REPRESENTATION THEORY
An Electronic Journal of the American Mathematical Society
Volume 9, Pages 468–506 (August 11, 2005)
S 1088-4165(05)00196-2

ORBITES NILPOTENTES SPHÉRIQUES ET REPRÉSENTATIONS UNIPOTENTES ASSOCIÉES: LE CAS $\mathbf{SL_n}$

HERVÉ SABOURIN

ABSTRACT. Let G be a real simple Lie group and $\mathfrak{g}$ its Lie algebra. Given a nilpotent adjoint G-orbit O, the question is to determine the irreducible unitary representations of G that we can associate to O, according to the orbit method. P. Torasso gave a method to solve this problem if O is minimal. In this paper, we study the case where O is any spherical nilpotent orbit of $sl_n(\mathbb{R})$, we construct, from O, a family of representations of the two-sheeted covering of $SL_n(\mathbb{R})$ with Torasso's method and, finally, we show that all these representations are associated to the corresponding orbit.

0. INTRODUCTION.

Soit G un groupe réel simple, connexe et simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$. G agit sur $\mathfrak{g}^*$, via l'action co-adjointe. "La méthode des orbites", initiée par A. Kirillov dans le cadre des groupes nilpotents, a pour but d'essayer de décrire le dual unitaire de G à l'aide des orbites coadjointes. Le problème est, donc, de déterminer quelles représentations unitaires irréductibles de G on peut associer, selon un sens à définir, à une G-orbite donnée et on peut s'intéresser, en particulier, au cas où cette orbite est nilpotente.

Il existe une manière naturelle d'associer une représentation unitaire irréductible d'un groupe simple G à une G-orbite nilpotente coadjointe O. Soit, en effet, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ la complexifiée de $\mathfrak{g}$, $G_{\mathbb{C}}$ le groupe de Lie complexe correspondant d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et $O_{\mathbb{C}}$ une $G_{\mathbb{C}}$-orbite nilpotente dans le dual $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$. On suppose que l'intersection $O_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}^*$ est non vide. Dans ce cas, cette intersection est une réunion finie de G-orbites et on suppose que O est l'une de ces G-orbites. On sait, par ailleurs, selon un résultat obtenu indépendamment par A. Joseph, W. Borho et J.L. Brylinski ([13], [1]), que si I est un idéal primitif de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et si $Gr(I)$ est l'idéal gradué correspondant dans l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, alors $Gr(I)$ a pour variété des zéros, dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$, l'adhérence de Zariski d'une et une seule orbite nilpotente complexe. Soit $\pi \in \widehat{G}$ et $\operatorname{Ann}\pi$ son annulateur infinitésimal dans $U(\mathfrak{g})$. La représentation π sera dite "associée" à O si la variété des zéros de $Gr(\operatorname{Ann}\pi)$ est l'adhérence de Zariski de $O_{\mathbb{C}}$.

On peut remarquer immédiatement que, si π est associé à O et si $GK\dim(U(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann}\pi)$ désigne la dimension de Gelfand-Kirillov de l'algèbre $(U(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann}\pi)$, alors

Received by the editors June 11, 2003 and, in revised form, April 6, 2005.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 20G05, 22E46, 22E47.

π vérifie la condition (GK) suivante:

$$(\mathbf{GK}) \qquad GK\dim(U(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann}\pi) = \dim O.$$

Une représentation π satisfaisant à (GK) sera dite "GK-associée" à O. Par contre, il n'y a pas de raison a priori qu'une représentation "GK-associée" à O soit "associée" à O.

Il existe en fait une notion plus fine de représentation "associée" introduite par R. Howe ([12]), qui peut se définir ainsi: A chaque $\pi \in \widehat{G}$, on fait correspondre son "front d'onde" $WF(\pi)$, qui est un sous-ensemble du cône nilpotent de $\mathfrak{g}^*$. Etant donnée une G-orbite nilpotente réelle O, on pourrait donc envisager de rechercher les représentations π telles que $WF(\pi)$ soit l'adhérence de O. Cette notion est bien sûr plus précise que celle que nous avons adoptée, mais semble malheureusement peu adaptée à la méthode envisagée.

L'existence d'une représentation associée a été établie, dans le cas où l'orbite co-adjointe est nilpotente minimale, par P. Torasso [22], lorsque G est de rang réel supérieur ou égal à 3, et par R. Brylinski et B. Kostant [3] dans le cas général, selon des méthodes totalement différentes. Dans le premier cas, P. Torasso a mis au point un procédé permettant de donner une construction explicite de le représentation, s'appuyant fortement sur la notion d'orbite "admissible" au sens de M. Duflo [8] et sur une paramétrisation du dual unitaire d'un groupe presque algébrique du même M. Duflo. Dans le deuxième cas, R. Brylinski et B. Kostant ont donné une description du module de Harish-Chandra correspondant à l'aide d'un procédé de quantification d'orbite.

Le point de vue qui nous intéresse, dans ce travail, est celui de P. Torasso et M. Duflo. La méthode utilisée, sur laquelle nous reviendrons en détails plus tard, consiste en fait à s'intéresser aux projections de l'orbite minimale sur les sous-algèbres paraboliques maximales standards, à construire une représentation de chaque sous-groupe parabolique maximal associé à cette projection et à chaque donnée d'admissibilité et, enfin, à considérer le produit amalgamé de ces représentations selon un résultat de J. Tits [19]- C'est à cette occasion que l'on a besoin de l'hypothèse sur le rang- L'une des propriétés essentielles servant à cette construction est le fait que l'orbite minimale possède une B-orbite ouverte, B étant un sous-groupe de Borel de G. Il semble donc naturel de s'intéresser aux G-orbites nilpotentes réelles dont la complexifiée possède une $B_{\mathbb{C}}$-orbite ouverte, c'est-à-dire aux G-orbites nilpotentes sphériques.

Dans ce travail nous nous intéressons aux orbites nilpotentes sphériques non minimales de $sl_n(\mathbb{R})$, pour $n \geq 4$. On peut citer à ce propos Y. Flicker qui, dans [10], a étudié cette situation pour certaines de ces orbites.

Après avoir rappelé, dans les paragraphes 1 et 2, les termes essentiels de la méthode utilisée, nous donnons une description précise des orbites considérées dans le paragraphe 3. En considérant ensuite, dans les paragraphes 4 et 5, les projections sur les paraboliques maximaux d'une telle orbite O et à l'aide d'un raisonnement par récurrence on construit, à partir de O, une famille $\Pi(O)$ de représentations unitaires irréductibles du revêtement à deux feuillets de $SL_n(\mathbb{R})$. Plus précisément, on obtient:

- Lorsque O est une orbite sphérique non maximale, $\Pi(O)$ est en correspondance bijective avec l'ensemble des paramètres d'admissibilité de l'orbite.
- Lorsque n est impair et O maximale, $\Pi(O)$ se réduit à un élément.

- Lorsque n est pair et O maximale, $\Pi(O)$ est paramétré par un certain sous-ensemble, que l'on précisera, de séries discrètes du revêtement à deux feuillets de $SL_2(\mathbb{R})$.

Dans le paragraphe 6, nous montrons, en utilisant une réalisation explicite de ces représentations, que celles-ci sont toutes "GK-associées" à l'orbite O.

Il faut remarquer à ce sujet que, dans le cas où n est pair et O maximale, il existe bien d'autres représentations GK-associées à O. En fait, la méthode utilisée doit pouvoir aussi s'appliquer avec succès pour des orbites coadjointes semi-simples et nous fournir ainsi une autre partie importante de ces représentations.

Enfin, dans le paragraphe 7, nous montrons que les représentations GK-associées déterminées aux paragraphes précédents sont en fait "associées" à O.

Je tiens à remercier tout particulièrement J.Y. Charbonnel et D. Vogan dont les suggestions déterminantes ont permis de démontrer le théorème 7.1, résultat principal du paragraphe 7.

1. Les paramétrisations de Duflo.

Nous allons rappeler dans ce paragraphe deux paramétrisations de M. Duflo, essentielles à la méthode que nous allons utiliser pour construire les représentations souhaitées.

1.1. La première paramétrisation est celle du dual unitaire d'un groupe presque algébrique réel P, d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$. Soit q un élément de $\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{p}(q)$ et $P(q)$, respectivement le stabilisateur de q dans $\mathfrak{p}$ et P. Soit B_q la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{p}$, définie par: $\forall X, Y \in \mathfrak{p}, B_q(X,Y) = q([X,Y])$. Dans [8], Duflo introduit les notions suivantes:

Définition 1.1. Une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{p}$ est dite de type fortement unipotent relativement à q si $\mathfrak{b}$ est algébrique, coisotrope relativement à la forme B_q, et si l'on a: $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}(q) + {}^u\mathfrak{b}$.

Définition 1.2. La forme q est dite de type unipotent si les deux conditions suivantes sont réalisées:

-Il existe un facteur réductif de $\mathfrak{p}(q)$ contenu dans $\ker q$.

-Il existe une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à q.

Soit $R(q)$ un facteur réductif de $P(q), \mathfrak{r}(q)$ son algèbre de Lie. L'espace $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}(q)$ est muni d'une structure symplectique $R(q)$- invariante, permettant de définir l'extension métaplectique $R(q)^{\mathfrak{p}}$. Le noyau de cette extension admet un et un seul élément non trivial, noté e. Selon G. Lion [14], l'extension $R(q)^{\mathfrak{p}}$ se décrit de la manière suivante: On se donne un Lagrangien L de l'espace symplectique $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}(q)$ et on choisit une orientation $\widetilde{L}$ de L. A tout x de $R(q)$, on associe l'orientation relative des Lagrangiens orientés $\widetilde{L}$ et $x.\widetilde{L}$ que l'on note $e(\widetilde{L}, x.\widetilde{L})$. On pose, ensuite:

$$t(x)^2 = e(\widetilde{L}, x.\widetilde{L}).$$

On obtient, alors:

$$R(q)^{\mathfrak{p}} = \{(x, t(x)), x \in R(q)\}.$$

Soit $Y(q) = \{\tau \in \widehat{R(q)^{\mathfrak{p}}} \mid \tau(e) = -Id\}$ et $\mathbb{E} = \{(q,\tau) \mid q$ de type unipotent, $\tau \in Y(q)\}$. Le groupe P opère dans $\mathbb{E}$ et Duflo établit, dans [8], une bijection de $\mathbb{E}/P$ sur $\widehat{P}$. L'image par cette bijection d'un couple (q,τ) sera notée $\pi_{q,\tau}$ et sera appelée P-représentation "*de type Duflo*".

Considérons, d'autre part, l'ensemble suivant:

$$Adm_P(q) = \{\tau \in Y(q) \mid d\tau \text{ est un multiple de } iq_{|\mathfrak{r}(q)}\}.$$

Définition 1.3. Si $Adm_P(q) \neq \emptyset$, l'orbite $P.q$ est dite admissible et l'ensemble $Adm_P(q)$ est l'ensemble des paramètres d'admissibilité de l'orbite.

Soit donc (q,τ) un élément de $\mathbb{E}$. La forme q étant de type unipotent, il existe des sous-algèbres de type fortement unipotent relativement à q, $P(q)$-invariantes; choisissons-en une, soit $\mathfrak{b}$. Posons ${}^u\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, le radical unipotent de $\mathfrak{b}$. Soit A le sous-groupe analytique de P correspondant; alors $B = P(q).A = R(q) \times A$ est un sous-groupe fermé de P, d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. Soit μ la restriction de q à $\mathfrak{a}$. Le groupe $R(q)$ opère dans $\mathfrak{a}$ en laissant stable μ, de sorte que l'extension $R(q)^{\mathfrak{a}}$ est bien définie et que l'on peut associer à τ un élément $\tilde{\tau}$ de $\widehat{R(q)^{\mathfrak{a}}}$, défini par la formule suivante:

$$\forall (x, t'(x)) \in R(q)^{\mathfrak{a}},\ \tilde{\tau}(x, t'(x)) = \frac{t(x)}{t'(x)}\tau(x, t(x)). \tag{1}$$

(Cette formule ne dépend pas du choix du représentant $(x, t(x))$ de x dans $R(q)^{\mathfrak{p}}$.)

Soit T_μ la classe de représentations de A associée à μ par la correspondance de Kirillov, d'espace $\mathfrak{L}_\mu$, et S_μ la représentation métaplectique correspondante. On définit une représentation du groupe B, notée $\tau \otimes S_\mu T_\mu$, dans le produit tensoriel de l'espace de τ et de l'espace de T_μ, soit $V_\tau \otimes \mathfrak{L}_\mu$, en posant:

$$\forall x \in R(q),\ \forall y \in A, (\tau \otimes S_\mu T_\mu)(xy) = \tilde{\tau}(x, t(x)) \otimes S_\mu(x, t(x)).T_\mu(y). \tag{2}$$

Posons:

$$\pi_{q,\tau,\mathfrak{b}} = \operatorname{Ind}_B^P(\tau \otimes S_\mu T_\mu). \tag{3}$$

D'après [8], 3.16, on sait que si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont deux sous-algèbres de type fortement unipotent relativement à q, $P(q)$-invariantes, alors les représentations $\pi_{q,\tau,\mathfrak{b}}$ et $\pi_{q,\tau,\mathfrak{b}'}$ sont irréductibles et équivalentes. La classe d'équivalence de ces représentations est la P-représentation *de type Duflo* $\pi_{q,\tau}$.

1.2. La deuxième paramétrisation est celle de la représentation coadjointe due encore à Duflo ([8], chapitre 1). En reprenant les notations précédentes, considérons une forme de type unipotent q sur $\mathfrak{p}$ et soit $\mathfrak{p}(q) = \mathfrak{r}(q) \oplus {}^u\mathfrak{p}(q)$. On introduit les ensembles suivants:

$$\mathcal{L}(q) = \{\lambda \in \mathfrak{p}(q)^* \mid \lambda_{|{}^u\mathfrak{p}(q)} = q_{|{}^u\mathfrak{p}(q)}\},$$
$$\mathcal{D} = \{(q,\lambda) \mid q \text{ de type unipotent}, \lambda \in \mathcal{L}(q)\}.$$

Notons que l'opération "restriction" induit un isomorphisme de $\mathcal{L}(q)$ sur $\mathfrak{r}(q)^*$ et que le groupe P opère naturellement sur $\mathcal{D}$.

