après A. Weinstein [WE], que les structures de Poisson transverses associées à deux supplémentaires sont nécessairement isomorphes.

Dans [SG], M. Saint-Germain a remarqué que si l'on définit un système de coordonnées locales $(q) = (q_1, \dots, q_n)$ pour $N$, alors la structure de Poisson est à coefficients rationnels en la variable $(q)$. Dans [CU-RO], R. Cushman et M. Roberts ont considéré le supplémentaire $\mathfrak{n} = \operatorname{Im} \operatorname{ad} f$ et ont montré que, pour un tel choix, la structure de Poisson transverse était polynômiale en la variable $(q)$.

Nous considérons alors l'ensemble $\mathcal{N}_h$ des supplémentaires ad $h$-invariants de $\mathfrak{g}^e$ et montrons que, pour tout élément de cet ensemble, la structure transverse correspondante est encore polynômiale.

Nous proposons, par ailleurs, dans l'exemple de l'orbite sous-régulière de $sl(4, \mathbb{C})$, un supplémentaire qui n'est pas $h$-invariant pour lequel la structure transverse n'est pas polynômiale, ce qui justifie l'introduction de la variété $\mathcal{N}_h$.

A chaque supplémentaire $h$-invariant $\mathfrak{n}$, on peut donc associer le degré $\deg_N$ de la structure transverse correspondante, défini comme étant le degré maximum des polynômes intervenant dans la structure de Poisson. Naturellement, la question se pose de savoir si cette notion de degré peut être définie de manière intrinsèque, c'est-à-dire indépendamment du choix du supplémentaire choisi dans $\mathcal{N}_h$.

Reçu par la rédaction le 15 juillet, 2003; revu le 20 octobre, 2003.
Classification (AMS) par sujet: 22E,53D.
Mots clés: nilpotent adjoint orbits, conormal orbits, Poisson transverse structure.

Nous considérons à nouveau, à ce sujet, l'exemple de l'orbite sous-régulière de $sl(4, \mathbb{C})$ et donnons deux supplémentaires $h$-invariants dont les structures transverses sont de "degré" distincts, ce qui répond négativement à la question posée.

Nous nous intéressons enfin au cas des structures transverses "quadratiques", c'est-à-dire des structures polynômiales de degré au plus égal à 2. Selon la terminologie introduite par M. Roberts [RO], on considère les orbites conormales, celles pour lesquelles le centralisateur $\mathfrak{g}^e$ possède un supplémentaire qui est une sous-algèbre. La structure transverse correspondant à un tel supplémentaire est alors quadratique [OH]. Nous montrons dans le paragraphe 3 que toute orbite nilpotente "sphérique" est une orbite conormale et, dans le cas $sl_n(\mathbb{C})$, nous construisons une famille d'orbites nilpotentes conormales, contenant entre autres les orbites sphériques et l'orbite régulière, généralisant en cela certains résultats de M. Raïs [RA].

L'exemple de l'orbite sous-régulière de $sl_4(\mathbb{C})$ nous permet d'exhiber une structure transverse quadratique associée à un supplémentaire qui n'est pas une sous-algèbre. Réciproquement, on peut se demander si toute structure transverse d'une orbite conormale est quadratique; nous donnons pour finir un exemple dans $sl_5(\mathbb{C})$ qui répond négativement à cette question.

## 1 Structure transverse à une orbite coadjointe

**1.1** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe, $G$ son groupe adjoint, $\mathfrak{g}^*$ son dual. On sait que $\mathfrak{g}^*$ peut être munie d'une structure de variété de Poisson et on notera $\Lambda$ le tenseur de Lie–Poisson correspondant. En tout point $\mu \in \mathfrak{g}^*$, on identifie l'espace cotangent $T^*_\mu\mathfrak{g}^*$ avec $\mathfrak{g}$ et, moyennant cette identification, on définit $\Lambda$ par

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \Lambda_\mu(X, Y) = \mu([X, Y])$$

Les feuilles symplectiques dans $\mathfrak{g}^*$ sont les orbites coadjointes et, selon A. Weinstein [WE], on peut donc définir pour chaque orbite $G.\mu$ une structure transverse, c'est-à-dire une sous-variété $N$ de $\mathfrak{g}^*$ contenant $\mu$, telle que l'on ait

$$T_\mu\mathfrak{g}^* = T_\mu(G.\mu) \oplus T_\mu N$$

Selon A. Weinstein, on sait de plus que cette structure transverse est unique à un isomorphisme de variétés de Poisson près.

**1.2** Pour construire une telle structure transverse, on procède de la manière suivante (voir M. Saint-Germain [SG]) : On considère le centralisateur $\mathfrak{g}^\mu$ de $\mu$ dans $\mathfrak{g}$ et un supplémentaire quelconque $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}^\mu$. On note $\mathfrak{n}^0$ (respectivement $\mathfrak{g}^{\mu,0}$) l'annulateur de $\mathfrak{n}$ (respectivement de $\mathfrak{g}^\mu$) dans $\mathfrak{g}^*$ et on a

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^{\mu,0} \oplus \mathfrak{n}^0.$$

On pose : $N = \mu + \mathfrak{n}^0$.

On voit facilement que :

$$T_\mu(G.\mu) = \mathfrak{g}.\mu = \mathfrak{g}^{\mu,0}, \quad T_\mu N = \mathfrak{n}^0.$$

Ceci permet de constater que $N$ est bien transverse à $G.\mu$ au point $\mu$ et on vérifie que cette propriété reste vraie dans un voisinage bien choisi de $\mu$ dans $N$.

Pour déterminer le tenseur de Poisson $\Lambda_N$ de la variété de Poisson $N$ ainsi définie, on peut utiliser la formule dite "formule des contraintes de P. A. M. Dirac", donnée par P. G. Bergmann et I. Goldberg [BE-GO].

Soit $(Z_i)_{1\leq i\leq k}$ une base de $\mathfrak{g}^\mu$ et $(X_j)_{1\leq j\leq p}$ une base du supplémentaire $\mathfrak{n}$. Un système de coordonnées linéaires pour un élément quelconque $\varphi$ de $\mathfrak{g}^*$ est alors donné par :

$$z_i(\varphi) = \varphi(Z_i), x_j(\varphi) = \varphi(X_j), \quad \forall (i, j), 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq p.$$

En particulier, on notera : $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ les coordonnées de $\mu$.

Soit $U$ un ouvert de $\mathfrak{g}^*$. On a :

$$N \cap U = \{\varphi \in U, x_j(\varphi) = \mu_j, \forall j, 1 \leq j \leq p\}.$$

Ainsi, l'application $\varphi \to (z_1(\varphi), \ldots, z_k(\varphi))$ est une carte de $N$.

Soit $(i, j, l, m)$, $1 \leq i, j \leq k$, $1 \leq l, m \leq p$ et $\nu \in \mathfrak{n}^0$. On pose :

$$\begin{aligned} C_N(\nu)_{l,m} &= (\mu + \nu)([X_l, X_m]),\\ D_N(\nu)_{l,j} &= \nu([X_l, Z_j]),\\ A_N(\nu)_{i,j} &= \nu([Z_i, Z_j]). \end{aligned}$$

On notera respectivement $C_N(\nu), D_N(\nu)$ et $A_N(\nu)$ les matrices de termes généraux donnés par les formules précédentes. On sait que la matrice $C_N(\nu)$ est inversible lorsque $\nu$ parcourt un voisinage $V$ de 0, bien choisi dans $\mathfrak{n}^0$.

On pose, de plus : $B_N(\nu) = {}^tD_N(\nu)$.

La matrice du tenseur $\Lambda_N$ en un point quelconque $(\mu + \nu)$ de $\mu + V$ sera notée $\Lambda_N(\nu)$. Son terme général est le crochet de Poisson $\{z_i, z_j\}(\mu + \nu)$.