Soit maintenant $(q,\lambda) \in \mathcal{D}$ et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à q. Soit $f \in \mathfrak{p}^*$ telle que:

$$f_{|{}^u\mathfrak{b}} = q_{|{}^u\mathfrak{b}},\quad f_{|\mathfrak{p}(q)} = \lambda_{|\mathfrak{p}(q)}.$$

Duflo établit les résultats suivants:

- La P-orbite $P.f$ ne dépend pas des choix de $\mathfrak{b}$ et f. On notera dorénavant $O_{q,\lambda}$ une telle orbite.
- L'application $(q,\lambda) \longrightarrow O_{q,\lambda}$ induit une bijection de $\mathcal{D}/P$ sur $\mathfrak{p}^*/P$.

On remarquera, en particulier, que si f est de type unipotent, alors, $P.f = O_{f,0}$.

Rappelons deux résultats de Duflo utiles pour la suite.

1.3. Soit U un sous-groupe unipotent de P d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$, soit $u \in \mathfrak{u}^*, H = P(u), \mathfrak{v}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{u}, H$-invariante et co-isotrope relativement à u, V le sous-groupe correspondant. Soit v la restriction de u à $\mathfrak{v}$. Les extensions $H^{\mathfrak{u}}$ et $H^{\mathfrak{v}}$ sont bien définies.

Soit χ_u le caractère de $U(u)$ défini par la restriction de u à $\mathfrak{u}(u)$. Soit τ une représentation de $H^{\mathfrak{u}}$ telle que:

$$\tau_{|U(u)} = \chi_u, \quad \tau(e) = -Id.$$

On associe à τ la représentation $\widetilde{\tau}$ de $H^{\mathfrak{v}}$ définie par la formule (1). On a, alors, le résultat suivant [8], Lemme 17:

Proposition 1.1. *On a l'équivalence de représentations suivante:*

$$\mathrm{Ind}_{P(u)V}^{P(u)U}(\widetilde{\tau} \otimes S_v T_v) \simeq \tau \otimes S_u T_u.$$

1.4. Les notations sont celles de 1.3. Soit Q un sous-groupe fermé de P, contenant U. Soit $P_1 = P(u)^{\mathfrak{u}}$, $Q_1 = Q(u)^{\mathfrak{u}}, R_1$ une représentation unitaire de Q_1. On pose:

$$T_1 = \mathrm{Ind}_{Q_1}^{P_1} R_1, T_1' = \mathrm{Ind}_{Q(u)U}^{P(u)U}(R_1 \otimes S_u T_u).$$

M. Duflo, dans le chapitre II de [8], démonstration de la proposition II.15, prouve le résultat suivant:

Proposition 1.2. *Les représentations T_1' et $T_1 \otimes S_u T_u$ sont deux représentations équivalentes du groupe $P(u)U$.*

2. Systèmes de Tits et amalgames

Nous allons rappeler, dans ce paragraphe, les propriétés d'amalgame relatives aux systèmes de Tits.

Définition 2.1. Un système de Tits est un quadruplet (G, B, M', S) où G est un groupe, B, M' deux sous-groupes de G, S une partie de $W = M'/B \cap M'$, satisfaisant aux axiomes suivants:

- (A_1) L'ensemble $B \cup M'$ engendre G et $B \cap M'$ est un sous-groupe distingué de M'.
- (A_2) L'ensemble S engendre W et se compose d'éléments d'ordre 2.

Pour tout $w \in W$, on note: $c(w) = BwB,\ {}^wB = wBw^{-1}$.

- (A_3) $\forall s \in S, \forall w \in W,\ c(s).c(w) \subset c(w) \cup c(sw)$.
- (A_4) $\forall s \in S,\ {}^sB \not\subset B$.

A toute partie S' de S, on fait correspondre le groupe $G_{S'} = BW_{S'}B$ où $W_{S'}$ est le sous-groupe de W engendré par S'. $G_{S'}$ est le sous-groupe parabolique standard de type S' et son rang est le cardinal de S'. Les sous-groupes paraboliques maximaux standards sont donc ceux de rang $\sharp S - 1$.

En particulier, soit G un groupe de Lie semi-simple quasi-déployé, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan maximalement deployée de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel contenant $\mathfrak{h}$, B le normalisateur dans G de $\mathfrak{b}$. Soit Δ un système de racines associé et Π une base de racines simples. Soit M, M' respectivement le centralisateur et le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans G. Soit S l'ensemble des reflexions associées aux racines simples. S s'identifie à un sous-ensemble générateur du groupe de Weyl $W = M'/M$, formé d'éléments d'ordre 2. Dans ce cas, il est bien connu que le quadruplet (G, B, M', S) est un système de Tits.

Soit G un groupe, (G_i) une famille de sous-groupes de G.

Définition 2.2. On dit que G est produit amalgamé des (G_i) suivant leurs intersections deux à deux si G satisfait à la propriété universelle suivante:

Soit H un groupe, $h_i : G_i \longrightarrow H$ une famille de morphismes de groupes telle que:

$\forall x \in G_i \cap G_j, h_i(x) = h_j(x)$. Alors, il existe un et un seul morphisme de groupes $h : G \longrightarrow H$ tel que: $\forall i, \forall x \in G_i, h_i(x) = h(x)$.

Le résultat suivant est dû à J. Tits ([19], chapitre 2, I.7, corollaire 3).

Théorème 2.1. *Soit (G, B, M', S) un système de Tits. On suppose que l'ensemble S est de cardinal $n \geq 3$. Alors, G est produit amalgamé de ses sous-groupes paraboliques maximaux standards suivant leurs intersections deux à deux.*

3. Les orbites nilpotentes sphériques de $\mathbf{sl_n}(\mathbb{R}), \mathbf{n} \geq \mathbf{4}$

3.1. **Quelques notations.** On adoptera, pour la suite, les notations suivantes:

• Soit $\mathfrak{g} = sl_n(\mathbb{R}), \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = sl_n(\mathbb{C})$ et G un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. En fait, G est le revêtement à deux feuillets de $SL_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{K}$ la forme de Killing définie sur $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan déployée de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ la sous-algèbre de Cartan correspondante dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Soit $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$ le système de racines usuel pour sl_n, $\Delta^+ = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\}$, le système de racines positives. Posons, de plus, $\alpha_k = \varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}, 1 \leq k \leq n-1$. Soit $\Pi = \{\alpha_k, 1 \leq k \leq n-1\}$ le système de racines simples choisi. A chaque racine α dans Δ^+, on associe le système de Chevalley usuel $(X_\alpha, H_\alpha, X_{-\alpha}), W_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ et on pose, pour tout réel t:

$$x_\alpha(t) = \exp_G tX_\alpha,\ x_{-\alpha}(t) = \exp_G tX_{-\alpha},$$
$$w_\alpha(t) = \exp_G tW_\alpha, h_\alpha(t) = \exp_G \ln|t| H_\alpha\ (t \neq 0),$$
$$w_\alpha^2 = \exp_G \pi W_\alpha.$$

Soit $\pi_G : G \longrightarrow SL_n(\mathbb{R})$ la projection canonique correspondante et soit z l'élément non trivial du noyau de π_G. Pour toute racine α, on a: $w_\alpha^4 = z$. Enfin, on désignera par Γ_α le sous-groupe fini de G engendré par l'élément w_α^2.

• A tout sous-ensemble $(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+j})$ de Π, on associe la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ isomorphe à $sl_{j+2}(\mathbb{R})$, ayant $(\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+j})$ comme système de racines simples, et on la notera $sl_{j+2}(\alpha_i, \ldots, \alpha_{i+j})$. Considérons, pour $\varepsilon = \pm 1, 1 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$, la famille de vecteurs suivante:

$$X_{\alpha_1} + X_{-\alpha_{n-1}}, \ldots, X_{\alpha_{k-1}} + \varepsilon X_{-\alpha_{n-k+1}}, X_{-\alpha_1} + X_{\alpha_{n-1}}, \ldots, X_{-\alpha_{k-1}} + \varepsilon X_{\alpha_{n-k+1}},$$
$$H_{\alpha_1} - H_{\alpha_{n-1}}, \ldots, H_{\alpha_{k-1}} - H_{\alpha_{n-k+1}}.$$

Cette famille engendre une sous-algèbre, isomorphe à $sl_k(\mathbb{R})$, que nous noterons:

$$sl_k(X_{\alpha_1} + X_{-\alpha_{n-1}}, \ldots, X_{\alpha_{k-1}} + \varepsilon X_{-\alpha_{n-k+1}}).$$

• Plus généralement, on notera $\langle X_1, \ldots, X_p \rangle$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, engendré par la famille de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$.

• On introduit les sous-algèbres suivantes:

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{R}X_\alpha,\ \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{R}X_{-\alpha},\ \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

Soit $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de Borel associée à ce choix de racines positives et B le sous-groupe de Borel correspondant dans G. Soit $A = \exp \mathfrak{h}, N = \exp \mathfrak{n}, N^- = \exp \mathfrak{n}^-$.

• Soit enfin K un sous-groupe compact maximal de G et M le centralisateur de A dans K. On sait que M est un sous-groupe fini, engendré par les $w_\alpha^2, \alpha \in \Delta^+$. On sait, également, que $B = M.A.N$.

3.2. Les orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sont identifiées aux partitions de l'entier n. Selon la classification de D. Panyushev donnée dans [15], les orbites sphériques correspondent aux partitions de la forme suivante:

$$(2^k, 1^{n-2k}),\ 1 \leq k \leq \frac{n}{2}.$$

On notera $O_k^C = (2^k, 1^{n-2k})$ l'orbite correspondante et on l'appellera orbite sphérique "d'ordre k" de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

L'orbite O_1^C étant l'orbite minimale, on ne considérera donc que les orbites sphériques $O_k^C, 2 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

Pour tout entier $k, 2 \leq k < \frac{n}{2}$, $O_k^C \cap \mathfrak{g}$ est constitué d'une seule orbite réelle. Par contre, si $n = 2p$, $O_p^C \cap \mathfrak{g}$ est réunion de deux orbites réelles.

D'après [15], chaque G-orbite sphérique a pour générateur une somme de vecteurs radiciels associés à des racines simples deux à deux orthogonales. Pour tout entier $k, 2 \leq k \leq \dfrac{n}{2}$ et pour $\varepsilon = \pm 1$, on pose:

$$Y_{k,\varepsilon} = \sum_{i=0}^{i=k-2} X_{\alpha_{2i+1}} + \varepsilon X_{\alpha_{2k-1}}.$$

Soit $O_{k,\varepsilon} = G.Y_{k,\varepsilon}$ l'orbite nilpotente réelle correspondante. On constate que:

- Si $k < \dfrac{n}{2}$, $O_{k,1} = O_{k,-1}$ et on obtient ainsi une unique orbite nilpotente sphérique réelle d'ordre k.

- Si $n = 2p$, $O_{p,1}$ et $O_{p,-1}$ sont deux orbites distinctes qui constituent les deux orbites nilpotentes sphériques réelles d'ordre p.

On note $I_n = \{(k, \varepsilon), k \in (\mathbb{N} \cap [2, \frac{n}{2}]), \varepsilon \in \{-1, 1\}\}$. L'ensemble $\{O_{k,\varepsilon}, (k, \varepsilon) \in I_n\}$ est l'ensemble des orbites nilpotentes sphériques réelles non minimales de $\mathfrak{g}$.

Enfin, on peut calculer aisément, selon [5], corollaire 6.1.4, la dimension de chaque orbite et on obtient:

$$\forall (k, \varepsilon) \in I_n, \dim O_{k,\varepsilon} = 2k(n-k).$$

Les orbites d'ordre $[\frac{n}{2}]$ joueront un rôle particulier dans la suite. Nous les appellerons "orbites sphériques maximales".

Les générateurs précisés précédemment ne sont pas cependant des générateurs d'une B-orbite ouverte.

Soit $(k, \varepsilon) \in I_n$. Posons:

$$\forall i, j, 1 \leq i \leq j \leq n-1,\ \beta_{i,j} = \sum_{s=i}^{s=j} \alpha_s,$$

$$\forall i, 1 \leq i \leq k, \beta_i = \beta_{i,n-i},$$

$$X_{k,\varepsilon} = \sum_{i=1}^{i=k-1} X_{-\beta_i} + \varepsilon X_{-\beta_k}.$$

On a, pour tout (k, ε) dans I_n, $O_{k,\varepsilon} = G.X_{k,\varepsilon}$. Soit $\mathfrak{g}(X_{k,\varepsilon}) = \mathfrak{r}_{k,\varepsilon} \oplus {}^u\mathfrak{g}(X_{k,\varepsilon})$ le stabilisateur de $X_{k,\varepsilon}$ dans $\mathfrak{g}$, où $\mathfrak{r}_{k,\varepsilon}$ désigne un facteur réductif et ${}^u\mathfrak{g}(X_{k,\varepsilon})$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}(X_{k,\varepsilon})$.

On adoptera, pour la suite, les notations suivantes:

$$\begin{aligned}\forall j, 1 \leq j \leq n-1,\ \mathfrak{l}_j &= sl_{n-2j}(\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{n-j-1}),\ \text{si } j \leq \frac{n}{2} - 1,\\ &= 0,\ \text{sinon},\\ \forall j, 2 \leq j \leq n-1,\ \mathfrak{v}_{j,\varepsilon} &= sl_j(X_{\alpha_1} + X_{-\alpha_{n-1}}, \ldots, X_{\alpha_{j-1}} + \varepsilon X_{-\alpha_{n-j+1}})\\ &\quad \oplus \langle H_{\alpha_j} - H_{\alpha_{n-j}} \rangle,\\ \mathfrak{u}(X_{k,\varepsilon}) &= \langle X_{-\beta_{i,j}},\ 1 \leq i \leq k \leq j \leq n-1 \rangle,\\ \mathfrak{v}(X_{k,\varepsilon}) &= \langle X_{-\beta_{i,j}},\ k+1 \leq i \leq n-k \leq j \leq n-1 \rangle,\quad \text{si } k < \frac{n}{2},\\ &= 0,\quad \text{sinon}.\end{aligned}$$

Le calcul nous donne:

$$\begin{aligned}{}^{u}\mathfrak{g}(X_k) &= \mathfrak{u}(X_{k,\varepsilon}) \oplus \mathfrak{v}(X_{k,\varepsilon}),\\ \mathfrak{r}_{k,\varepsilon} &= \mathfrak{l}_k \oplus \mathfrak{v}_{k,\varepsilon}.\end{aligned}$$

On déduit de ceci que, pour tout (k, ε) dans I_n, $\mathfrak{b}(X_{k,\varepsilon}) = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{r}_{k,\varepsilon}$ et ainsi:

$$\dim \mathfrak{b}(X_{k,\varepsilon}) = \frac{(n-2k-1)(n-2k+2)}{2} + k.$$

D'où: $\dim B.X_{k,\varepsilon} = 2k(n-k), \forall (k,\varepsilon) \in I_n$. Ainsi, $B.X_{k,\varepsilon}$ est une B-orbite ouverte dans $O_{k,\varepsilon}$.