La formule des contraintes de Dirac est alors la suivante :

$$\Lambda_N(\nu) = A_N(\nu) + B_N(\nu)C_N(\nu)^{-1}D_N(\nu). \tag{1}$$

On constate finalement que les coefficients $D_N(\nu)_{l,j}$ et $A_N(\nu)_{i,j}$ sont linéaires en les coordonnées $(z_j(\nu))$, que le coefficient $C_N(\nu)_{l,m}$ est affine en les $(z_j(\nu))$. Il s'en suit que la matrice inverse de $C_N(\nu)$ a des coefficients rationnels en les coordonnées $(z_j(\nu))$. Ainsi, chaque crochet de Poisson $\{z_i, z_j\}$ est rationnel en $(z_1, \ldots, z_k)$.

## 2 Le cas d'une algèbre de Lie semi-simple

**2.1** On suppose maintenant que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe, que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On définit un système de racines $\Delta(\mathfrak{h})$, $\Pi(\mathfrak{h})$ une base de racines simples et on note $K$ la forme de Killing qui permet d'identifier $\mathfrak{g}$ à son dual $\mathfrak{g}^*$. Soit $x \in \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}$ un supplémentaire quelconque de $\mathfrak{g}^x$ dans $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{n}^\perp$ l'orthogonal dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{n}$ relativement à $K$. Alors, $N = x + \mathfrak{n}^\perp$ est la structure transverse à l'orbite adjointe $G.x$.

On peut définir comme précédemment le tenseur de Poisson $\Lambda_N$ à partir des bases $(Z_i), (X_j)$. On considère la base $(\overline{Z_i}, \overline{X_j})$, duale de la base précédente relativement à $K$. Nécessairement, la famille $(\overline{Z_i})$ est une base de $\mathfrak{n}^\perp$ et on identifie $\mathfrak{n}^\perp$ à $\mathbb{C}^k$ par l'application $q = (q_1, \ldots, q_k) \to \sum_{i=1}^k q_i \overline{Z_i}$.

On reprend ensuite les notations précédentes, soit :

$$C_N(q)_{l,m} = K\big(x + \sum_{s=1}^k q_s \overline{Z_s}, [X_l, X_m]\big)\,,$$

$$D_N(q)_{l,j} = \sum_{s=1}^k K(q_s \overline{Z_s}, [X_l, Z_j]),$$

$$A_N(q)_{i,j} = \sum_{s=1}^k K(q_s \overline{Z_s}, [Z_i, Z_j]).$$

La matrice $\Lambda_N(q)$ du tenseur $\Lambda_N$ est encore définie par la formule (1) et ses coefficients sont des fonctions rationnelles en $(q_1, \ldots, q_k)$.

**2.2** Nous allons rappeler, dans cette section, quelques faits et notations sur les orbites nilpotentes utiles pour la suite. On pourra, pour plus de détails sur ce sujet, se référer à [SP-ST].

A chaque $G$-orbite nilpotente $O$, on sait associer sa classe de conjugaison de Jacobson–Morosov de $sl_2$-triplets. Dans cette classe, il existe un unique $sl_2$-triplet $(h^+, e, f)$ tel que :

$$\forall \alpha_i \in \Pi(\mathfrak{h}), \quad \alpha_i(h^+) \in \{0, 1, 2\}$$

La suite $(\alpha_i(h^+))$ est la *caractéristique* de l'orbite. Dans ces conditions, l'élément $e$ est un générateur de $O$.

On considère alors la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres suivant l'action de ad $h^+$, soit :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(m)$$

Le plus grand entier strictement positif $i$ tel que $\mathfrak{g}(i) \neq 0$ est la *hauteur* de l'orbite et sera noté $h(e)$.

Pour les algèbres de Lie simples classiques de type $sl(V), so(V)$ ou $sp(V)$, il est souvent commode de décrire les orbites nilpotentes en termes de partition de l'entier $n = \dim V$. En particulier, l'ensemble des orbites nilpotentes de $sl_n(\mathbb{C})$ s'identifie à l'ensemble des partitions $(p_1, \ldots, p_s)$, $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_s$ avec $\sum_i p_i = n$. La hauteur d'une telle orbite est égale à $2(p_1 - 1)$.

Enfin, suivant des notations usuelles, à chaque racine $\alpha \in \Delta(\mathfrak{h})$, on fait correspondre les vecteurs-racines $(H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha})$ d'une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$.

**2.3** On considère donc le cas d'une orbite adjointe nilpotente $O = G.e$ et son $sl_2$-triplet associé $(h^+, e, f)$, avec $h^+ \in \mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{s}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, engendrée par ce $sl_2$-triplet.

Outre la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres, sous l'action de $\operatorname{ad} h^+$, on a aussi une décomposition de $\mathfrak{g}$ en composantes irréductibles sous l'action de $\mathfrak{s}$, soit :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=-h(e)}^{h(e)} \mathfrak{g}(i) = \bigoplus_k E_{n_k}.$$

Chaque $\mathfrak{g}(i)$ est l'espace propre associé au poids entier $i$, chaque $E_{n_k}$ est la composante irréductible, suivant l'action de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{g}$, de plus haut poids $n_k$. Le centralisateur $\mathfrak{g}^e$ est alors engendré par les vecteurs de plus haut poids de cette décomposition.

On note $\mathcal{N}_h$ l'ensemble des supplémentaires $\operatorname{ad} h^+$-invariants de $\mathfrak{g}^e$ dans $\mathfrak{g}$. Pour chaque $\mathfrak{n}$ dans l'ensemble $\mathcal{N}_h$, on a la décomposition :

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{n}(i), \quad \mathfrak{n}(i) = \mathfrak{g}(i) \cap \mathfrak{n}.$$

On va voir, dans ce qui va suivre, le rôle important joué par l'ensemble $\mathcal{N}_h$ dans l'étude de la structure transverse à l'orbite $O$. Un premier résultat est relatif à la structure de variété de $\mathcal{N}_h$.

***Propositon 2.1*** *L'espace $\mathcal{N}_h$ est une variété algébrique irréductible de dimension*

$$2\sum_{i=0}^{h(e)} \dim \mathfrak{g}^e(i)(\dim \mathfrak{g}(i) - \dim \mathfrak{g}^e(i)).$$

On rappelle tout d'abord le résultat classique suivant, ainsi que sa démonstration, voir [DI, ch. 1.11].

***Propositon 2.2*** *Soit $V$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n$, $W$ un sous-espace de $V$ de dimension $d$. Alors, l'ensemble $\mathcal{S}$ des supplémentaires de $W$ dans $V$ est un ouvert affine de $\mathrm{Gr}(V, n-d)$, la grassmanienne de dimension $n-d$ dans $V$.*

Il est bien connu, en effet, que $\mathcal{S}$ est un ouvert de $\mathrm{Gr}(V, n-d)$.

Considérons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $V$ telle que $(e_1, \dots, e_d)$ soit une base de $W$. Soit $F \in \mathcal{S}$. Alors, pour tout $i, d+1 \le i \le n$, il existe des scalaires $(a_{i,j}, 1 \le j \le d)$ tels que $e_i + \sum_j a_{ij} e_j \in F$. Il s'en suit que l'application $F \to (a_{ij})_{d+1\le i\le n,\ 1\le j\le d}$ est un isomorphisme de variétés de $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{C}^{d(n-d)}$. Ainsi, $\mathcal{S}$ est un ouvert affine de $\mathrm{Gr}(V, n-d)$ et donc une variété algébrique irréductible de dimension $d(n-d)$.

**Preuve de la proposition 2.1** L'ensemble $\mathcal{N}$ des supplémentaires de $\mathfrak{g}^e$ dans $\mathfrak{g}$ est une variété algébrique irréductible dont $\mathcal{N}_h$ est une sous-variété.

Soit $i$ un entier, $-h(e) \le i \le h(e)$. Désignons par $\mathcal{N}_i$ la variété des supplémentaires de $\mathfrak{g}^e(i) = \mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}(i)$ dans $\mathfrak{g}(i)$. En utilisant ce qui précède, on peut affirmer que $\mathcal{N}_i$ est une variété algébrique irréductible de dimension $\dim \mathfrak{g}^e(i)(\dim \mathfrak{g}(i) - \dim \mathfrak{g}^e(i))$. L'application $\mathfrak{n} \to \bigoplus_{i=-h(e)}^{h(e)} \mathfrak{n}(i)$ est alors un isomorphisme de variétés de $\mathcal{N}_h$ sur $\prod_{i=-h(e)}^{h(e)} \mathcal{N}_i$. Ceci permet de démontrer le résultat souhaité.

***Théorème 2.3*** *Soit $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}_h$ et $N = e + \mathfrak{n}^{\perp}$. Alors, tous les coefficients de la matrice $\Lambda_N(q)$ sont des fonctions polynômiales en la variable $q$.*

**Preuve** Ce résultat a été démontré par R. Cushman et M. Roberts [CU-RO], dans le cas où $\mathfrak{n} = \operatorname{Im} \operatorname{ad} f$. Les arguments employés peuvent s'adapter sans difficultés à cette situation plus générale.

On peut aussi utiliser les arguments donnés par P. Slodowy [SL]. En effet, il suffit de vérifier que le déterminant de la matrice $C_N(q)$ est indépendant de la variable $q$. Pour cela, on utilise une action $\rho$ de $\mathbb{C}^*$ sur la variété $N$, via l'élément $h^+$, introduite par T. A. Springer et R. Steinberg [SP-ST, paragraphe 4] et définie de la manière suivante : On considère tout d'abord l'application $\lambda\colon \mathbb{C}^* \to G$ donnée par $\forall t \in \mathbb{C}^*, \lambda(t) = \exp \lambda_t h^+$, où $\lambda_t$ est un nombre complexe tel que $e^{\lambda_t} = t$.

Dans ces conditions, on a

$$\forall t \in \mathbb{C}^*, \forall X \in \mathfrak{g}(i), \quad \operatorname{Ad} \lambda(t).X = t^i X.$$

On obtient alors une action de $\mathbb{C}^*$ sur la variété $N$ à l'aide de la formule

$$\forall t \in \mathbb{C}^*, \forall v \in N, \quad \rho(t).v = t^{-2} \operatorname{Ad} \lambda(t).v.$$

On peut, sans pertes de généralité, supposer que chaque $\overline{Z_i}$ de la base considérée est un vecteur de poids $-n_i$ et, puisque le supplémentaire a été choisi ad $h^+$-invariant, que chaque $X_j$ est un vecteur poids, de poids $\nu_j$.

On fait agir $\mathbb{C}^*$ sur le coefficient $C_N(q)_{l,m}$, par $\rho$, de la manière suivante :

$$\rho(t).C_N(q)_{l,m} = C_N(\rho(t^{-1}).q)_{l,m}.$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\rho(t).C_N(q)_{l,m} &= C_N(\rho(t^{-1}).q)_{l,m} \\
&= K(\rho(t^{-1})(e+q), [X_l, X_m]) \\
&= t^2 K(\operatorname{Ad} \lambda(t^{-1})(e+q), [X_l, X_m]) \\
&= t^2 K(e+q, \operatorname{Ad} \lambda(t)[X_l, X_m]) \\
&= t^{2+\nu_l+\nu_m} K(e+q, [X_l, X_m]) \\
&= t^{2+\nu_l+\nu_m} C_N(q)_{l,m}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, suivant la définition de $\rho$, on a

$$\rho(t).(q_1, \ldots, q_k) = (t^{-2-n_1} q_1, \ldots, t^{-2-n_k} q_k).$$

Ceci implique que chaque coefficient $C_N(q)_{l,m}$ est quasi-homogène au sens de Slodowy, c'est à dire satisfait à la propriété suivante :

$$C_N(t^{2+n_1}q_1,\ldots,t^{2+n_k}q_k)_{l,m} = t^{2+\nu_l+\nu_m}C_N(q_1,\ldots,q_k)_{l,m}. \tag{2}$$

Soit $\Delta_N(q)$ le déterminant de la matrice $C_N(q)$. On a

$$\begin{aligned}\Delta(\rho(t^{-1}).(q_1,\ldots,q_k)) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon_\sigma\prod_i C_N(\rho(t^{-1}).(q_1,\ldots,q_k))_{i,\sigma(i)}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon_\sigma\prod_i t^{2+\nu_i+\nu_{\sigma(i)}}C_N(q_1,\ldots,q_k)_{i,\sigma(i)}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon_\sigma\Big(\prod_i t^{2+\nu_i+\nu_{\sigma(i)}}\Big)\prod_i C_N(q_1,\ldots,q_k)_{i,\sigma(i)}.\end{aligned}$$

Or, en se servant de la théorie classique associée à la décomposition de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{s}$-modules, on obtient

$$\forall\sigma\in\mathcal{S}_n,\quad \sum_i\nu_{\sigma(i)} = \sum_i\nu_i = -\sum_k n_k = -p.$$

Il s'en suit que

$$\Delta_N(t^{2+n_1}q_1,\ldots,t^{2+n_k}q_k) = \Delta_N(q_1,\ldots,q_k).$$

Compte-tenu de la définition des coefficients de $C_N(q)$, le polynôme $\Delta_N(q)$ possède un terme constant non nul. Ceci implique donc que ce déterminant est constant.

Il s'en suit que la matrice inverse de $C_N(q)$ dépend polynômialement de la variable $q$, ce qui démontre le théorème.

**2.4** A l'aide de ce qui précède, on peut donc définir, pour chaque structure transverse $N$ associée à un supplémentaire $\mathfrak{n}\in\mathcal{N}_h$, une notion de degré. Pour cela, on considère le degré $d_{N,i,j}(\Lambda)$ du polynôme $\Lambda_N(q)_{i,j}$. Puis on pose :

$$\deg_N(\Lambda) = \sup_{(i,j)\in[1,k]^2}\deg_{N,i,j}.$$

Dans [DA], P. A. Damianou a calculé les degrés des structures transverses des orbites nilpotentes adjointes de $gl(n,\mathbb{C})$, pour $n\le 7$, associées à un certain supplémentaire du centralisateur.

Il est naturel alors de se poser la question suivante :

***Question 1*** L'ensemble $\{\deg_N(\Lambda),\mathfrak{n}\in\mathcal{N}_h\}$ est-il réduit à un singleton, c'est à dire peut-on dire que le degré d'une structure transverse est indépendant du choix d'un supplémentaire ad $h^+$-invariant ?

La réponse est non comme le montre l'exemple qui va suivre.

**2.5** On suppose que $\mathfrak{g} = sl(4,\mathbb{C})$ et on considère l'orbite nilpotente associée à la partition $(3,1)$. On note $(h^+, e, f)$ le $sl_2$-triplet correspondant comme dans §2.2. La caractéristique de cette orbite est $(2,0,2)$, sa hauteur est 4. La base de racines simples $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ vérifie alors :

$$\alpha_1(h^+) = 2, \quad \alpha_2(h^+) = 0, \quad \alpha_3(h^+) = 2.$$

Dans ces conditions, on peut écrire

$$e = X_{\alpha_1} + X_{\alpha_2+\alpha_3}, \quad h^+ = 2H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + 2H_{\alpha_3}.$$

Une base de vecteurs-poids de $\mathfrak{g}^e$ est donnée par

$$Z_1 = H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} - H_{\alpha_3}, \quad Z_2 = X_{\alpha_1} + X_{\alpha_2+\alpha_3}, \quad Z_3 = X_{\alpha_3},$$
$$Z_4 = X_{\alpha_1+\alpha_2}, \quad Z_5 = X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}.$$

Considérons ensuite les vecteurs suivants :

$$\begin{array}{llll} X_1 = H_{\alpha_1}, & X_2 = H_{\alpha_2+\alpha_3}, & X_3 = X_{\alpha_1}, & X_4 = X_{\alpha_2} \\ X_5 = X_{-\alpha_2}, & X_6 = X_{-\alpha_1}, & X_7 = X_{-\alpha_3}, & X_8 = X_{-\alpha_1-\alpha_2} \\ X_9 = X_{-\alpha_2-\alpha_3}, & X_{10} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}. & & \end{array}$$

Soit $\mathfrak{n}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par les $(X_i, 1 \le i \le 10)$. Il s'agit bien d'un supplémentaire ad $h^+$-invariant de $\mathfrak{g}^e$.