Lemme 3.1. *Soit $(k,\varepsilon) \in I_n$. Alors, la B-orbite $B.X_{k,\varepsilon}$ est l'unique B-orbite dense contenue dans $O_{k,\varepsilon}$.*

Preuve. Soit $G(X_{k,\varepsilon})$ le stabilisateur de $X_{k,\varepsilon}$ dans G. En tenant compte des résultats obtenus précédemment, on constate que tout élément x de N^- est de la forme:

$$x = \Big(\prod_{j=n-k+1}^{j=n-1} \exp t_j X_{-\alpha_j}\Big).z,\ z \in G(X_{k,\varepsilon}), t_j \in \mathbb{R}, \forall j.$$

On vérifie ensuite la relation:

$$\begin{aligned}\exp tX_{-\alpha_{n-2}}.\exp vX_{-\alpha_{n-1}} &= \exp -tX_{\alpha_2}.\exp -vX_{\alpha_1}.\exp tvX_{\alpha_1+\alpha_2}\\ &\quad .\exp t(X_{\alpha_2} + X_{-\alpha_{n-2}}).\exp v(X_{\alpha_1} + X_{-\alpha_{n-1}}).\end{aligned}$$

En utilisant ce type de relation de proche en proche, on obtient alors que:

$$N^- \subset B.G(X_{k,\varepsilon}).$$

De ceci, on déduit que: $BN^-.X_{k,\varepsilon} \subset B.X_{k,\varepsilon}$. L'ensemble $B.N^-$ est la grosse cellule de Bruhat de G, c'est un ouvert dense de G. Il s'en suit donc que $BN^-.X_{k,\varepsilon}$ est un ouvert dense de $O_{k,\varepsilon}$, ce qui démontre le résultat souhaité. $\square$

3.3. Soit $(k,\varepsilon) \in I_n, G(X_{k,\varepsilon})$ le stabilisateur dans G de $X_{k,\varepsilon}$ et $R_{k,\varepsilon}$ un facteur réductif de $G(X_{k,\varepsilon})$. On pose, pour toute la suite: $w^2 = w^2_{\beta_1}, \Gamma = \Gamma_{\beta_1}$. On obtient:

$$R_{k,\varepsilon} = \Gamma.(R_{k,\varepsilon})_0$$

où $(R_{k,\varepsilon})_0$ désigne la composante neutre de $R_{k,\varepsilon}$.

Soit, d'autre part, $f_{k,\varepsilon} = \mathcal{K}(X_{k,\varepsilon}, .)$ l'élément de $\mathfrak{g}^*$ associé à $X_{k,\varepsilon}$. On pose, enfin:

$$\begin{aligned}Y(f_{k,\varepsilon}) &= \{\tau \in \widehat{R^{\mathfrak{g}}_{k,\varepsilon}}, \tau(e) = -Id\},\\ Adm_k = Adm_G(f_{k,\varepsilon}) &= \{\tau \in Y(f_{k,\varepsilon}), d\tau = 0\}.\end{aligned}$$

Proposition 3.2. 1) *Pour tout* (k, ε) *dans* I_n, *l'orbite* $O_{k,\varepsilon}$ *est admissible.*

2) *Le groupe* Γ *s'identifie à un sous-groupe de l'extension* $R^{\mathfrak{g}}_{k,\varepsilon}$, *noté encore* Γ, *et l'on a:*

$$R^{\mathfrak{g}}_{k,\varepsilon} = \Gamma.((R_{k,\varepsilon})_0)^{\mathfrak{g}}.$$

3) *L'extension* $((R_{k,\varepsilon})_0)^{\mathfrak{g}}$ *admet exactement deux composantes connexes et l'application* $x \longrightarrow (x, 1)$ *identifie* $(R_{k,\varepsilon})_0$ *à la composante neutre de* $((R_{k,\varepsilon})_0)^{\mathfrak{g}}$.

4) *L'ensemble* Adm_k *se décrit de la manière suivante: Soit* χ *le caractère de* $((R_{k,\varepsilon})_0)^{\mathfrak{g}}$ *défini par:*

$$\chi(x, t(x)) = 1,\ \forall x \in (R_{k,\varepsilon})_0, \chi(e) = -1.$$

- Si $n = 2p$, *on a:* $\forall j, t(w^2) = 1$ *et on considère le sous-groupe des caractères de* Γ *qui prennent la valeur* 1 *sur les éléments* $(w^4, 1)$. *Ce sous-groupe s'identifie au groupe* $\widehat{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}$ *des caractères de* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ *et l'on a:*

$$Adm_k = \{\rho \otimes \chi,\ \rho \in \widehat{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}\}.$$

- Si $n = 2p+1$, *on a:* $\forall j, t(w^2) = i$ *et on considère le sous-groupe des caractères de* Γ *qui prennent la valeur* 1 *sur les éléments* $(w^8, 1)$. *Ce sous-groupe s'identifie au groupe* $\widehat{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})}$ *des caractères de* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. *Soit* $\widehat{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})}^-$ *le sous-ensemble formé des caractères qui prennent la valeur* -1 *sur les éléments* $(w^4, -1)$. *Alors, on a:*

$$Adm_k = \{\rho \otimes \chi,\ \rho \in \widehat{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})}^-\}.$$

Preuve. La première assertion est un résultat de J. Schwartz [18]. Pour la suite, il nous faut préciser l'extension métaplectique $((R_{k,\varepsilon})_0)^{\mathfrak{g}}$.

Considérons, pour cela, le sous-espace L de $\mathfrak{g}$ engendré par les vecteurs suivants:

$$X_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}, 1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n.$$

On constate que L s'identifie à un sous-espace Lagrangien orienté de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(X_{k,\varepsilon})$. A tout x de $R_{k,\varepsilon}$, on associe donc l'orientation relative $e(L, x.L)$ des lagrangiens L et $x.L$. On vérifie successivement les faits suivants:

- $\forall x \in (R_{k,\varepsilon})_0, e(L, x.L) = 1$.
- $e(L, w^2.L) = (-1)^{n-2k} = (-1)^n$.

On définit donc, pour tout x de $R_{k,\varepsilon}$, le nombre complexe $t(x)$ par:

$$\begin{aligned} t(w^2) &= 1,\ \text{si } n = 2p, \\ &= i,\ \text{si } n = 2p+1, \\ \forall x \in (R_{k,\varepsilon})_0, t(x) &= 1. \end{aligned}$$

On en déduit que:

- Le groupe Γ est isomorphe à un sous-groupe de $R^{\mathfrak{g}}_{k,\varepsilon}$. L'image de l'élément w^2, par cet isomorphisme, est $(w^2, 1)$ si $n = 2p$, (w^2, i) si $n = 2p+1$. La deuxième assertion de la proposition s'en suit.
- On peut identifier $(R_{k,\varepsilon})_0$ à un sous-groupe de $((R_{k,\varepsilon})_0)^{\mathfrak{g}}$ par l'application $x \longrightarrow (x, 1)$ et on obtient:

$$((R_{k,\varepsilon})_0)^{\mathfrak{g}} = (R_{k,\varepsilon})_0 \cup e.(R_{k,\varepsilon})_0$$

ce qui donne la troisième assertion.

Supposons $n = 2p$. Comme, pour tout j, $(w^2, 1)^2 \in (R_{k,\varepsilon})_0$, on ne doit considérer que les caractères de Γ qui prennent la valeur 1 sur ces éléments et la dernière assertion s'en suit.

Si $n = 2p+1$, $(w^2, 1)^4 \in (R_{k,\varepsilon})_0$. Dans ces conditions, on ne s'intéresse qu'aux caractères de Γ qui prennent la valeur 1 sur ces éléments. Cet ensemble est bien un groupe isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$. D'autre part, par définition d'un paramètre d'admissibilité, on doit choisir les caractères ρ qui vérifient de surcroit la propriété:

$$\rho(w^4, -1) = \rho(w^4, 1).\rho(e) = -1.$$

Ceci nous donne le résultat souhaité. On constate ainsi que l'ensemble Adm_k est, dans tous les cas, un ensemble à deux éléments qui ne dépend pas du paramètre ε, ce qui justifie la notation choisie. $\square$

4. Les restrictions aux paraboliques maximaux

On sait, d'après le lemme 3.1, que si P est un sous-groupe parabolique maximal de G, chaque orbite nilpotente sphérique $O_{k,\varepsilon}$ contient une et une seule P-orbite dense. L'objet de ce paragraphe est d'étudier les P-orbites obtenues et, notamment, de les caractériser suivant la paramétrisation de 1.2.

4.1. A chaque racine simple α_i, on associe la sous-algèbre parabolique maximale $\mathfrak{p}_i$, obtenue à partir du sous-ensemble de racines $\Pi \backslash \{\alpha_i\}$. On définit la décomposition de Langlands $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{a}_i \oplus \mathfrak{n}_i$ de $\mathfrak{p}_i$, avec:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_i &= sl_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}) \oplus sl_{n-i}, \quad (\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1})(sl_1(\dots) = 0),\\
\mathfrak{a}_i &= \mathbb{R}(H_{\alpha_{i-1}} + 2H_{\alpha_i} + H_{\alpha_{i+1}}),\\
\mathfrak{n}_i &= {}^u\mathfrak{p}_i.
\end{aligned}$$

Remarque 4.1. On remarque le fait important suivant: Chaque radical $\mathfrak{n}_i$ est abélien.

Soit $A_i = \exp \mathfrak{a}_i$, $N_i = \exp \mathfrak{n}_i$, $M_i = \Gamma_{\alpha_i}.(M_i)_0$ et $P_i = M_i.A_i.N_i$ le sous-groupe parabolique maximal de G correspondant.

Soit $(k, \varepsilon) \in I_n$, $P_i(X_{k,\varepsilon}) = P_i \cap G(X_{k,\varepsilon})$ le stabilisateur dans P_i de $X_{k,\varepsilon}$. On peut écrire: $P_i(X_{k,\varepsilon}) = R_{i,k,\varepsilon}.{}^uP_i(X_{k,\varepsilon})$, où $R_{i,k,\varepsilon} = M_i \cap R_{k,\varepsilon}$ est un facteur réductif de $P_i(X_{k,\varepsilon})$. Soit $\mathfrak{r}_{i,k,\varepsilon}$ l'algèbre de Lie de $R_{i,k,\varepsilon}$. Posons, pour tout $i, 1 \leq i \leq n-1$:

$$\mathfrak{l}_{i,k} = \mathfrak{l}_k \cap \mathfrak{m}_i,$$
$$\mathfrak{v}_{i,k,\varepsilon} = \mathfrak{v}_{k,\varepsilon} \cap \mathfrak{m}_i.$$

On obtient:

$$\mathfrak{r}_{i,k,\varepsilon} = \mathfrak{l}_{i,k} \oplus \mathfrak{v}_{i,k,\varepsilon}$$

En particulier, on constate que, pour tout i, $n-k \leq i \leq n-1, \mathfrak{r}_{i,k,\varepsilon} = \mathfrak{r}_{n-i,k,\varepsilon}$.

Introduisons ensuite les groupes finis $\Gamma_{i,k}$, définis de la manière suivante:

$$\forall i, k < i < n-k, \Gamma_{i,k} = \Gamma.\Gamma_{\alpha_i},$$
$$\forall i, i \leq k \text{ ou } i \geq n-k, \Gamma_{i,k} = \Gamma.$$

On obtient, alors: $R_{i,k,\varepsilon} = \Gamma_{i,k}.(R_{i,k,\varepsilon})_0$.

On note enfin $f_{i,k,\varepsilon}$ la restriction de $f_{k,\varepsilon}$ à la sous-algèbre $\mathfrak{p}_i$. On identifie naturellement $\mathfrak{g}$ à son dual $\mathfrak{g}^*$, via la forme de Killing, et on note $Res_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{p}_i^*$ l'opération de restriction, moyennant l'identification précédente.

Proposition 4.1. i) *Pour tout (k, ε) dans I_n, la P_i-orbite $P_i.X_{k,\varepsilon}$ est l'unique P_i-orbite ouverte dense contenue dans $O_{k,\varepsilon}$.*

ii) *L'application Res_i induit un difféomorphisme de $P_i.X_{k,\varepsilon}$ sur $P_i.f_{i,k,\varepsilon}$.*

iii) *Chaque P_i-orbite $P_i.f_{i,k,\varepsilon}$ est P_i-admissible.*

Preuve. La première assertion est due au fait que chaque orbite $O_{k,\varepsilon}$ contient une et une seule B-orbite ouverte dense.

Soit $b_{k,\varepsilon}$ la restriction de $f_{k,\varepsilon}$ à $\mathfrak{b}$. On vérifie que $\mathfrak{b}(X_{k,\varepsilon}) = \mathfrak{b}(b_{k,\varepsilon})$ et on a l'inclusion évidente $B(X_{k,\varepsilon}) \subset B(b_{k,\varepsilon})$. Soit, maintenant, $b_{k,\varepsilon,1}$ la restriction de $b_{k,\varepsilon}$ à $\mathfrak{n}_1$. En fait, $b_{k,\varepsilon,1}$ est la restriction à $\mathfrak{n}_1$ de $\mathcal{K}(X_{-\beta_1},.)$. De la double inclusion $B \cap R_{k,\varepsilon} \subset B(b_{k,\varepsilon}) \subset B(b_{k,\varepsilon,1})$ et du fait que $N_1(b_{k,\varepsilon,1}) = \{1\}$, on déduit que $B(b_{k,\varepsilon}) = B \cap R_{k,\varepsilon}$. D'où l'égalité des stabilisateurs: $B(X_{k,\varepsilon}) = B(b_{k,\varepsilon})$. De ceci, on déduit que l'application "restriction" induit un difféomorphisme de l'orbite $B.X_{k,\varepsilon}$ sur $B.b_{k,\varepsilon}$. Comme ces orbites sont, respectivement, ouvertes et denses dans $P_i.X_{k,\varepsilon}$ et $P_i.f_{i,k,\varepsilon}$, on obtient ii).