La base $(\overline{Z_i})$ que nous choisissons pour l'orthogonal $\mathfrak{n}^\perp$ est, à des constantes non nulles près, celle qui est issue de la base de $\mathfrak{g}$, duale de la base $(Z_i, X_j)$ relativement à $K$

$$\overline{Z_1} = H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} - H_{\alpha_3}, \quad \overline{Z_2} = X_{-\alpha_2-\alpha_3} \quad \overline{Z_3} = X_{-\alpha_3},$$
$$\overline{Z_4} = X_{-\alpha_1-\alpha_2}, \quad \overline{Z_5} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}.$$

On va ensuite calculer la matrice $\Lambda'_N(q) = B_N(q)C_N^{-1}(q)D_N(q)$, dont le degré nous donnera celui de la structure transverse $N = e + \mathfrak{n}^\perp$, et on obtient

$$C_N(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -q_4 & 0 & 4q_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4q_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_N(q) = \begin{pmatrix} 0 & -q_2 & 0 & q_4 & q_5 \\ 0 & 2q_2 & q_3 & 0 & q_5 \\ 0 & q_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_4 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 4q_1 & 0 & -q_4 \\ 0 & 0 & 0 & -4q_1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda'_N(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4q_1q_3 & -4q_1q_4 & 0 \\ 0 & -4q_1q_3 & 0 & 4q_2q_1 - 64q_1^3 & -\frac{2}{3}q_3q_2 + 16q_1^2q_3 \\ 0 & 4q_1q_4 & -4q_1q_2 + 64q_1^3 & 0 & \frac{2}{3}q_4q_2 - 16q_1^2q_4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}q_3q_2 - 16q_1^2q_3 & -\frac{2}{3}q_4q_2 + 16q_1^2q_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci implique que le degré de la structure transverse $N$ est 3.

Considérons maintenant le sous-espace $\mathfrak{n}'$ de $\mathfrak{g}$ engendré par les $(X'_i, 1 \leq i \leq 10)$, définis par

$$X'_1 = H_{\alpha_1}, \quad X'_2 = H_{\alpha_2}, \quad X'_i = X_i, \quad \forall i, 3 \leq i \leq 10.$$

Il s'agit encore d'un supplémentaire ad $h^+$-invariant de $\mathfrak{g}^e$.

La base $(\overline{Z_i})$ de $\mathfrak{n}'^{\perp}$ est alors la suivante

$$\overline{Z_1} = H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + 3H_{\alpha_3}, \quad \overline{Z_2} = X_{-\alpha_2-\alpha_3}, \quad \overline{Z_3} = X_{-\alpha_3},$$
$$\overline{Z_4} = X_{-\alpha_1-\alpha_2}, \quad \overline{Z_5} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}.$$

On obtient, cette fois, pour la structure transverse $N' = e + \mathfrak{n}'^{\perp}$

$$C_{N'}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{N'}(q) = \begin{pmatrix} 0 & -q_2 & 0 & q_4 & q_5 \\ 0 & q_2 & -q_3 & q_4 & 0 \\ 0 & q_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_4 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & -4q_1 & 0 & -q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & -4q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4q_1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda'_{N'}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12q_1q_3 & 12q_1q_4 & 0 \\ 0 & 12q_1q_3 & 0 & 0 & -2q_3q_2 \\ 0 & -12q_1q_4 & 0 & 0 & 2q_4q_2 \\ 0 & 0 & 2q_3q_2 & -2q_4q_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci nous montre que, dans ce cas, la structure transverse $N'$ est de degré 2.

Il semble, donc, en particulier, que les degrés calculés par Damianou [DA] ne puissent être considérés comme intrinséques, mais plutôt dépendants du supplémentaire choisi pour les calculs.

**2.6** On peut également se poser la question de savoir si le théorème 2.3 est encore vrai pour un supplémentaire dans $\mathcal{N}$ qui n'est pas dans $\mathcal{N}_h$. Si l'on reprend encore une fois l'exemple de l'orbite sous-régulière de $sl_4(\mathbb{C})$, on constate que la réponse est non.

On considère donc à nouveau l'orbite $(3,1)$ et les notations de §2.5. Soit $\mathfrak{n}_1$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, engendré par les vecteurs $(X_i'')$, $1 \leq i \leq 10$, définis de la manière suivante :

$$X_1'' = H_{\alpha_1}, \quad X_2'' = H_{\alpha_2}, \quad X_3'' = X_{\alpha_1}, \quad X_4'' = X_{\alpha_2},$$
$$X_5'' = X_{-\alpha_2}, \quad X_6'' = X_{-\alpha_1} + X_{\alpha_3}, \quad X_7'' = X_{-\alpha_3}, \quad X_8'' = X_{-\alpha_1-\alpha_2},$$
$$X_9'' = X_{-\alpha_2-\alpha_3}, \quad X_{10}'' = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}.$$

Il s'agit bien d'un supplémentaire de $\mathfrak{g}^e$ dans $\mathfrak{g}$. Cependant, il est facile de vérifier que ce supplémentaire n'est pas ad $h^+$-invariant.

Soit $N_1 = e + \mathfrak{n}_1^\perp$ la structure transverse correspondante. La base choisie pour l'orthogonal $\mathfrak{n}_1^\perp$ est la suivante :

$$\overline{Z_1} = H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + 3H_{\alpha_3}, \quad \overline{Z_2} = X_{-\alpha_2-\alpha_3}, \quad \overline{Z_3} = X_{-\alpha_3} - X_{\alpha_1},$$
$$\overline{Z_4} = X_{-\alpha_1-\alpha_2}, \quad \overline{Z_5} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}.$$

On se place maintenant dans l'ouvert $U_1 = e + V_1$ de $N_1$ défini par

$$V_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{5} q_i \overline{Z_i}, q_3 \neq 1 \right\}.$$

Les calculs donnent alors

$$
C_{N_1}(q) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2(1-q_3) & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2q_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & q_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -q_4 & 0 & 0 & q_2 & 0 & 1-q_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
2(1-q_3) & -1+2q_3 & 0 & -q_2 & 0 & 0 & 4q_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4q_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1+q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
D_{N_1}(q) = \begin{pmatrix}
0 & -q_2 & 0 & q_4 & q_5 \\
0 & q_2 & -q_3 & q_4 & 0 \\
0 & q_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -q_4 & q_2 & 0 & 0 \\
0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\
4q_3 & 0 & 0 & -q_5 & q_2 \\
0 & 0 & -4q_1 & 0 & -q_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & q_3 \\
0 & -4q_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & q_3 & 0 & 0 & -4q_1
\end{pmatrix}.
$$

On vérifie que la matrice $C_{N_1}(q)$ est inversible, pour $q \in V_1$, et on obtient :

$$
\Lambda'_{N_1}(q) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 4q_3^2 & -8q_3q_4 & -4q_3q_5 \\
0 & 0 & 12q_1q_3(q_3-1) & 12q_1q_4(1-2q_3) & -12q_1q_3q_5 \\
-4q_3^2 & -12q_1q_3(q_3-1) & 0 & q_3q_5 & -2q_2q_3 \\
8q_1q_4 & -12q_1q_4(1-2q_3) & -q_3q_5 & 0 & q_5^2 + 2q_2q_4\frac{2q_3-1}{q_3-1} \\
4q_1q_5 & 12q_1q_3q_5 & 2q_2q_3 & -q_5^2 - 2q_2q_4\frac{2q_3-1}{q_3-1} & 0
\end{pmatrix}.
$$

On voit bien que cette structure n'est pas polynômiale.

## 3 Orbites adjointes conormales : quelques résultats

**3.1** Supposons, maintenant, qu'il existe, dans $\mathcal{N}_h$ un supplémentaire $\mathfrak{n}_0$ qui soit une algèbre de Lie et considérons la structure transverse associée $N_0 = e + \mathfrak{n}_0^{\perp}$. Suivant la terminologie introduite par M. Roberts [RO], une orbite vérifiant une telle propriété est dite *conormale*.

Il est clair que, dans ce cas, la matrice $C_{N_0}(q)$ ne dépend pas de la variable $q$. Il s'en suit que :

$$\deg_{N_0}(\Lambda) \leq 2.$$

On dit alors que la structure transverse $N_0$ est "*quadratique*". Un tel résultat a été donné par Oh [OH].

Il semble donc intéressant de déterminer les orbites nilpotentes adjointes conormales. On dispose, à ce sujet, de deux résultats que nous allons expliciter dans les paragraphes suivants.

### 3.2 Orbites conormales et orbites sphériques

Considérons la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, $H$ le sous-groupe de Cartan correspondant dans $G$, $B$ le sous-groupe de Borel de $G$, contenant $H$, associé à un système de racines positives $\Delta^+$ choisi dans $\Delta(\mathfrak{h})$. $U$ sera le radical unipotent de $B$. Soit $\theta$ l'involution de Cartan sur $G$, telle que l'on ait $\theta(B) \cap B = H$.

On rappelle alors qu'une orbite nilpotente est dite "*sphérique*" si cette orbite contient une $B$-orbite dense. Ces orbites ont été classifiées, par exemple par D. Panyushev [PA1] : ce sont celles de hauteur inférieure ou égale à 3. En particulier, les orbites nilpotentes sphériques de $sl_n(\mathbb{C})$ sont toutes les orbites de hauteur inférieure à 2, définies par les partitions suivantes : $(2^a, 1^b)$.

Soit $X$ une $G$-variété irréductible et $X^*$ la variété $X$ munie de l'action de $G$ donnée par :

$$\forall g \in G, \forall x^* \in X^*, \quad g.x^* = \theta(g).x^*,$$

$G$ agit alors sur $X \times X^*$ par l'action diagonale, soit $g.(x, y) = (g.x, \theta(g).y)$.

***Définition***

- Un sous-groupe $A$ de $G$ est appelé "stabilisateur en position générale" et noté s.p.g. s'il existe un ouvert $\Omega$ de $X$ tel que, pour tout $y \in \Omega, A^y$ est conjugué à $A$.
- Dans ce cas, les points de $\Omega$ sont appelés "points en position générale" et notés p.g.p.

Du fait de la semi-continuité de la fonction dimension, tout p.g.p. a une $G$-orbite dans $X$ qui est de dimension maximale.

D. Panyushev, [PA2, théorème 1.2.2], énonce et démontre le résultat suivant :

***Théorème 3.1*** *Il existe un point $z = (x, x^*) \in X \times X^*$ tel que*

(1) *$U^x$ est un s.p.g. pour l'action de $U$ dans $X$.*
(2) *$B^x$ est un s.p.g. pour l'action de $B$ dans $X$.*
(3) *$S = G^z = G^x \cap \theta(G^x)$ est un s.p.g. pour l'action de $G$ dans $X \times X^*$.*
(4) *$U^x = U \cap S$, $B^x = B \cap S$.*
(5) *Il existe $t \in H$, $\Delta^+$-dominant, tel que*

$$(G^t)' \subset S \subset G^t.$$

*Ici, $(G^t)'$ désigne le sous-groupe dérivé de $G^t$.*

On suppose maintenant que $X = O$ est une $G$-orbite, on considère le point $z = (x, x^*)$ de $O \times O^*$ donné par le théorème 3.1, appelé encore "point canonique" et $t \in H$ l'élément satisfaisant au (5). On pose :

$$Q = G^x, \quad L = G^t.$$

Dans ce cas, $S = Q \cap \theta(Q)$ est un sous-groupe réductif et $\theta$-invariant de $Q$. Notons $\mathfrak{b}, \mathfrak{l}, \mathfrak{q}, \mathfrak{s}$ les algèbres de Lie respectives de $B, L, Q, S$. Soit $\mathfrak{t}_0$ l'algèbre de Lie de $S \cap H$ et $\mathfrak{t}_1$ l'orthogonal de $\mathfrak{t}_0$ dans $\mathfrak{t}$, vis-à-vis de $K$. D'après le théorème 3.1, on sait que $\mathfrak{l} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}_1$. On pose : $P = S.B$.

Comme $B \cap Q = B \cap S$, on a donc $P \cap Q = S$.

***Lemme 3.2*** *P est un sous-groupe parabolique de G contenant B.*

**Preuve** Posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} + \mathfrak{b}$. On va montrer en fait que, pour toute racine positive $\alpha$ telle que $X_\alpha \in \mathfrak{s}$ et pour toute racine positive $\beta$ telle que $\beta - \alpha$ soit une racine, alors le vecteur-racine $X_{\beta-\alpha}$ est dans $\mathfrak{p}$. Si $\beta - \alpha \geq 0$ , ceci est clair. Supposons donc $\beta - \alpha \leq 0$. On a donc $\beta(t) - \alpha(t) = \beta(t) \leq 0$. Comme $t$ est dominant, ceci implique que $\beta(t) = 0$ et donc que $X_\beta \in \mathfrak{s}$. Ainsi, $\mathfrak{p}$ est une algèbre de Lie. Il suffit alors d'utiliser le (5) du théorème 3.1 pour en déduire que $P$ est un groupe, ce qui démontre le résultat.

***Théorème 3.3*** *Toute orbite nilpotente sphérique est conormale.*

**Preuve** On se donne une $G$-orbite nilpotente sphérique adjointe $O$ et on conserve les notations précédentes. On peut écrire $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}_1 \oplus {}^u\mathfrak{p}$. D'autre part, on a $P.x = B.x$ et, comme $x$ est un p.g.p. pour l'action de $B$ dans $O$, l'orbite $B.x$ est de dimension maximale. Comme, de plus, $O$ est sphérique, cette $B$-orbite est dense dans $G.x$. Il s'en suit que

$$\dim P.x = \dim G.x = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{q}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\dim(\mathfrak{q} + \mathfrak{p}) &= \dim \mathfrak{q} + \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{s}\\ &= \dim \mathfrak{q} + \dim \mathfrak{p}^x + \dim P.x - \dim \mathfrak{s}\\ &= \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{p}^x - \dim \mathfrak{s}.\end{aligned}$$

Comme $\mathfrak{s} = \mathfrak{p}^x$, on en déduit que

$$\dim(\mathfrak{q} + \mathfrak{p}) = \dim \mathfrak{g}.$$

On a, donc, pour une telle orbite

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q} + \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \oplus (\mathfrak{t}_1 \oplus {}^u\mathfrak{p}).$$

Posons $\mathfrak{s}_O = \mathfrak{t}_1 \oplus {}^u\mathfrak{p}$. Alors, il est clair que $\mathfrak{s}_O$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{q}$ est le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ d'un point de $O$, ce qui démontre le théorème 3.3.

## 3.3 Orbites conormales dans $\mathbf{sl_n}(\mathbb{C})$

Nous nous intéressons maintenant aux orbites conormales de $sl_n(\mathbb{C})$. Certaines de ces orbites ont déjà été exhibées par M. Rais [RA]. Le même auteur a aussi prouvé, dans des notes non publiées, que toute orbite nilpotente minimale était conormale.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

***Théorème 3.4*** *Soit O une orbite nilpotente de $sl_n(\mathbb{C})$ de partition $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ telle que :*

$$\forall i, j, 1 \leq i, j \leq s, \quad |p_i - p_j| \leq 1.$$

*Alors, O est conormale.*

Il faut noter que cette classe d'orbites nilpotentes contient les orbites sphériques et l'orbite régulière.