Il existe un isomorphisme naturel d'espaces symplectiques de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(X_{k,\varepsilon})$ sur $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_i(X_{k,\varepsilon})$. Cet isomorphisme permet d'identifier l'extension $R^{\mathfrak{p}_i}_{i,k,\varepsilon}$ à un sous-groupe de $R^{\mathfrak{g}}_{k,\varepsilon}$. Il s'en suit que la restriction à $R^{\mathfrak{p}_i}_{i,k,\varepsilon}$ d'un élément de Adm_k est un paramètre d'admissibilité de l'orbite $P_i.X_{k,\varepsilon}$, ce qui prouve iii). □

Nous noterons, dorénavant, $Adm_{i,k}$ l'ensemble des paramètres d'admissibilité de l'orbite $P_i.X_{k,\varepsilon}$.

4.2. On suppose toujours (k,ε) dans I_n. Soit $h_{i,k,\varepsilon}$ la restriction de $f_{i,k,\varepsilon}$ à $\mathfrak{n}_i$ et $\mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon} = \mathfrak{p}_i(h_{i,k,\varepsilon})$. Introduisons les algèbres suivantes:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{i,k} &= \mathfrak{l}_i,\ \forall i < k \\
&= \mathfrak{l}_{i,k},\ \forall i,\ k \leq i \leq n-k \\
&= \mathfrak{l}_{n-i},\ \forall i > n-k, \\
\mathfrak{v}'_{i,k,\varepsilon} &= \mathfrak{v}_{i,1},\ \forall i < k \\
&= \mathfrak{v}_{i,k,\varepsilon},\ \forall i,\ k \leq i \leq n-k \\
&= \mathfrak{v}_{n-i,1},\ \forall i,\ i > n-k, \\
\mathfrak{r}'_{i,k,\varepsilon} &= \mathfrak{g}_{i,k} \oplus \mathfrak{v}'_{i,k,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Le calcul montre alors que, pour tout $i, 1 \leq i \leq n-1$:

- $\mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon} = \mathfrak{r}'_{i,k,\varepsilon} + {}^u\mathfrak{p}_i(X_{k,\varepsilon}) + \mathfrak{n}_i$.
- $\mathfrak{r}'_{i,k,\varepsilon}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}$.

On a, de plus:

$$\forall i,j,\quad 1 \leq i \leq j \leq k,\quad \mathfrak{g}_{j,k} \subset \mathfrak{g}_{i,k}. \tag{4}$$

Remarque 4.2. Soit $n_{i,k}$ le rang de la sous-algèbre réductive $\mathfrak{g}_{i,k}$. On constate que:

- Si $k < [\frac{n}{2}]$, alors, pour tout $i, i < k$, $n_{i,k} = n - 2i - 1 \geq 3$.
- Si l'on considère les orbites sphériques maximales $O_{[\frac{n}{2}]}$, alors:
  - $n_{p,p} = 0,\ p = [\frac{n}{2}]$.
  - Si $n = 2p, \mathfrak{g}_{p-1,p} = sl_2(\alpha_p)$ et $n_{p-1,p} = 1$.
  - Si $n = 2p+1, \mathfrak{g}_{p-1,p} = sl_3(\alpha_p, \alpha_{p+1})$ et $n_{p-1,p} = 2$.
  - $\forall i \leq [\frac{n}{2}] - 2, n_{i,p} \geq 3$.

Ces remarques joueront un rôle important, par la suite, dans la construction des représentations.

On définit, ensuite, la forme linéaire $g_{i,k,\varepsilon}$ sur $\mathfrak{p}_i$ par:

$$\forall x \in \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{a}_i,\ g_{i,k,\varepsilon}(x) = 0,$$
$$\forall x \in \mathfrak{n}_i, g_{i,k,\varepsilon}(x) = f_{i,k,\varepsilon}(x).$$

Proposition 4.2. *$\mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}$ est une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à $g_{i,k,\varepsilon}$. $g_{i,k,\varepsilon}$ est une forme de type unipotent.*

Preuve. On commence par montrer que $\mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}$ est co-isotrope relativement à $g_{i,k,\varepsilon}$. En effet, soit $Z \in \mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}^{\perp_g}$ un élément de l'orthogonal dans $\mathfrak{p}_i$ de $\mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}$ relativement à $g_{i,k,\varepsilon}$. On écrit Z sous la forme $Z = x + y, x \in \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{a}_i, y \in \mathfrak{n}_i$. On a:

$$g_{i,k,\varepsilon}([u,Z]) = 0 = g_{i,k,\varepsilon}([u,x]) + g_{i,k,\varepsilon}([u,y]),\ \forall u \in \mathfrak{n}_i \subset \mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}.$$

Or, $\mathfrak{n}_i$ est abélien, donc:

$$g_{i,k,\varepsilon}([u,y]) = 0 = g_{i,k,\varepsilon}([u,x]) = f_{i,k,\varepsilon}([u,x]) = h_{i,k,\varepsilon}([u,x]).$$

Comme ceci est vrai pour tout $u \in \mathfrak{n}_i$, on en déduit que x appartient à $\mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}$. Il en est de même de y. D'où:

$$\mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}^{\perp_g} \subset \mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}.$$

Ceci montre bien que $\mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}$ est coisotrope relativement à $g_{i,k,\varepsilon}$.

On a l'inclusion triviale $\mathfrak{p}_i(g_{i,k,\varepsilon}) \subset \mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}$ et on sait, également, que $\mathfrak{r}'_{i,k,\varepsilon}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}$ contenu dans $\mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{a}_i$. Soit $X \in \mathfrak{r}'_{i,k,\varepsilon}, Y = A + B \in \mathfrak{p}_i, A \in \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{a}_i, B \in \mathfrak{n}_i$. On a: $g_{i,k,\varepsilon}([X,Y]) = g_{i,k,\varepsilon}([X,B])$, par définition de $g_{i,k,\varepsilon}$. Comme $X \in \mathfrak{p}_i(h_{i,k,\varepsilon}), g_{i,k,\varepsilon}([X,B]) = 0$. D'où $X \in \mathfrak{p}_i(g_{i,k,\varepsilon})$ et, donc, $\mathfrak{r}'_{i,k,\varepsilon} \subset \mathfrak{p}_i(g_{i,k,\varepsilon})$. Ainsi, $\mathfrak{r}'_{i,k,\varepsilon}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{p}_i(g_{i,k,\varepsilon})$, ce qui montre que l'algèbre $\mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}$ est bien de type fortement unipotent relativement à $g_{i,k,\varepsilon}$.

Il est immédiat de constater, pour finir, que la forme $g_{i,k,\varepsilon}$ est de type unipotent, puisque $g_{i,k,\varepsilon}$ s'annule sur $\mathfrak{r}'_{i,k,\varepsilon}$. □

Soit $\lambda_{i,k,\varepsilon}$ la restriction de $f_{i,k,\varepsilon}$ à $\mathfrak{r}'_{i,k,\varepsilon}$. On constate que la forme $\lambda_{i,k,\varepsilon}$ est nulle sur $\mathfrak{v}'_{i,k,\varepsilon}$. On identifiera donc $\lambda_{i,k,\varepsilon}$ à une forme, encore notée $\lambda_{i,k,\varepsilon}$, sur $\mathfrak{g}_{i,k}$.

On en déduit finalement, suivant les notations de 1.2., le corollaire suivant:

Corollaire 4.3. *Pour tout (k,ε) dans I_n, les paramètres de Duflo pour la P_i-orbite $P_i.X_{k,\varepsilon}$ sont les suivants:*

$$\forall i, i < k,\ P_i.X_{k,\varepsilon} = O_{g_{i,k,\varepsilon},\lambda_{i,k,\varepsilon}},$$
$$\forall i, k \leq i \leq n-k,\ P_i.X_{k,\varepsilon} = O_{f_{i,k,\varepsilon},0},$$
$$\forall i, n-k < i,\ P_i.X_{k,\varepsilon} = O_{g_{i,k,\varepsilon},\lambda_{i,k,\varepsilon}}.$$

En particulier, la P_i-orbite $P_i.X_{k,\varepsilon}$ est de type unipotent si et seulement si $k \leq i \leq n-k$.

5. Construction de représentations unipotentes sphériques par la méthode des orbites

On rappelle que le but de ce travail est de construire par la méthode de Duflo-Torasso des représentations unitaires irréductibles de G associées aux orbites $O_{k,\varepsilon}$, dans le sens rappelé au paragraphe 0, c'est- à- dire des représentations π telles que l'annulateur infinitésimal de π dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ ait pour variété des zéros la clôture de Zariski de $O_{k,\varepsilon}$. On va tout d'abord construire des familles de représentations "candidates" et on montrera dans les paragraphes suivants que ces familles répondent bien au problème posé.

5.1. Soit (k,ε) dans I_n. La première étape est de construire les P_i-représentations associées aux orbites $P_i.X_{k,\varepsilon}$, selon les paramétrisations de Duflo données dans les paragraphes 1.1 et 1.2.

Soit $\mathfrak{u}_{i,k,\varepsilon} = {}^u\mathfrak{p}_i(X_{k,\varepsilon}) + \mathfrak{n}_i$ le radical unipotent de $\mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon}$, $U_{i,k,\varepsilon} = \exp \mathfrak{u}_{i,k,\varepsilon}$. La restriction de $g_{i,k,\varepsilon}$ à $\mathfrak{u}_{i,k,\varepsilon}$ est nulle sur ${}^u\mathfrak{p}_i(X_{k,\varepsilon})$ et égale à $h_{i,k,\varepsilon}$ sur $\mathfrak{n}_i$, nous la noterons encore $h_{i,k,\varepsilon}$. La représentation de Kirillov $T_{i,k,\varepsilon}$ associée à $h_{i,k,\varepsilon}$ est dans ce cas le caractère $\rho_{i,k,\varepsilon}$ de $U_{i,k,\varepsilon}$ défini par:

$$\rho_{i,k,\varepsilon}(\exp X) = e^{-2i\pi h_{i,k,\varepsilon}(X)},\ \forall X \in \mathfrak{u}_{i,k,\varepsilon}.$$

Soit $R'_{i,k,\varepsilon}$ un facteur réductif de $P_i(g_{i,k,\varepsilon})$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}'_{i,k,\varepsilon}$. On peut décrire l'extension métaplectique $(R'_{i,k,\varepsilon})^{\mathfrak{p}_i}$ de la manière suivante:

Soit $(G_{i,k})_0$ le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{i,k}$, $V'_{i,k,\varepsilon}$ le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{v}'_{i,k,\varepsilon}$. Posons: $G_{i,k} = \Gamma_{i,k}.(G_{i,k})_0$. On a, dans ces conditions:

$$(R'_{i,k,\varepsilon})^{\mathfrak{p}_i} = (G_{i,k})^{\mathfrak{p}_i}.V'_{i,k,\varepsilon}. \tag{5}$$

Soit, enfin: $B_{i,k,\varepsilon} = R'_{i,k,\varepsilon}.U_{i,k,\varepsilon}$.

D'après 1.1, la famille de P_i-représentations cherchée est paramétrée par l'ensemble $Y(g_{i,k,\varepsilon})$. Compte-tenu de 1.2 et du corollaire 4.3, il est nécessaire de relier chaque représentation choisie dans $Y(g_{i,k,\varepsilon})$ au paramètre $\lambda_{i,k,\varepsilon}$. Or, la forme $\lambda_{i,k,\varepsilon}$ est nulle sur $\mathfrak{v}_{i,k,\varepsilon}$, pour toute valeur de l'entier i et, d'après le corollaire 4.3, nulle partout si $k \leq i \leq n-k$. On va donc considérer les sous-ensembles suivants de $Y(g_{i,k,\varepsilon})$:

$$\begin{aligned} \forall i, i < k, Y_{i,k,\varepsilon} &= \{\tau \otimes 1, \tau \in (G_{i,k})^{\mathfrak{p}_i}, \tau(e) = -Id\}, \\ \forall i, k \leq i \leq n-k, Y_{i,k,\varepsilon} &= Adm_{i,k}, \\ \forall i > n-k, Y_{i,k,\varepsilon} &= Y_{n-i,k,\varepsilon}. \end{aligned}$$

On constate qu'un élément quelconque de $Adm_{i,k}$ est essentiellement caractérisé par sa restriction au sous-groupe Γ. Si $\tau \in Adm_{i,k}, \tau' \in Adm_{j,k}$, nous dirons, par abus de langage, que $\tau = \tau'$ si les restrictions de τ et τ' à Γ sont les mêmes.

Les extensions $R'^{\mathfrak{p}_i}_{i,k,\varepsilon}$ et $R'^{\mathfrak{u}_i}_{i,k,\varepsilon}$ sont égales et la représentation métaplectique $S_{i,k,\varepsilon}$ est donnée par la formule simple suivante: $\forall (x,t(x)) \in R'^{\mathfrak{p}_i}_{i,k,\varepsilon},\ S_{i,k,\varepsilon}(x,t(x)) = t(x)$.

Soit $\tau_{i,k,\varepsilon}\otimes 1 \in Y(g_{i,k,\varepsilon})$. La formule (2) s'applique et nous donne la représentation correspondante de $B_{i,k,\varepsilon}$ définie par: $\forall (x,t(x)) \in G'^{\mathfrak{p}_i}_{i,k},\ \forall s \in V'_{i,k,\varepsilon},\ \forall y \in U_{i,k,\varepsilon}$,

$$\tau_{i,k,\varepsilon} \otimes 1 \otimes S_{i,k,\varepsilon} T_{i,k,\varepsilon}(xsy) = t(x)\rho_{i,k,\varepsilon}(y)\tau_{i,k,\varepsilon}(x,t(x)). \tag{6}$$

On définit enfin l'ensemble suivant:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{k,\varepsilon} = \{\tau_{k,\varepsilon} = (\tau_{i,k,\varepsilon}) \in \prod_{i=1}^{i=n-1} Y_{i,k,\varepsilon}\ \mid .\forall i,\ 1 \leq i < k, \tau_{n-i,k,\varepsilon} = \tau_{i,k,\varepsilon} \\ .\forall i,j,\ k \leq i,j \leq n-k, \tau_{i,k,\varepsilon} = \tau_{j,k,\varepsilon}\}. \end{aligned}$$

Soit $\tau_{k,\varepsilon} = (\tau_{i,k,\varepsilon}) \in \mathcal{Y}_{k,\varepsilon}$. On définit la famille $(\pi_i^k(\tau,\varepsilon))_{1\leq i\leq n-1}$ de P_i-représentations de type Duflo, à l'aide de (3), par:

$$\forall i,\ 1 \leq i \leq n-1,\ \pi_i^k(\tau,\varepsilon) = \mathrm{Ind}_{B_{i,k,\varepsilon}}^{P_i} \tau_{i,k,\varepsilon} \otimes 1 \otimes S_{i,k,\varepsilon} T_{i,k,\varepsilon}. \tag{7}$$

5.2. Le problème maintenant est de savoir comment construire une représentation unitaire irréductible de G à partir de la donnée d'une famille de P_i-représentations de type Duflo définie sur les sous-groupes paraboliques maximaux de G. La méthode utilisée est en fait valable pour un groupe semi-simple quasi-déployé L, de rang réel $p \geq 3$, et utilise la notion de produit amalgamé introduite dans le paragraphe 2.