La démonstration de ce théorème est essentiellement technique et repose sur la détermination explicite du centralisateur d'un élément convenablement choisi de l'orbite.

On reprend à ce sujet les notations introduites dans §2.2. La détermination des caractéristiques de la famille d'orbites nilpotentes de $sl_n$ donnée dans l'énoncé du théorème 3.4 permet de décomposer celle-ci selon les deux types de partitions suivants :

Type I $(p^r)$, $pr = n$. La caractéristique est alors : $(B^{p-1}, 0^{r-1})$ où $B = (0^{r-1}, 2)$.
Type II $(p^r, (p-1)^s), rp + s(p-1) = n$. La caractéristique est alors : $(B^{p-1}, 0^{r-1})$ où $B = (0^{r-1}, 1, 0^{s-1}, 1)$.

## 3.4 Preuve du théorème 3.4 : le cas du type I

Soit $O = (p^r)$ une orbite de type I. L'ensemble $\Pi(\mathfrak{h})$ des racines simples peut se décrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_{kr}(h^+) &= 2, \forall k,\ 1 \leq k \leq p-1 \\ \alpha_{kr+i}(h^+) &= 0, \forall (k,i) \in\ 0 \leq k \leq p-1,\ 1 \leq i \leq r-1 \\ \Pi(\mathfrak{h}) &= \{\alpha_{kr}, \forall k,\ 1 \leq k \leq p-1\} \\ &\qquad \cup \{\alpha_{kr+i}, \forall (k,i)\ 0 \leq k \leq p-1,\ 1 \leq i \leq r-1\}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \beta_{i,j} &= \sum_{s=i}^{j} \alpha_s, \quad \forall i, j,\ i \leq j, \\ X(i,j) &= X_{\beta_{i,j}}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous noterons dorénavant $sl_q(\Pi')$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, isomorphe à $sl_q(\mathbb{C})$, engendrée par le système de racines simples $\Pi', \Pi' \subset \Pi(\mathfrak{h}), \natural\Pi' = q-1$.

Considérons maintenant la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres suivant l'action de ad $h^+$, soit

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{m=-p+1}^{p-1} \mathfrak{g}(2m),$$

le calcul nous donne, pour tout entier $m$ tel que $1 \leq m \leq p-1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(0) &= \bigoplus_{k=0}^{p-1} sl_r(\alpha_{kr+i}, 1 \leq i \leq r-1) \oplus \langle H_{\alpha_{kr}}, 1 \leq k \leq p-1 \rangle, \\ \mathfrak{g}(2m) &= \langle X(kr+i, (k+m)r+j), 0 \leq k \leq p-m-1,\ 1 \leq i \leq r,\ 0 \leq j \leq r-1 \rangle. \end{aligned}$$

Le génerateur $e$ de l'orbite est alors donné par

$$e = \sum_{i=1}^{(p-1)r} X(i, p-1+i).$$

Venons-en au stabilisateur $\mathfrak{g}^e$ de $e$ dans $\mathfrak{g}$. On a la décomposition

$$\mathfrak{g}^e = \bigoplus_{m=0}^{p-1} \mathfrak{g}^e(2m).$$

Considérons les vecteurs suivants :

$$\forall i, 1 \leq i \leq r-1, \quad X_i^+ = \sum_{k=0}^{p-1} X_{\alpha_{kr+i}},$$

$$X_i^- = \sum_{k=0}^{p-1} X_{-\alpha_{kr+i}},$$

$$H_i = \sum_{k=0}^{p-1} H_{\alpha_{kr+i}}.$$

La famille $\mathcal{F}_0(e) = (X_i^+, X_i^-, H_i, 1 \leq i \leq r-1)$ engendre une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, isomorphe à $sl_r(\mathbb{C})$. Nous la noterons $sl_r(\mathcal{F}_0(e))$.

Le calcul nous donne alors, pour tout entier $m$ tel que $1 \leq m \leq p-1$

$$\mathfrak{g}^e(0) = sl_r(\mathcal{F}_0(e)),$$

$$\mathfrak{g}^e(2m) = \left\langle \sum_{k=0}^{p-1} X(kr+i, (k+m)r+j),\ 1 \leq i \leq r,\ 0 \leq j \leq r-1 \right\rangle.$$

L'ensemble $\{\alpha_{kr+i}, 0 \leq k \leq p-2, 1 \leq i \leq r-1\} \cup \{\alpha_{kr}, 1 \leq k \leq p-2\}$ définit un sous-système de racines de $\Pi(\mathfrak{h})$, que nous noterons $\Pi_p(\mathfrak{h})$.

Posons

$$\mathfrak{g}_p = sl_{(p-1)r}(\Pi_p(\mathfrak{h})).$$

Considérons maintenant la sous-algèbre parabolique maximale $\mathfrak{p}_p$ de $\mathfrak{g}$, obtenue à partir du système de racines simples $\Pi \backslash \{\alpha_{(p-1)r}\}$. Soit $\mathfrak{p}_p^-$ la sous-algèbre parabolique opposée et ${}^u\mathfrak{p}_p^-$ son radical unipotent. On a $\mathfrak{p}_p^- = \mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{a}_p \oplus {}^u\mathfrak{p}_p^-$, avec

- $\mathfrak{m}_p = \mathfrak{g}_p \oplus sl_r(\alpha_{(p-1)r+i}, 1 \leq i \leq r-1)$,
- $\mathfrak{a}_p = \langle H_{\alpha_{(p-1)r}} \rangle$.

Soit, enfin

$$\mathfrak{s}_p = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{a}_p \oplus {}^u\mathfrak{p}_p^-.$$

Il est clair, alors, que $\mathfrak{s}_p$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, que cette algèbre est ad $h^+$-invariante et que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^e \oplus \mathfrak{s}_p$.

Ceci nous donne le résultat souhaité, en ce qui concerne le type I.

### 3.5 Preuve du théorème 3.4 : le cas du type II

Soit $O = (p^r, (p-1)^s)$ une orbite de type II. Posons $T = r + s$.

L'ensemble $\Pi(\mathfrak{h})$ des racines simples se décrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\alpha_{kT+r}(h^+) &= 1, \quad \forall k,\ 0 \le k \le p-2,\\
\alpha_{(k+1)T}(h^+) &= 1, \quad \forall k,\ 0 \le k \le p-2,\\
\alpha_{kT+i}(h^+) &= 0, \quad \forall (k,i),\ 0 \le k \le p-1, 1 \le i \le r-1,\\
\alpha_{kT+i}(h^+) &= 0, \quad \forall (k,i),\ 0 \le k \le p-2,\ r+1 \le i \le T-1,\\
\Pi(\mathfrak{h}) &= \{\alpha_{kT+i} \mid 0 \le k \le p-2, 1 \le i \le T\}\\
&\qquad \cup \{\alpha_{(p-1)T+i} \mid 1 \le i \le r-1\}.
\end{aligned}$$

On considère ensuite la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres suivant l'action de ad $h^+$, soit :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{m=-p+1}^{p-1} \mathfrak{g}(2m) \oplus \mathfrak{g}(2m-1)$$

le calcul nous donne, pour tout entier $m, 1 \le m \le p-1$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}(0) &= \langle H_{\alpha_{kT+r}}, H_{\alpha_{(k+1)T}}, 0 \le k \le p-2\rangle \oplus \bigoplus_{k=0}^{p-1} sl_r(\alpha_{kT+i}, 1 \le i \le r-1)\\
&\quad \bigoplus_{k=0}^{p-2} sl_s(\alpha_{kT+i}, r+1 \le i \le T-1),\\
\mathfrak{g}(2m) &= \Big\langle X(kT+i, (k+m)T+j),\ 1 \le i \le r, 0 \le j \le r-1,\\
&\qquad 0 \le k \le p-m-1\Big\rangle\\
&\quad \oplus \Big\langle X(kT+i, (k+m)T+j),\ r+1 \le i \le T, r \le j \le T-1,\\
&\qquad 0 \le k \le p-m-1\Big\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(2m-1) = \Big\langle & X(kT+i,(k+m-1)T+j),\ 1 \le i \le r, r \le j \le T-1,\\ & 0 \le k \le p-m-1 \Big\rangle \\ & \oplus \Big\langle X(kT+i,(k+m)T+j), r+1 \le i \le T, 0 \le j \le r-1,\\ & 0 \le k \le p-m-1 \Big\rangle .\end{aligned}$$