Soit $\mathfrak{l}$ l'algèbre de Lie de L. On considère une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_l$ de $\mathfrak{l}$, une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}_l$ de $\mathfrak{l}$, B_L le sous-groupe de Borel de L d'algèbre de lie $\mathfrak{b}_l$. On considère ensuite un sous-groupe compact maximal K_L de L et un système de racines simples associé à $\mathfrak{b}_l$. Soit M'_L le normalisateur de $\mathfrak{h}_l$ dans K_L, et S_L l'ensemble des reflexions des racines simples. On sait, d'après le paragraphe 2, que le quadruplet (L, B_L, M'_L, S_L) est un système de Tits.

On peut définir la famille $(Q_i)_{1 \leq i \leq p}$ des sous-groupes paraboliques maximaux standards de L. Le théorème 2.1 et la propriété d'universalité du produit amalgamé nous permettent d'énoncer le résultat suivant, dont la démonstration est identique à celle du théorème 4.11 de [22].

Théorème 5.1. *Soit L un groupe de Lie semi-simple quasi-déployé de rang p supérieur ou égal à 3, soit (Q_i) la famille des sous-groupes paraboliques maximaux standards de L, associée au sous-groupe de Borel B_L. Soit $\pi_i, 1 \leq i \leq p$, une représentation unitaire irréductible de Q_i. On suppose que:*

(i) *Pour tous $i, j, 1 \leq i \leq j \leq p$, les restrictions de π_i et π_j à $Q_i \cap Q_j$ sont équivalentes.*

(ii) *Pour tout i, la restriction de π_i à B_L est irréductible.*

Alors, il existe une représentation unitaire irréductible et une seule π de L telle que:

$$\forall i, \;\; \pi_{|Q_i} = \pi_i.$$

On notera dorénavant: $\pi = A(L, \pi_i)$ une telle représentation.

5.3. Notre travail consiste maintenant à considérer une famille $(\pi_i^k(\tau, \varepsilon))_{1 \leq i \leq n-1}$ donnée par (7) et à déterminer les paramètres $\tau_{k,\varepsilon} \in \mathcal{Y}_{k,\varepsilon}$ pour lesquels les deux conditions du théorème 5.1 sont satisfaites. Il suffira ensuite "d'amalgamer" les $\pi_i^k(\tau, \varepsilon)$ pour obtenir les représentations "candidates"de G.

Soit $\tau_{k,\varepsilon} \in \mathcal{Y}_{k,\varepsilon}$, i, j deux indices tels que: $1 \leq i \neq j \leq n-1$. On adopte les notations suivantes:

$\mathfrak{p}_{i,j} = \mathfrak{p}_i \cap \mathfrak{p}_j, \mathfrak{n}_{i,j} = {}^u\mathfrak{p}_{i,j}$.

$P_{i,j} = P_i \cap P_j, \;\; N_{i,j} = N_i \cap N_j$.

$\mathfrak{b}_{i,j,k,\varepsilon} = \mathfrak{b}_{i,k,\varepsilon} \cap \mathfrak{p}_j = \mathfrak{p}_{i,j}(g_{i,k,\varepsilon}) + \mathfrak{n}_i, \;\; B_{i,j,k,\varepsilon} = B_{i,k,\varepsilon} \cap P_j$.

Soit, d'autre part, $\pi_{i,j}^k(\tau, \varepsilon)$ la restriction de $\pi_i^k(\tau, \varepsilon)$ à $P_{i,j}$.

On va tout d'abord déterminer les paramètres $(\tau_{k,\varepsilon})$ pour lesquels $\pi_{i,j}^k(\tau, \varepsilon)$ et $\pi_{j,i}^k(\tau, \varepsilon)$ sont équivalentes. Compte-tenu de la définition de l'ensemble $\mathcal{Y}_{k,\varepsilon}$, il suffit de se restreindre au cas suivant: $i < j, \;\; 1 \leq i < k, \;\; i+1 \leq j \leq n-i-1$. On se placera dorénavant dans cette situation.

• L'orbite $B.X_{k,\varepsilon}$ est dense dans $P_i.X_{k,\varepsilon}$, par hypothèse. Donc, $P_i(X_{k,\varepsilon}).B$ est un ouvert de Zariski de P_i. Comme $P_i(X_{k,\varepsilon}) \subset B_{i,k,\varepsilon}$, on en déduit que $B_{i,k,\varepsilon}.P_{i,j}$ contient un ouvert de P_i dont le complémentaire dans P_i est de codimension 1. Il s'en suit que:

$$\pi_{i,j}^k(\tau, \varepsilon) = \operatorname{Ind}_{B_{i,j,k,\varepsilon}}^{P_{i,j}} (\tau_{i,k,\varepsilon} \otimes 1 \otimes S_{i,k,\varepsilon}.T_{i,k,\varepsilon})_{|B_{i,j,k,\varepsilon}}. \tag{8}$$

On a, pour les mêmes raisons:

$$\pi^k_{j,i}(\tau,\varepsilon) = \mathrm{Ind}^{P_{i,j}}_{B_{j,i,k,\varepsilon}}(\tau_{j,k,\varepsilon}\otimes 1\otimes S_{j,k,\varepsilon}.T_{j,k,\varepsilon})_{|B_{j,i,k,\varepsilon}}. \tag{9}$$

• L' algèbre $\mathfrak{p}_{i,j,k} = \mathfrak{g}_{i,k}\cap\mathfrak{p}_j$ est en fait la sous-algèbre parabolique maximale de $\mathfrak{g}_{i,k}$ associée à la racine α_j, de décomposition de Lévi $\mathfrak{p}_{i,j,k} = \mathfrak{m}_{i,j,k}\oplus\mathfrak{n}_{i,j,k}$. Soit $P_{i,j,k} = G_{i,k}\cap P_j$ de décomposition de Levi $P_{i,j,k} = M_{i,j,k}.N_{i,j,k}$, le sous-groupe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{i,j,k}$.

D'après (4), on a l'inclusion: $G_{j,k}\subset G_{i,k}, \forall j, i+1\le j\le n-i-1$ et on vérifie que: $G_{j,k}\subset M_{ij,k}$.

• $\tau_{i,k,\varepsilon}$ est une représentation de $(G_{i,k})^{\mathfrak{p}_i}$. Or, la proposition 3.2, qui caractérise une telle extension métaplectique, permet d'affirmer qu'en fait $\tau_{i,k,\varepsilon}$ est entièrement déterminé par sa restriction à $G_{i,k}$, identifié à un sous-groupe de $(G_{i,k})^{\mathfrak{p}_i}$. Nous noterons de la même facon cette restriction.

Soit $\lambda_{i,j,k,\varepsilon}$ la restriction de $\lambda_{i,k,\varepsilon}$ à $\mathfrak{p}_{i,j,k}$. Soit $\mathfrak{c}_{i,j,k} = \mathfrak{g}_{j,k}\oplus\mathfrak{n}_{i,j,k}$ et $C_{i,j,k} = G_{j,k}N_{i,j,k}$ le sous-groupe correspondant de $P_{i,j,k}$. On vérifie alors alors le fait important suivant, dont la démonstration essentiellement technique ne sera pas reproduite ici:

Lemme 5.2. *$\mathfrak{c}_{i,j,k}$ est une sous-algèbre de type fortement unipotent de $\mathfrak{p}_{i,j,k}$, relativement à $\lambda_{i,j,k,\varepsilon}$.*

• On peut, donc, suivant le paragraphe 1.1, associer au couple $(\tau_{j,k,\varepsilon},\lambda_{i,j,k,\varepsilon})$ une $P_{i,j,k}$-représentation de type Duflo selon la formule (3), dite $P_{i,j,k}$-représentation de type Duflo associée au couple $(\tau_{j,k,\varepsilon},\lambda_{i,j,k,\varepsilon})$.

Proposition 5.3. *Soit $\tau_{k,\varepsilon}\in\mathcal{Y}_{k,\varepsilon}$. On suppose que, pour tout $i<k$ et tout $j, i+1\le j\le n-i-1$, la restriction de $\tau_{i,k,\varepsilon}$ au sous-groupe parabolique $P_{i,j,k}$ de $G_{i,k}$ est la $P_{i,j,k}$-représentation de type Duflo associée au couple $(\tau_{j,k,\varepsilon},\lambda_{i,j,k,\varepsilon})$. Alors, pour tous i,j, $1\le i<j\le n-1$, les restrictions à $P_{i,j}$ des représentations $\pi^k_i(\tau,\varepsilon)$ et $\pi^k_j(\tau,\varepsilon)$ sont équivalentes.*

Preuve. • Introduisons l'algèbre $\mathfrak{b}'_{i,j,k,\varepsilon} = \mathfrak{p}_{i,j}(g_{i,k,\varepsilon}) + \mathfrak{n}_{i,j}$, $B'_{i,j,k,\varepsilon}$ le sous-groupe de $P_{i,j}$ correspondant. Soit, enfin, $h_{i,j,k,\varepsilon}$ la restriction de $g_{i,k,\varepsilon}$ à $\mathfrak{n}_{i,j}$. On définit de même $\mathfrak{b}'_{j,i,k,\varepsilon} = \mathfrak{p}_{i,j}(g_{j,k,\varepsilon}) + \mathfrak{n}_{i,j}$, $B'_{j,i,k,\varepsilon}$ et $h_{j,i,k,\varepsilon}$.

Soit $T_{i,j,k,\varepsilon}$ la représentation de Kirillov du radical unipotent de $B_{i,j,k,\varepsilon}$, associée à $h_{i,j,k,\varepsilon}$, $S_{i,j,k,\varepsilon}$ la représentation métaplectique. On note, de la même façon, $S'_{i,j,k,\varepsilon}, T'_{i,j,k,\varepsilon}$ les objets correspondants associés au radical unipotent de $B'_{i,j,k,\varepsilon}$. On définit aussi $T_{j,i,k,\varepsilon}, S_{j,i,k,\varepsilon}$ et on remarque que $S'_{j,i,k,\varepsilon} = S'_{i,j,k,\varepsilon}, T'_{j,i,k,\varepsilon} = T'_{i,j,k,\varepsilon}$.

• Il est, tout d'abord, facile de vérifier que ${}^u\mathfrak{b}_{i,j,k,\varepsilon}$ (resp. ${}^u\mathfrak{b}_{j,i,k,\varepsilon}$) est une sous-algèbre de ${}^u\mathfrak{b}'_{i,j,k,\varepsilon}$ (resp. de ${}^u\mathfrak{b}'_{j,i,k,\varepsilon}$), co-isotrope relativement à $h_{i,j,k,\varepsilon}$ (resp. $h_{j,i,k,\varepsilon}$).

En appliquant le procédé d'induction par étages à la représentation induite $\pi^k_{j,i}(\tau,\varepsilon)$, on obtient:

$$\pi^k_{j,i}(\tau,\varepsilon) = \mathrm{Ind}^{P_{i,j}}_{B'_{j,i,k,\varepsilon}}(\mathrm{Ind}^{B'_{j,i,k,\varepsilon}}_{B_{j,i,k,\varepsilon}}(\tau_{j,k,\varepsilon}\otimes 1\otimes S_{j,k,\varepsilon}T_{j,k,\varepsilon})_{|B_{j,i,k,\varepsilon}}).$$

En tenant compte de ce qui précède, on peut appliquer la proposition 1.1. et on a, alors, l'équivalence suivante:

$$\mathrm{Ind}^{B'_{j,i,k,\varepsilon}}_{B_{j,i,k,\varepsilon}}(\tau_{j,k,\varepsilon}\otimes 1\otimes S_{j,k,\varepsilon}T_{j,k,\varepsilon})_{|B_{j,i,k,\varepsilon}} \simeq \tau_{j,k,\varepsilon}\otimes 1\otimes S'_{i,j,k,\varepsilon}.T'_{i,j,k,\varepsilon}.$$

On applique encore une fois le procédé d'induction par étages, ce qui nous donne:

$$\pi^k_{j,i}(\tau,\varepsilon) = \mathrm{Ind}^{P_{ij}}_{B'_{i,j,k,\varepsilon}}(\mathrm{Ind}^{B'_{i,j,k,\varepsilon}}_{B'_{j,i,k,\varepsilon}}(\tau_{j,k,\varepsilon} \otimes 1 \otimes S'_{i,j,k,\varepsilon}.T'_{i,j,k,\varepsilon})). \tag{10}$$

Utilisons maintenant la proposition 1.2 et l'hypothèse selon laquelle la restriction de $\tau_{i,k,\varepsilon}$ à $P_{i,j,k}$ est la $P_{i,j,k}$-représentation de type Duflo associée au couple $(\tau_{j,k,\varepsilon}, \lambda_{i,j,k,\varepsilon})$. On obtient, alors:

$$\pi^k_{j,i}(\tau,\varepsilon) = \mathrm{Ind}^{P_{ij}}_{B'_{i,j,k,\varepsilon}}(\tau_{i,k,\varepsilon} \otimes 1 \otimes S'_{i,j,k,\varepsilon}.T'_{i,j,k,\varepsilon}).$$

On applique enfin une nouvelle fois la proposition 1.1 ce qui nous donne:

$$\begin{aligned}\pi^k_{j,i}(\tau,\varepsilon) &= \mathrm{Ind}^{P_{ij}}_{B'_{i,j,k,\varepsilon}}(\mathrm{Ind}^{B'_{i,j,k,\varepsilon}}_{B_{i,j,k,\varepsilon}}(\tau_{i,k,\varepsilon} \otimes 1 \otimes S_{i,k,\varepsilon}.T_{i,k,\varepsilon})_{|B_{i,j,k,\varepsilon}}),\\ &= \mathrm{Ind}^{P_{ij}}_{B_{i,j,k,\varepsilon}}(\tau_{i,k,\varepsilon} \otimes 1 \otimes S_{i,k,\varepsilon}.T_{i,k,\varepsilon})_{|B_{i,j,k,\varepsilon}},\\ &= \pi^k_{i,j}(\tau,\varepsilon).\end{aligned}$$

□

Proposition 5.4. *Soit $\tau_{k,\varepsilon} \in \mathcal{Y}_{k,\varepsilon}$. On suppose que, pour tout $i < k$ et tout $j, i+1 \leq j \leq n-i-1$, la restriction de $\tau_{i,k,\varepsilon}$ au sous-groupe parabolique $P_{i,j,k}$ de $G_{i,k}$ est la $P_{i,j,k}$-représentation de type Duflo associée au couple $(\tau_{j,k,\varepsilon}, \lambda_{i,j,k,\varepsilon})$. Alors, pour tout i, la restriction de $\pi^k_i(\tau,\varepsilon)$ à B est irréductible.*

Preuve. Compte-tenu de la proposition 5.3, il suffit de montrer que la restriction de $\pi^k_k(\tau,\varepsilon)$ à B est irréductible. Or, il est facile de constater que cette restriction est une B-représentation de type Duflo, qui est donc bien irréductible. □

5.4. **Le cas des orbites sphériques non maximales.** On va s'intéresser, tout d'abord, aux orbites sphériques non maximales et donc supposer que $k < [\frac{n}{2}]$. Nous conserverons les notations introduites auparavant mais pouvons remarquer que, dans ce cas, le paramètre ε peut être choisi égal à 1, nous ne le ferons donc plus apparaitre dans les notations qui vont suivre. On se fixe, pour la suite, un paramètre d'admissibilité $\chi_k \in Adm_k$.

Compte-tenu de (4), on dispose d'une suite décroissante de groupes semi-simples: $G_{k,k} \subset G_{k-1,k} \subset \cdots \subset G_{1,k}$. L'idée consiste donc à construire les paramètres $\tau_{i,k}, 1 \leq i \leq k$, par récurrence sur i.

• On considère tout d'abord le groupe $G_{k,k}$, dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_{k,k} = \mathfrak{l}_k = sl_{n-2k}(\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{n-k-1})$. La forme $\lambda_{k,k}$ est nulle, on peut donc poser:

$$\tau_{k,k} = \chi_k.$$

• Considérons ensuite le groupe $G_{k-1,k}$, d'algèbre de Lie donnée par:

$$\mathfrak{g}_{k-1,k} = sl_{n-2k+2}(\alpha_k, \ldots, \alpha_{n-k}).$$

La forme $\lambda_{k-1,k,\varepsilon}$ est, dans ce cas, celle qui correspond à l'orbite minimale de $\mathfrak{g}_{k-1,k}$. On va donc appliquer à cette situation la méthode de construction de Torasso.

Suivant la proposition 5.3, on veut définir le paramètre $\tau_{k-1,k}$ de telle sorte que sa restriction à chaque parabolique $P_{k-1,j,k}$, $k \leq j \leq n-k$, soit la $P_{k-1,j,k}$-représentation de type Duflo associée au couple $(\chi_k, \lambda_{k-1,j,k})$, soit:

$$(\tau_{k-1,k})_{|P_{k-1,j,k}} = \pi^{\chi}_{k-1,j,k} = \mathrm{Ind}^{P_{k-1,j,k}}_{C_{k-1,j,k}}(\chi_k \otimes S^{\lambda}_{k-1,j,k}.T^{\lambda}_{k-1,j,k})$$

où $S^\lambda_{k-1,j,k}$ et $T^\lambda_{k-1,j,k}$ sont respectivement la représentation métaplectique et la représentation de Kirillov du radical unipotent de $P_{k-1,j,k}$, associées à la forme $\lambda_{k-1,j,k}$.

On est dans la situation classique déjà décrite par P. Torasso dans [22] et on vérifie, comme dans [22], que les hypothèses du théorème 5.1 sont satisfaites par la famille de représentations $(\pi^\chi_{k-1,j,k}, k \leq j \leq n-k)$. Comme le groupe $G_{k-1,k}$ est de rang plus grand que 3, on peut appliquer le théorème 5.1. et on pose:

$$\tau_{k-1,k} = A(G_{k-1,k}, \pi^\chi_{k-1,j,k}, k \leq j \leq n-k).$$

Comme, d'après la proposition 3.2., l'extension métaplectique $(G_{k-1,k})^{\mathfrak{p}_{k-1}}$ est engendrée par $G_{k-1,k}$ et e, on peut donc définir la représentation $\tau_{k-1,k}$ de $(G_{k-1,k})^{\mathfrak{p}_{k-1}}$ par:

$$\tau_{k-1,k}(x, t(x)) = \tau_{k-1,k}(x),\ \forall x \in G_{k-1,k}, \tau_{k-1,k}(e) = -Id.$$

On peut ensuite procéder par récurrence. Supposons construites les représentations $\tau_{j,k}, i+1 \leq j \leq k$, et considérons la représentation $\tau_{i,k}$ du groupe $G_{i,k}$. En reprenant les notations et la construction précédente, on définit, pour tout $j,\ i+1 \leq j \leq n-i-1$, les $P_{i,j,k}$-représentations de type Duflo suivantes:

$$\pi^\chi_{i,j,k} = \mathrm{Ind}^{P_{i,j,k}}_{C_{i,j,k}} \tau_{j,k} \otimes S^\lambda_{i,j,k}.T^\lambda_{i,j,k}. \tag{11}$$

On applique encore une fois le théorème 5.1 et on pose:

$$\tau_{i,k} = A(G_{i,k}, \pi^\chi_{i,j,k}, i+1 \leq j \leq n-i-1). \tag{12}$$

La représentation $\tau_{i,k}$ de l'extension métaplectique $G^{\mathfrak{p}_i}_{i,k}$ est encore donnée par:

$$\tau_{i,k}(x, t(x)) = \tau_{i,k}(x),\ \forall x \in G_{i,k}, \tau_{i,k}(e) = -Id.$$

Finalement, on constate que, dans ce cas, le paramètre $\tau_k \in \mathcal{Y}_k$ est entièrement déterminé par le paramètre d'admissibilité χ_k.

Théorème 5.5. *Soit O_k l'orbite nilpotente sphérique d'ordre $k < [\frac{n}{2}]$ de $\mathfrak{g}$ et χ_k un paramètre d'admissibilité de O_k. Soit $\tau_k \in \mathcal{Y}_k$, définie par récurrence, à partir de χ_k, par les formules (11) et (12). Soit $(\pi^k_i(\chi))$ la famille correspondante de P_i-représentations de type Duflo, donnée par la formule (7). Alors, il existe une et une seule représentation unitaire irréductible de G, $\pi_{\chi,k}$, telle que:*

$$\forall i, (\pi_{\chi,k})_{|P_i} = \pi^k_i(\chi).$$

On notera, pour $k < [\dfrac{n}{2}]$:

$$\mathcal{R}_k = \{\pi_{\chi,k}, \chi \in Adm_k\}.$$

5.5. **Le cas des orbites sphériques maximales.** On considère dans ce paragraphe le cas des orbites d'ordre maximal $O_{p,\varepsilon},\ p = [\frac{n}{2}]$. On rappelle, à ce sujet, que si $n = 2p$ est pair, il existe deux orbites d'ordre p, $O_{p,\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$, si $n = 2p+1$, il existe une seule orbite d'ordre p. On se donne une famille de P_i-représentations de type Duflo $(\pi^p_i(\tau, \varepsilon)_{1 \leq i \leq n-1})$ définie par la formule (7) et on va donc construire la suite $(\tau_{i,p,\varepsilon})$, comme dans 5.4., par récurrence sur i. La méthode est la même, seule la première étape est différente. En effet, on rappelle que:

$$\mathfrak{g}_{p-1,p} = sl_2(\alpha_p),\ \text{si } n = 2p,$$
$$\mathfrak{g}_{p-1,p} = sl_3(\alpha_p, \alpha_{p+1}),\ \text{si } n = 2p+1.$$

Le cas n = 2p. Notons $\chi_{p,\varepsilon'}, \varepsilon' = \pm 1$, le paramètre d'admissibilité défini par:

$$\chi_{p,\varepsilon'}(w^2) = (-1)^{\frac{1-\varepsilon'}{2}}.$$

- Le paramètre $\tau_{p,p,\varepsilon}$ est tout d'abord choisi dans l'ensemble $\{\chi_{p,\varepsilon'}, \varepsilon' = \pm 1\}$.
- On sait que:

$$G_{p-1,p} = \Gamma.\widetilde{SL_2(\alpha_p)}$$

où $\widetilde{SL_2(\alpha_p)}$ est le revêtement à deux feuillets de $SL_2(\alpha_p)$.

On va déterminer le paramètre $\tau_{p-1,p,\varepsilon}$ en prenant soin qu'il satisfasse aux hypothèses imposées dans la proposition 5.3. Pour cela, on considère le sous-groupe de Borel B_{α_p} de $\widetilde{SL_2(\alpha_p)}$. Comme on a: $w_{\alpha_p}^2 = w^2.a$ où a est un élément appartenant à la composante neutre de $R_{p,\varepsilon}$, on peut étendre la définition des paramètres d'admissibilité $\chi_{p,\varepsilon'}$ au groupe Γ_{α_p}.

Le paramètre $\tau_{p-1,p,\varepsilon}$ doit donc satisfaire à la propriété suivante :

$$(\tau_{p-1,p,\varepsilon})_{|B_{\alpha_p}} = \mathrm{Ind}_{\Gamma_{\alpha_p}.\exp \mathbb{R} X_{\alpha_p}}^{B_{\alpha_p}} \chi_{p,\varepsilon'} \otimes t_{\alpha_p,\varepsilon}$$

où $t_{\alpha_p,\varepsilon}$ est le caractère défini par : $t_{\alpha_p,\varepsilon}(\exp tX_{\alpha_p}) = e^{-2i\pi\varepsilon t}$.

On peut réaliser cette représentation induite dans $L^2(\mathbb{R}^{+*})$ (voir [17], 3.7) et la propriété précédente se traduit alors par les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{+*}), \tau_{p-1,p,\varepsilon}(\exp uX_{\alpha_p}).f(t) &= e^{-i\pi\varepsilon u t^2}.f(t),\\
\tau_{p-1,p,\varepsilon}(\exp uH_{\alpha_p}).f(t) &= e^{\frac{u}{2}} f(te^u),\\
\tau_{p-1,p,\varepsilon}(w_{\alpha_p}^2).f(t) &= \chi_{p,\varepsilon'}(w_{\alpha_p}^2) f(t).
\end{aligned}$$

On constate, en étudiant la classification du dual unitaire de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$, que seules les séries discrètes et limites de séries discrètes peuvent satisfaire aux relations définies précedemment.

Les séries discrètes (et limites de séries discrètes) de $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ sont paramétrées par les demi-entiers $\mathbb{Z}^*/2$. Nous noterons $\tau_{\frac{n}{2}}, n \in \mathbb{Z}^*$, ces représentations.

On sait réaliser la restriction au Borel d'une série discrète $\tau_{\varepsilon\frac{n}{2}}, \varepsilon = \pm 1, n \in \mathbb{N}^*$, dans $L^2(\mathbb{R}^{+*})$ (voir [17], proposition 3.2., ou [9], théorème 13.1.1.). Les formules de la représentation sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{+*}),\ \tau_{\varepsilon\frac{n}{2}}(\exp uX_{\alpha_p}).f(t) &= e^{-i\varepsilon\pi u t^2} f(t),\\
\tau_{\varepsilon\frac{n}{2}}(\exp uH_{\alpha_p}).f(t) &= e^{\frac{u}{2}} f(te^u),\\
\tau_{\varepsilon\frac{n}{2}}(w_{\alpha_p}^2).f(t) &= (-1)^{\frac{n}{2}}(f(t).
\end{aligned}$$

On considère l' ensemble suivant :

$$\mathcal{D}_{\varepsilon,\varepsilon'} = \{\chi_{p,\varepsilon'} \otimes \tau_{\varepsilon\frac{n}{2}},\ n \equiv (1-\varepsilon') \bmod(4)\}. \tag{13}$$

On vérifie aisément que chaque élément de $\mathcal{D}_{\varepsilon,\varepsilon'}$ est une représentation irréductible de $\Gamma.\widetilde{SL_2(\alpha_p)} = G_{p-1,p}$. On constate, alors, que l'hypothèse de la proposition 5.3 est satisfaite dès que: $\tau_{p,p,\varepsilon} = \chi_{p,\varepsilon'}$ et que $\tau_{p-1,p,\varepsilon}$ appartient à $\mathcal{D}_{\varepsilon,\varepsilon'}$.

Etant donné un élément $\delta \in \mathcal{D}_{\varepsilon,\varepsilon'}$, on pose, donc:

$$\tau_{p-1,p,\varepsilon} = \delta, \quad \tau_{p,p,\varepsilon} = \chi_{p,\varepsilon'}. \tag{14}$$

• Pour construire $\tau_{p-2,p,\varepsilon}$ on utilise le même procédé que celui du paragraphe précédent. On pose:

$$\forall j, p-1 \leq j \leq p+1,\ \pi^{\delta}_{p-2,j,p} = \mathrm{Ind}_{C_{p-1,j,p}}^{P_{p-2,j,p}} \tau_{j,p,\varepsilon} \otimes S^{\lambda}_{p-2,j,p,\varepsilon}.T^{\lambda}_{p-2,j,p,\varepsilon},$$
$$\tau_{p-2,p,\varepsilon} = A(G_{p-2,p}, \pi^{\delta}_{p-2,j,p}, p-1 \leq j \leq p+1).$$

• On construit ensuite les paramètres $\tau_{i,p,\varepsilon}, 1 \leq i \leq p-3$, par récurrence selon des formules analogues à (11) et (12) soit:

$$\pi^{\delta}_{i,j,p} = \mathrm{Ind}_{C_{i,j,p}}^{P_{i,j,p}} \tau_{j,p,\varepsilon} \otimes S^{\lambda}_{i,j,p,\varepsilon}.T^{\lambda}_{i,j,p,\varepsilon}, \tag{15}$$
$$\tau_{i,p,\varepsilon} = A(G_{i,p}, \pi^{\delta}_{i,j,p}, i+1 \leq j \leq n-i-1). \tag{16}$$

Théorème 5.6. *Soit $O_{p,\varepsilon}$ une orbite nilpotente sphérique maximale "paire" de $\mathfrak{g}$, $(n = 2p)$. Soit $\mathcal{D}_{\varepsilon,\varepsilon'}, \varepsilon' = \pm 1$, l'ensemble de représentations de $\Gamma.\widetilde{SL_2(\alpha_p)}$ définie par (13) et soit $\delta \in \mathcal{D}_{\varepsilon,\varepsilon'}$. Soit $\tau_{k,\varepsilon} \in \mathcal{Y}_{k,\varepsilon}$, définie par récurrence, à partir de δ, par les formules (14), (15) et (16), et $(\pi^p_i(\delta))$ la famille correspondante de P_i-représentations de type Duflo donnée par la formule (7). Alors, il existe une et une seule représentation unitaire irréductible de G, $\pi_{\delta,p}$, telle que:*

$$\forall i, (\pi_{\delta,p})_{|P_i} = \pi^p_i(\delta).$$

On notera:

$$\mathcal{R}_{2p} = \{\pi_{\delta,p}\ /\ \delta \in \mathcal{D}_{\varepsilon,\varepsilon'}, \varepsilon' = \pm 1\}.$$

Le cas $\mathbf{n = 2p + 1}$. Comme dans 5.4., le paramètre ε peut être choisi égal à 1 et nous ne le ferons plus apparaitre dans les notations qui vont suivre.