Le générateur $e$ de l'orbite est alors donné par

$$e = \sum_{i=1}^{n-T} X(i, i+T-1).$$

Considérons les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} X_i^+ &= \sum_{k=0}^{p-1} X_{\alpha_{kT+i}},\\ X_i^- &= \sum_{k=0}^{p-1} X_{-\alpha_{kT+i}},\\ H_i &= \sum_{k=0}^{p-1} H_{\alpha_{kT+i}}.\end{aligned}$$

Les familles $\mathcal{F}_{0,r}(e) = (X_i^+, X_i^-, H_i, 1 \le i \le r-1)$ et $\mathcal{F}_{0,s}(e) = (X_i^+, X_i^-, H_i, r+1 \le i \le T-1)$ engendrent des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, isomorphes respectivement à $sl_r(\mathbb{C})$ et $sl_s(\mathbb{C})$. Nous les noterons $sl_r(\mathcal{F}_{0,r}(e))$ et $sl_s(\mathcal{F}_{0,s}(e))$.

Venons-en au stabilisateur $\mathfrak{g}^e$ de $e$ dans $\mathfrak{g}$. On a la décomposition

$$\mathfrak{g}^e = \bigoplus_{m=0}^{p-1} \mathfrak{g}^e(2m) \oplus \mathfrak{g}^e(2m-1).$$

On notera $\mathfrak{z}_0(e)$ le centre de $\mathfrak{g}^e(0)$. Pour des raisons de dimension, on vérifie qu'il s'agit d'un sous-espace de dimension 1 de $\mathfrak{h}$.

Le calcul nous donne, pour tout entier $m$, $1 \le m \le p-1$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^e(0) &= sl_r(\mathcal{F}_{0,r}(e)) \oplus sl_s(\mathcal{F}_{0,s}(e)) \oplus \mathfrak{z}_0(e),\\ \mathfrak{g}^e(2m) &= \Big\langle \sum_{k=0}^{p-m-1} X(kT+i,(k+m)T+j), 1 \le i \le r, 0 \le j \le r-1 \Big\rangle \\ &\quad \oplus \Big\langle \sum_{k=0}^{p-m-1} X(kT+i,(k+m)T+j), r+1 \le i \le T, r \le j \le T-1 \Big\rangle ,\end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}^e(2m-1) = \Big\langle \sum_{k=0}^{p-m-1} X(kT+i,(k+m-1)T+j), 1 \leq i \leq r, r \leq j \leq T-1 \Big\rangle$$
$$\oplus \Big\langle \sum_{k=0}^{p-m-1} X(kT+i,(k+m)T+j), r+1 \leq i \leq T, 0 \leq j \leq r-1 \Big\rangle.$$

L'ensemble $\{\alpha_{kT+i},\ 0 \leq k \leq p-2, 1 \leq i \leq r-1\} \cup \{\alpha_{kT+i},\ 0 \leq k \leq p-3, r \leq i \leq T\}$ définit un sous-système de racines simples de $\Pi(\mathfrak{h})$, de cardinal $n-T-1$, que nous noterons $\Pi_p(\mathfrak{h})$. Posons, suivant les notations introduites précedemment,

$$\mathfrak{g}_p = sl_{n-T}(\Pi_p).$$

Considérons maintenant la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_p$ de $\mathfrak{g}$, obtenue à partir du système de racines simples $\Pi \backslash \{\alpha_{(p-2)T+r}, \alpha_{(p-1)T}\}$ et $\mathfrak{p}_p^-$ la sous-algèbre parabolique opposée. On a : $\mathfrak{p}_p^- = \mathfrak{m}_p \oplus \mathfrak{a}_p \oplus {}^u\mathfrak{p}_p^-$, avec

$$\mathfrak{m}_p = \mathfrak{g}_p \oplus sl_s(\alpha_{(p-2)T+i}, r+1 \leq i \leq T-1) \oplus sl_r(\alpha_{(p-1)T+i}, 1 \leq i \leq r-1),$$
$$\mathfrak{a}_p = \langle H_{\alpha_{(p-1)T}}, H_{\alpha_{(p-2)T+r}} \rangle.$$

On choisit, ensuite, un supplémentaire quelconque de $\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{a}_p$ dans $\mathfrak{a}_p$. Il s'agit d'un espace de dimension 1, que nous noterons $\widetilde{\mathfrak{a}_p}$.

Soit, enfin, $\mathfrak{s}_p = \mathfrak{g}_p \oplus \widetilde{\mathfrak{a}_p} \oplus^u \mathfrak{p}_p$.

On vérifie que $\mathfrak{s}_p$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, que cette algèbre est ad $h^+$-invariante et que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^e \oplus \mathfrak{s}_p$.

Ceci démontre complètement le théorème 3.4.

Pour finir, je formule également la conjecture suivante :

***Conjecture*** *Les seules orbites nilpotentes conormales de $sl_n(\mathbb{C})$ sont celles données par le théorème 3.3.*

## 3.6 Retour aux structures transverses quadratiques

L'exemple de l'orbite $(3,1)$ du §2.5 nous montre qu'il existe des structures transverses quadratiques à une orbite adjointe correspondant à un supplémentaire qui n'est pas une algèbre de Lie.

On peut alors se poser la question suivante :

***Question 2*** La structure transverse à une orbite nilpotente adjointe conormale est-elle toujours quadratique ?

Encore une fois, la réponse est non comme le montre l'exemple suivant.

On considère cette fois l'orbite nilpotente de partition $(3,2)$ dans $\mathfrak{g} = sl_5(\mathbb{C})$. Cette orbite est conormale, d'après le théorème 3.3. Soit $(h^+, e, f)$ le $sl_2$-triplet associé, $(1,1,1,1)$ la caractéristique, $(\alpha_i), 1 \leq i \leq 4$, le système de racines simples correspondant. On a

$$e = X_{\alpha_1+\alpha_2} + X_{\alpha_2+\alpha_3} + X_{\alpha_3+\alpha_4}.$$

Une base de vecteurs-poids de $\mathfrak{g}^e$ est donnée par

$$
\begin{aligned}
&Z_1 = 2H_{\alpha_1} - H_{\alpha_2} + H_{\alpha_3} - 2H_{\alpha_4}, && Z_2 = X_{\alpha_1} + X_{\alpha_3},\\
&Z_3 = X_{\alpha_2} + X_{\alpha_4}, && Z_4 = X_{\alpha_1+\alpha_2} + X_{\alpha_3+\alpha_4},\\
&Z_5 = X_{\alpha_2+\alpha_3}, && Z_6 = X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3},\\
&Z_7 = X_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, && Z_8 = X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}.
\end{aligned}
$$

Soit $\mathfrak{n}_0$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ donnée par la démonstration du théorème 3.3, telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^e \oplus \mathfrak{n}_0$. La structure transverse $N_0 = e + \mathfrak{n}_0^{\perp}$ est donc quadratique.