• Dans ce cas, on peut écrire: $G_{p-1,p} = \Gamma.\widetilde{SL_3(\alpha_p, \alpha_{p+1})}$, où $\widetilde{SL_3(\alpha_p, \alpha_{p+1})}$ est le revêtement à deux feuillets de $SL_3(\mathbb{R})$. Dans [21], P. Torasso a décrit les représentations unitaires irréductibles du groupe $\widetilde{SL_3(\alpha_p, \alpha_{p+1})}$ associées, selon le sens usuel, à l'orbite minimale de $sl_3(\alpha_p, \alpha_{p+1})$. Considérons, pour cela, les caractères t_z définis sur $\Gamma_{\alpha_p+\alpha_{p+1}}$ par:

$$t_z(w^2_{\alpha_p+\alpha_{p+1}}) = z,\ \ z = -1, +1, -i, +i.$$

Ces caractères définissent les paramètres d'admissibilité de l'orbite minimale. On sait qu'il existe une et une seule représentation de $\widetilde{SL_3(\mathbb{R})}$, associée à t_z, que nous noterons ρ_z, lorsque $z = \pm 1$ ([21], proposition VI.12) ou lorsque $z = -i$ ([21], théorème VII.1). Par contre, il n'en existe pas lorsque $z = i$ ([21], théorème VII.1).

Par ailleurs, on rappelle que l'orbite O_p possède deux paramètres d'admissibilité $\chi_{p,\varepsilon'}, \varepsilon' = \pm 1$, que l'on peut définir par les données suivantes:

$$\chi_{p,1}(w^2_{\alpha_p+\alpha_{p+1}}) = i,\ \chi_{p,-1}(w^2_{\alpha_p+\alpha_{p+1}}) = -i.$$

• On vérifie que $\chi_{p,-1} \otimes \rho_{-i}$ est bien une représentation irréductible de $\Gamma.\widetilde{SL_3(\alpha_p, \alpha_{p+1})}$. En suivant un raisonnement analogue à ce qui précède, il est facile de voir que les conditions imposées par la proposition 5.3 impliquent la situation suivante:

$$\tau_{p-1,p} = \chi_{p,-1} \otimes \rho_{-i},\quad \tau_{p,p} = \chi_{p,-1}. \tag{17}$$

• Pour construire $\tau_{p-2,p}$, on utilise les formules suivantes:

$$\forall j, p-1 \leq j \leq p+2,\ \pi^{\rho}_{p-2,j,p} = \mathrm{Ind}_{C_{p-2,j,p}}^{P_{p-2,j,p}} \tau_{j,p} \otimes S^{\lambda}_{p-2,j,p}.T^{\lambda}_{p-2,j,p},$$
$$\tau_{p-2,p} = A(G_{p-2,p}, \pi^{\rho}_{p-2,j,p}, p-1 \leq j \leq p+2).$$

La construction des paramètres $\tau_{i,p}, 1 \leq i \leq p-2$ procède ensuite par récurrence comme dans le cas précédent, selon des formules analogues à (14) et (15):

$$\pi^{\rho}_{i,j,p} = \mathrm{Ind}_{C_{i,j,p}}^{P_{i,j,p}} \tau_{j,p} \otimes S^{\lambda}_{i,j,p}.T^{\lambda}_{i,j,p}, \tag{18}$$

$$\tau_{i,p} = A(G_{i,p}, \pi^{\rho}_{i,j,p}, i+1 \leq j \leq n-i-1). \tag{19}$$

Théorème 5.7. *Soit O_p l'orbite nilpotente sphérique maximale "impaire" de $\mathfrak{g}$, $(n = 2p+1)$. Soit ρ_{-i} la représentation minimale de $\widetilde{SL_3(\mathbb{R})}$ associée au paramètre d'admissibilité t_{-i} de l'orbite minimale de $sl_3(\mathbb{R})$. Soit $\tau_k \in \mathcal{Y}_k$, définie par récurrence, à partir de ρ_{-i}, par les formules (17), (18) et (19), et $(\pi^p_i(\rho))$ la famille correspondante de P_i-représentations de type Duflo donnée par la formule (7). Alors, il existe une et une seule représentation unitaire irréductible de G, $\pi_{\rho,p}$, telle que:*

$$\forall i, (\pi_{\rho,p})_{|P_i} = \pi^p_i(\rho).$$

On notera:

$$\mathcal{R}_{2p+1} = \{\pi_{\rho,p}\}.$$

Finalement, les théorèmes 5.5, 5.6, 5.7 nous fournissent des familles de représentations unipotentes dont nous allons montrer maintenant qu'elles sont bien associées aux orbites nilpotentes sphériques correspondantes. On pose:

$$\mathcal{R} = \bigcup_{2 \leq k \leq \frac{n}{2}} \mathcal{R}_k.$$

6. Sur la dimension de Gelfand-Kirillov des éléments de $\mathcal{R}$

Soit π une représentation dans $\mathcal{R}$. On considère la représentation infinitésimale π^{∞} de π, qui est une représentation de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Soit I_π l'annulateur de π^{∞} dans $U(\mathfrak{g})$.

Définition 6.1. On appelle Dimension de Gelfand-Kirillov de π la dimension de Gelfand-Kirillov de l'algèbre-quotient $U(\mathfrak{g})/I_\pi$. On note $GK\dim(\pi)$ cette dimension.

Définition 6.2. Soit $\pi \in \mathcal{R}$. π sera dite GK-associée à l'orbite $O_{k,\varepsilon}$ si l'on a:

$$GK\dim(\pi) = \dim O_{k,\varepsilon}.$$

Notre but, dans ce paragraphe, est de démontrer que chaque élément de $\mathcal{R}_k$ est GK-associé à l'orbite $O_{k,\varepsilon}$. Pour tout i, $1 \leq i \leq n-1$, on considère la restriction de π au parabolique maximal P_i. On pose: $I_{i,\pi} = I_\pi \cap U(\mathfrak{p}_i)$ et on peut définir, comme précedemment, la dimension de Gelfand-Kirillov, $GK\dim(\pi_{|P_i})$, de la représentation $\pi_{|P_i}$ par la formule:

$$GK\dim(\pi_{|P_i}) = GK\dim(U(\mathfrak{p}_i)/I_{i,\pi}).$$

La première étape consiste à relier $GK\dim(\pi)$ aux nombres $GK\dim(\pi_{|P_i})$.

6.1. On se place, dans ce paragraphe, dans le contexte plus général d'une algèbre de Lie simple complexe $\mathfrak{g}$, de rang r plus grand ou égal à 3. On adopte, pour $\mathfrak{g}$, les notations du paragraphe 3, pour une sous-algèbre de Cartan, un système de racines ou encore les vecteurs-racine associés. On introduit également les sous-algèbres paraboliques maximales standard, $\mathfrak{p}_i, 1 \leq i \leq r$.

On pose: $\mathfrak{p}_{ij} = \mathfrak{p}_i \cap \mathfrak{p}_j, 1 \leq i \leq j \leq r,\ \mathfrak{p}_{ii} = \mathfrak{p}_i$.

Définition 6.3. *1) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite somme amalgamée des $\mathfrak{p}_i$ suivant leurs intersections deux à deux si $\mathfrak{g}$ est limite inductive du système $(\mathfrak{p}_{ij}, \varphi_{ij}, \varphi_{ji},\ 1 \leq i \leq j \leq r)$ où $\varphi_{ij} : \mathfrak{p}_{ij} \longrightarrow \mathfrak{p}_i,\ \varphi_{ji} : \mathfrak{p}_{ij} \longrightarrow \mathfrak{p}_j$ sont les inclusions canoniques. En d'autres termes, $\mathfrak{g}$ est solution du problème universel suivant:*

Etant donnée une algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ et des morphismes d'algèbres de Lie $a_i : \mathfrak{p}_i \longrightarrow \mathfrak{a}$ tels que: $\forall (i,j), a_{i|\mathfrak{p}_{ij}} = a_{j|\mathfrak{p}_{ij}}$, il existe un morphisme d'algèbres de Lie et un seul $h : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{a}$ tel que: $h_{|\mathfrak{p}_i} = a_i,\ \forall i$.

2) L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ est dite somme amalgamée des $U(\mathfrak{p}_i)$ suivant leurs intersections deux à deux si $U(\mathfrak{g})$ est limite inductive du système $(U(\mathfrak{p}_{ij}), \phi_{ij}, \phi_{ji},\ 1 \leq i \leq j \leq r)$ où $\phi_{ij} : U(\mathfrak{p}_{ij}) \longrightarrow U(\mathfrak{p}_i),\ \phi_{ji} : U(\mathfrak{p}_{ij}) \longrightarrow U(\mathfrak{p}_j)$ sont les inclusions canoniques. En d'autres termes, $U(\mathfrak{g})$ est solution du problème universel suivant:

Etant donnée une algèbre associative $\mathcal{A}$ et des morphismes d'algèbres $u_i : U(\mathfrak{p}_i) \longrightarrow \mathcal{A}$ tels que: $\forall (i,j), u_{i|U(\mathfrak{p}_{ij})} = u_{j|U(\mathfrak{p}_{ij})}$, il existe un morphisme d'algèbres associatives et un seul $h : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{A}$ tel que: $h_{|U(\mathfrak{p}_i)} = u_i,\ \forall i$.

La situation envisagée par J. Tits ([19]) dans le cas des groupes semi-simples se décrit de la même façon pour les algèbres de Lie et on a le résultat suivant:

Proposition 6.1. *Si $\mathfrak{g}$ est simple de rang au moins égal à 3, alors $\mathfrak{g}$ est somme amalgamée de ses paraboliques maximaux suivant leurs intersections deux à deux. De même, $U(\mathfrak{g})$ est somme amalgamée des $U(\mathfrak{p}_i)$ suivant leurs intersections deux à deux.*

Preuve. Comme précisé plus haut, la propriété pour $\mathfrak{g}$ s'obtient suivant le même procédé que celui utilisé par J. Tits ([19]). Pour l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$, on procède comme suit.

Posons: $U = U(\mathfrak{g}),\ \forall i, U_i = U(\mathfrak{p}_i),\ \sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow U,\ \sigma_i : \mathfrak{p}_i \longrightarrow U_i$ les injections canoniques.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative et, pour tout indice i, des morphismes d'algèbres associatives $\beta_i : U_i \longrightarrow \mathcal{A}$ tels que: $\forall (i,j),\ (\beta_i)_{|U_i \cap U_j} = (\beta_j)_{|U_i \cap U_j}$. Soit $\widetilde{\beta_i} = \beta_i \circ \sigma_i$. L'algèbre associative $\mathcal{A}$ étant munie de sa structure usuelle d'algèbre de Lie, il s'en suit que, $\forall i$, les morphismes $\widetilde{\beta_i} : \mathfrak{p}_i \longrightarrow \mathcal{A}$ sont des morphismes d'algèbres de Lie satisfaisant à la propriété:

$$\forall (i,j), (\widetilde{\beta_i})_{|\mathfrak{p}_{ij}} = (\widetilde{\beta_j})_{|\mathfrak{p}_{ij}}.$$

Compte-tenu de 1), il existe un morphisme d'algèbres de Lie $h : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$ tel que: $\forall i, h_{|\mathfrak{p}_i} = \widetilde{\beta_i}$.

Par propriété d'universalité de l'algèbre enveloppante U, selon [6], lemme 2.1.3, on en déduit un morphisme d'algèbres associatives $H : U \longrightarrow \mathcal{A}$ tel que:

$$H \circ \sigma = h, H(1) = 1.$$

Désignons par $j_i : U_i \longrightarrow U$ l'injection canonique. Le fait que $\forall i, H \circ \sigma_i = \widetilde{\beta_i}$ implique que: $\forall i, H \circ j_i = \beta_i$, ce qui montre bien que U satisfait à la propriété universelle souhaitée. $\square$

Le corollaire suivant est conséquence directe de ce qui précède.

Corollaire 6.2. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe de rang au moins égal à 3. Soit $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j, \mathfrak{p}_k, i \neq j \neq k$, trois sous-algèbres paraboliques maximales de $\mathfrak{g}$. Alors, $\mathfrak{g}$ (resp. $U(\mathfrak{g})$) est somme amalgamée de $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j, \mathfrak{p}_k$ (resp. $U(\mathfrak{p}_i), U(\mathfrak{p}_j), U(\mathfrak{p}_k)$) suivant les intersections $\mathfrak{p}_{rs}$, $(r,s) \in \{i,j,k\}$ (resp. $U(\mathfrak{p}_{rs})$, $(r,s) \in \{i,j,k\}$).*

6.2. Soit $\pi_k \in \mathcal{R}_k$ et, pour tout entier $i, 1 \leq i \leq n-1$, $\pi_{i,k}$ la restriction de π_k au parabolique maximal P_i. Nous allons, tout d'abord, calculer la dimension de Gelfand-Kirillov de $\pi_{k,k}$, en rappelant que, d'après la construction faite dans le paragraphe 5, cette représentation est la P_k-représentation de type Duflo associée au couple $(f_{k,k,\varepsilon}, \chi_k)$, $f_{k,k,\varepsilon}$ étant de type unipotent sur $\mathfrak{p}_k$ et χ_k étant un paramètre d'admissibilité.