Considérons maintenant le supplémentaire $\mathfrak{n}_f = \operatorname{Im} \operatorname{ad} f$ de $\mathfrak{g}^e$, $\mathfrak{n}_f^{\perp} = \mathfrak{g}^f$ et $N_f = e + \mathfrak{g}^f$. On utilise la base suivante de $\mathfrak{n}_f$ :

$$
\begin{aligned}
&X_1 = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, && X_2 = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, && X_3 = X_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4},\\
&X_4 = X_{-\alpha_1-\alpha_2}, && X_5 = X_{-\alpha_2-\alpha_3}, && X_6 = X_{-\alpha_3-\alpha_4},\\
&X_7 = X_{-\alpha_1}, && X_8 = X_{-\alpha_2}, && X_9 = X_{-\alpha_3},\\
&X_{10} = X_{-\alpha_4}, && X_{11} = H_{\alpha_1+\alpha_2}, && X_{12} = H_{\alpha_2+\alpha_3},\\
&X_{13} = H_{\alpha_3+\alpha_4}, && X_{14} = X_{\alpha_1} - X_{\alpha_3}, && X_{15} = X_{\alpha_2} - X_{\alpha_4},\\
&X_{16} = X_{\alpha_1+\alpha_2} - X_{\alpha_3+\alpha_4}.
\end{aligned}
$$

La base choisie, pour $\mathfrak{g}^f$, est la suivante :

$$
\begin{aligned}
&\overline{Z_1} = 2H_{\alpha_1} - H_{\alpha_2} + H_{\alpha_3} - 2H_{\alpha_4}, && \overline{Z_2} = X_{-\alpha_1} + X_{-\alpha_3},\\
&\overline{Z_3} = X_{-\alpha_2} + X_{-\alpha_4}, && \overline{Z_4} = X_{-\alpha_1-\alpha_2} + X_{-\alpha_3-\alpha_4},\\
&\overline{Z_5} = X_{-\alpha_2-\alpha_3}, && \overline{Z_6} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3},\\
&\overline{Z_7} = X_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, && \overline{Z_8} = X_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}.
\end{aligned}
$$

On reprend ensuite les notations précédentes et le calcul nous donne

$$
\Lambda_N'(q) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -75q_1^2 & 15q_1q_2 & -5q_1q_2 & \frac{1}{3}q_2^2 & \{z_2,z_7\} & \{z_2,z_8\}\\
0 & 75q_1^2 & 0 & -15q_3q_1 & 5q_3q_1 & \{z_3,z_6\} & -\frac{1}{3}q_3^2 & \{z_3,z_8\}\\
0 & -15q_1q_2 & 15q_3q_1 & 0 & 0 & \{z_4,z_6\} & \{z_4,z_7\} & \{z_4,z_8\}\\
0 & 5q_1q_2 & -5q_3q_1 & 0 & 0 & \{z_5,z_6\} & \{z_5,z_7\} & \{z_5,z_8\}\\
0 & -\frac{1}{3}q_2^2 & -\{z_3,z_6\} & -\{z_4,z_6\} & -\{z_5,z_6\} & 0 & \{z_6,z_7\} & \{z_6,z_8\}\\
0 & -\{z_2,z_7\} & -\{z_3,z_7\} & -\{z_4,z_7\} & -\{z_5,z_7\} & -\{z_6,z_7\} & 0 & \{z_7,z_8\}\\
0 & -\{z_2,z_8\} & -\{z_3,z_8\} & -\{z_4,z_8\} & -\{z_5,z_8\} & -\{z_6,z_8\} & -\{z_7,z_8\} & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\{z_2,z_7\} &= \frac{375}{2}q_1^3 + 10q_5q_1 - 5q_4q_1 - \frac{2}{3}q_2q_3,\\
\{z_2,z_8\} &= -\frac{75}{2}q_1^2q_2 + 10q_1q_6 - \frac{1}{3}q_2q_4,
\end{aligned}
$$

$$\{z_3, z_6\} = \frac{125}{2}q_1^3 - 10q_5q_1 + 5q_4q_1 + \frac{2}{3}q_2q_3,$$

$$\{z_3, z_8\} = -\frac{25}{2}q_1^2q_3 - 10q_1q_7 + \frac{1}{3}q_3q_4,$$

$$\{z_4, z_6\} = -\frac{25}{2}q_1^2q_2 + 2q_2q_5 - \frac{5}{2}q_1q_6$$

$$\{z_4, z_7\} = -\frac{75}{2}q_1^2q_3 - 2q_3q_5 + \frac{5}{2}q_1q_7,$$

$$\{z_4, z_8\} = -\frac{3}{2}q_3q_6 + \frac{3}{2}q_2q_7 + 10q_1q_2q_3,$$

$$\{z_5, z_6\} = \frac{25}{2}q_1^2q_2 - 2q_2q_5 - \frac{5}{2}q_1q_6,$$

$$\{z_5, z_7\} = \frac{25}{2}q_1^2q_3 + 2q_3q_5 + \frac{5}{2}q_1q_7,$$

$$\{z_5, z_8\} = \frac{3}{2}q_3q_6 - \frac{3}{2}q_2q_7 - 5q_1q_2q_3,$$

$$\begin{aligned}\{z_6, z_7\} = {} & \frac{625}{4}q_1^4 - \frac{25}{2}q_1^2q_4 - 5q_1q_2q_3 - 25q_1^2q_5 + 5q_1q_8 \\ & + \frac{1}{6}q_2q_7 + 2q_4q_5 - q_5^2 + \frac{1}{6}q_3q_6,\end{aligned}$$

$$\{z_6, z_8\} = -\frac{125}{4}q_1^3q_2 + \frac{5}{2}q_1q_2q_4 + 5q_1q_2q_5 + \frac{3}{2}q_2^2q_3 - \frac{3}{2}q_2q_8 - q_5q_6 + \frac{4}{3}q_4q_6,$$

$$\{z_7, z_8\} = \frac{125}{4}q_1^3q_3 - \frac{15}{2}q_1q_3q_4 + 25q_1^2q_7 - \frac{3}{2}q_2q_3^2 + \frac{3}{2}q_3q_8 - \frac{4}{3}q_4q_7 + q_5q_7.$$

On constate, alors, que le degré de la structure transverse $N$ est 4.

**Remerciements** Je tiens à remercier tout particulièrement M. Rais et M. Duflo pour les fréquents échanges ou nombreuses discussions fort utiles que nous avons eus sur ce sujet. Je tiens aussi à remercier M. Saint-Germain pour l'attention qu'il a su porter à ce travail.

## Références


[BE-GO] P. G. Bergmann et I. Goldberg, *Dirac bracket transformations in phase space.* Phys. Rev. **98**(1955), 531–538.

[CU-RO] R. Cushman et M. Roberts, *Poisson structures transverse to coadjoint orbits.* Bull. Sci. Math. **126**(2002), 525–534.

[DA] P. A. Damianou, *Transverse Poisson structures of coadjoint orbits.* Bull. Sci. Math. **120**(1996), 195–214.

[DI] J. Dixmier, *Enveloping Algebras.* Graduate Studies in Mathematics 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[OH] Y.-G. Oh, *Some remarks on the transverse Poisson structures of coadjoint orbits.* Lett. Math. Phys. **12**(1986), 87–91.

[PA1] D. Panyushev, *On spherical nilpotent orbits and beyond.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49**(1999), 1453–1476.

[PA2] ———, *Complexity and rank of actions in invariant theory.* J. Math. Science (New York) **95**(1999), 1925–1985.

[RA] M. Raïs, *La représentation coadjointe du groupe affine.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28**(1978), 207–237.

[RO] M. Roberts, C. Wulff, et J. S. W. Lamb, *Hamiltonian systems near relative equilibria.* J. Differential Equations **179**(2002), 562–604.

[SG] M. Saint-Germain, *Poisson algebras and transverse structures.* J. Geom. Phys. **31**(1999), 153–194.

[SL] P. Slodowy, *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups.* Lecture Notes in Mathematics 815, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[SP-ST] T. A. Springer et R. Steinberg, *Conjugacy classes.* Dans : Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, éd. A. Borel, et al., Lecture Notes in Mathematics 131, Springer, Berlin, 1970, pp. 167–266.

[WE] A. Weinstein, *Local structure of Poisson manifolds.* J. Differential Geom. **18**(1986), 523–557.

*UMR 6086 CNRS*
*Département de Mathématiques*
*Téléport 2, BP 30179,*
*Boulevard Marie et Pierre Curie*
*86962 Futuroscope-Chasseneuil Cedex,*
*France*
*e-mail: sabourin@mathlabo.univ-poitiers.fr*