Nous allons, pour cela, utiliser certains résultats de [8] relatifs à la dimension de Gelfand-Kirillov des représentations de type Duflo introduites dans le paragraphe 1. En reprenant les notations de ce paragraphe, on considère la représentation $\pi_{q,\tau}$ d'un groupe presque algébrique réel P, où q est une forme de type unipotent sur $\mathfrak{p}$ et τ un élément de $Y(q)$. On note $\mathcal{E}$ le noyau de τ^∞ dans $U(\mathfrak{p}(q))$. Selon la classification des idéaux primitifs de M. Duflo, on fait correspondre au couple $(iq, \mathcal{E})$ un idéal primitif de $U(\mathfrak{p})$, noté $I_{iq,\mathcal{E}}$. On pourra se reporter à [8], chapitre IV, pour la définition d'un tel idéal. Les résultats obtenus par M.Duflo sont les suivants:

Proposition 6.3. 1) *On a:*

$$GK\dim\ (U(\mathfrak{p})/I_{iq,\mathcal{E}}) = \dim(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}(q)) + GK\dim\ (U(\mathfrak{p}(q))/\mathcal{E}).$$

2) *On a:*

$$\ker \pi_{q,\tau}^\infty = \bigcap_{x \in P} x.I_{iq,\mathcal{E}}.$$

Considérons, maintenant, le cas de la représentation $\pi_{k,k}$. Par définition d'un paramètre d'admissibilité, on constate que $U(\mathfrak{p}_k(f_{k,k,\varepsilon}))/\mathcal{E}_k) = 0$, où $\mathcal{E}_k$ est le noyau de χ_k. D'autre part, soit $I_{\chi,k}$ l'idéal de $U(\mathfrak{p}_k)$ correspondant au couple $(if_{k,k,\varepsilon}, \chi_k)$. De la proposition 6.3, 2), on déduit que:

$$\ker \pi_{k,k}^\infty = \bigcap_{x \in P_k} x.I_{\chi,k}.$$

Comme P_k ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes, l'intersection précédente ne se fait que sur un nombre fini de termes et, suivant une propriètè classique des dimensions de Gelfand-Kirillov, on a:

$$GK\dim(U(\mathfrak{p}_k)/\ker \pi_{k,k}^\infty) = \sup_{x \in P_k} (GK\dim\ (U(\mathfrak{p}_k)/x.I_{\chi,k})) = GK\dim\ (U(\mathfrak{p}_k)/I_{\chi,k}).$$

De la proposition 6.3, 1), et de ce qui précède, on déduit le lemme suivant:

Lemme 6.4. *On a:*

$$GK\dim\ \pi_{k,k} = \dim O_{k,\varepsilon}.$$

Soit $I_{\pi,k}$ l'annulateur de π_k^∞ dans $U(\mathfrak{g})$, $I_{\pi,i,k} = I_{\pi,k} \cap U(\mathfrak{p}_{i,k})$. L'injection canonique $U(\mathfrak{p}_k) \longrightarrow U(\mathfrak{g})$ induit un morphisme injectif de $U(\mathfrak{p}_k)/I_{\pi,k,k}$ dans $U(\mathfrak{g})/I_{\pi,k}$. On a donc l'inégalité:

$$GK\dim(\pi_k) \geq \dim O_{k,\varepsilon}. \tag{20}$$

On se propose, maintenant, de montrer le résultat suivant:

Proposition 6.5. *Il existe une variété algébrique affine complexe $\mathbb{X}_k$, dont la dimension est $\frac{1}{2}\dim O_{k,\varepsilon}$, des morphismes d'algèbres $\phi_i : U(\mathfrak{p}_i) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_k), i \in \{k, k+1, k+2\}$ ou $i \in \{k-1, k, k+1\}, \mathbb{D}(\mathbb{X}_k)$ désignant l'algèbre des opérateurs différentiels réguliers sur $\mathbb{X}_k$, tels que:*

$$I_{\pi,i,k} = \ker \phi_i,$$
$$(\phi_i)_{|\ U(\mathfrak{p}_{i,j})} = (\phi_j)_{|\ U(\mathfrak{p}_{i,j})},\ (i,j) \in \{k, k+1, k+2\} \text{ ou } (i,j) \in \{k-1, k, k+1\}.$$

Stratégie de la preuve. La méthode utilisée pour démontrer cette proposition est relativement technique. Elle peut se résumer ainsi:

- On considère les restrictions $\pi_{i,k}$ de π_k à trois paraboliques maximaux $P_i, i \in \{l, m, n\}$. Ces restrictions sont des représentations induites données par les formules (6) et (7).
- Pour chacune de ces trois restrictions, on construit explicitement un espace de représentation qui n'est autre que l'espace des fonctions de carré intégrable sur une certaine variété réelle $\mathbb{X}_{i,\mathbb{R}},\ i = l, m, n$, de complexifiée $\mathbb{X}_i$.
- En passant à la représentation dérivée, on obtient des morphismes d'algèbres $\psi_i : U(\mathfrak{p}_i) \longrightarrow D(\mathbb{X}_i)$.
- Par dualité et transformation de Fourier, on construit ensuite explicitement des morphismes d'algèbres $\mathcal{F}_{l,m} : D(\mathbb{X}_m) \longrightarrow D(\mathbb{X}_l), \mathcal{F}_{l,n} : D(\mathbb{X}_n) \longrightarrow D(\mathbb{X}_l)$, ce qui permet de définir des morphismes $\phi_i : U(\mathfrak{p}_i) \longrightarrow D(\mathbb{X}_l)$ et on vérifie enfin, sur un système de générateurs, que ces morphismes coincident sur les paraboliques intersections deux à deux.

Le problème est de choisir correctement les trois paraboliques maximaux. On envisage à cet effet les cas suivants:

- Le cas non maximal, $2 \leq k < [\frac{n}{2}]$. On remarque alors que pour $i \in \{k, k+1, k+2\}$, les représentations $\pi_{i,k}$ correspondent à des P_i-orbites toutes de type unipotent et sont données, via la formule (7), par le même paramètre qui est un paramètre d'admissibilité de l'orbite. Il s'en suit que les calculs permettant de vérifier que ϕ_k et ϕ_{k+2} ou ϕ_{k+1} et ϕ_{k+2} coincident sur l'intersection sont totalement analogues à ceux permettant de le vérifier dans le cas ϕ_k, ϕ_{k+1}. Pour ne pas alourdir la preuve, nous nous contenterons de reproduire la description précise de ces calculs dans le cas (ϕ_k, ϕ_{k+1}).
- le cas maximal de l'orbite impaire, $k = p, n = 2p+1$. On considère les paraboliques $P_i, i \in \{p-1, p, p+1\}$. Cette fois, les représentations $\pi_{p,p}$ et $\pi_{p+1,p}$ correspondent à la même situation et sont données par le même paramètre d'admissibilité. Comme précedemment, on constate que les calculs permettant de vérifier que ϕ_{p-1} et ϕ_p coincident sur l'intersection sont totalement analogues à ceux permettant de le vérifier dans le cas (ϕ_{p-1}, ϕ_{p+1}) ou (ϕ_p, ϕ_{p+1}).
- Le cas maximal pair, $k = p, n = 2p$. On considère encore les paraboliques $P_i, i \in \{p-1, p, p+1\}$ et on voit que: $p+1 = n-(p-1)$. Par construction, on sait que les représentations $\pi_{p-1,p}$ et $\pi_{p+1,p}$ sont de même nature. On peut

donc utiliser la même remarque que précedemment et se concentrer sur la situation correspondant aux seuls morphismes ϕ_{p-1}, ϕ_p.

1er Cas. Supposons, tout d'abord, que: $2 \leq k < [\frac{n}{2}]$. Dans ce cas, on sait que l'on peut faire disparaitre le paramètre ε.

• On rappelle que:

$$\pi_{k,k} = \mathrm{Ind}_{B_{k,k}}^{P_k} \chi_k \otimes 1 \otimes S_{k,k} T_{k,k};$$

où:

$$\mathfrak{r}_{k,k} = \mathfrak{r}_k, \quad \mathfrak{b}_{k,k} = \mathfrak{r}_k + {}^u\mathfrak{p}_k(X_k) + \mathfrak{n}_k;$$

avec:

$${}^u\mathfrak{p}_k(X_k) = \langle X_{-\beta_{ij}}, (i,j) \in \{k+1, n-k\} \times \{n-k, n-1\} \rangle.$$

Soit $\mathfrak{q}_k = sl_{k+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, Q_k le sous-groupe analytique de G correspondant et $\mathfrak{q}_{k,k}$ la sous-algèbre parabolique maximale standard de $\mathfrak{q}_k$ associée à la racine α_k, $Q_{k,k}$ le sous-groupe parabolique de Q_k correspondant. On note $R_{Q,k}$ un facteur réductif de $Q_{k,k}$, d'algèbre de Lie donnée par:

$$r_{Q,k} = sl_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \oplus \mathbb{R} H_{\alpha_k}.$$

Soit, enfin, $\mathfrak{u}_k = {}^u\mathfrak{p}_k(X_k)^+ = \langle X_{\beta_{ij}}, X_{-\beta_{ij}} \in {}^u\mathfrak{p}_k(X_k) \rangle$ et $\mathfrak{s}_k = r_{Q,k} \oplus \mathfrak{u}_k$.

$\mathfrak{s}_k$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{p}_k$ supplémentaire de $\mathfrak{b}_{k,k}$ et de dimension $\dfrac{1}{2} \dim O_{k,\varepsilon}$. On note $\mathcal{H}_{\chi,k}$ l'espace de Hilbert de la représentation induite $\pi_{k,k}$ et on considère la variété réelle $\mathbb{X}_{k,\mathbb{R}} = R_{Q,k} \times \mathfrak{u}_k$, $\mathbb{X}_k$ sa complexifiée. Soit $j_k : \mathbb{X}_{k,\mathbb{R}} \longrightarrow P_k$ l'application définie par: $j_k(x,Y) = x.\exp Y$. On définit ensuite l'espace de Hilbert $E_k = L^2(\mathbb{X}_{k,\mathbb{R}})$ des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{X}_{k,\mathbb{R}}$, muni de la mesure produit $dY \otimes dx$, où dY est la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{u}_k$ et dx la mesure de Haar sur $R_{Q,k}$.

Dans ces conditions, il est facile de voir que l'application $\mathfrak{j}_k : f \longrightarrow f \circ j_k$ définit une isométrie de $\mathcal{H}_{\chi,k}$ sur E_k, donnée par:

$$\forall x \in R_{Q,k},\ \forall Y \in \mathfrak{u}_k,\ \forall f \in \mathcal{H}_{\chi,k},\ \mathfrak{j}_k(f)(x,Y) = f(x \exp Y).$$

A chaque $X \in \mathfrak{p}_k$, on associe l'opérateur différentiel l_X, agissant sur l'espace $C^\infty(P_k)$, défini par:

$$\forall f \in C^\infty(P_k), l_X.f(x) = \frac{d}{dt}(f(\exp -tXx))_{t=0}.$$

L'application $X \longrightarrow l_X$ se prolonge en un morphismes d'algèbres de $U(\mathfrak{p}_k)$ dans l'algèbre des opérateurs différentiels agissant sur $C^\infty(P_k)$.

Notons $\mathcal{H}_{\chi,k}^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ de $\pi_{k,k}$. Suivant le théorème 5.1 de [16] qui caractérise les vecteurs C^∞ d'une représentation induite, on sait que:

$$- \mathcal{H}_{\chi,k}^\infty = \{f \in C^\infty(P_k) \ / \ \forall a \in U(\mathfrak{p}_k), l_a.f \in \mathcal{H}_{\chi,k}\},$$
$$- \forall a \in U(\mathfrak{p}_k),\ \forall f \in \mathcal{H}_{\chi,k}^\infty,\ \pi_{k,k}^\infty(a).f = l_a.f.$$

Par transport de structure, on réalise $\pi_{k,k}$ dans E_k et on a:

$$E_k^\infty \subset C^\infty(\mathbb{X}_{k,\mathbb{R}}).$$

On peut ainsi définir un morphisme d'algèbres $\phi_k : U(\mathfrak{p}_k) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_k)$ tel que:

$$\forall f \in E_k^\infty,\ \forall a \in U(\mathfrak{p}_k), \pi_{k,k}^\infty(a).f = \phi_k(a).f. \tag{21}$$

• En ce qui concerne la représentation $\pi_{k,k+1}$, on rappelle que:

$$\pi_{k,k+1} = \mathrm{Ind}_{B_{k+1,k}}^{P_{k+1}} \chi_k \otimes 1 \otimes S_{k+1,k} T_{k+1,k,};$$

où:

$$\mathfrak{b}_{k+1,k} = \mathfrak{r}_{k+1,k} + {}^u\mathfrak{p}_{k+1}(X_k) + \mathfrak{n}_{k+1};$$

avec:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_{k+1,k} &= sl_{n-2k-1}(\alpha_{k+2},\dots,\alpha_{n-k-1}) \oplus \mathfrak{v}_{k,1} \oplus \langle H_{\alpha_{k+1}}\rangle, \\ {}^u\mathfrak{p}_{k+1}(X_k) &= \langle X_{-\beta_{ik}}, i \in \{1,k\}\rangle \oplus \langle X_{-\beta_{ij}}, (i,j) \in \{k+2, n-k\} \times \{n-k, n-1\}\rangle, \\ &\oplus \langle X_{\beta_{k+1j}}, k+1 \leq j \leq n-k-1\rangle. \end{aligned}$$

On pose: $\mathfrak{u}_{k+1} = ({}^u\mathfrak{p}_{k+1}(X_k) \cap \mathfrak{n}^-)^+ = \langle X_{\beta_{ij}},\ X_{-\beta_{ij}} \in {}^u\mathfrak{p}_{k+1}(X_k)\rangle$, puis $\mathfrak{s}_{k+1} = r_{Q,k} \oplus \mathfrak{u}_{k+1}$.

$\mathfrak{s}_{k+1}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{p}_{k+1}$ supplémentaire de $\mathfrak{b}_{k+1,k}$ et de dimension $\frac{1}{2}\dim O_k$. On reprend ensuite les notations précédentes: $\mathcal{H}_{\chi,k+1}$ est l'espace de Hilbert de la représentation induite $\pi_{k,k+1}$, $\mathbb{X}_{k+1,\mathbb{R}} = R_{Q,k} \times \mathfrak{u}_{k+1}, \mathbb{X}_{k+1}$ est sa complexifiée. Soit $j_{k+1} : \mathbb{X}_{k+1,\mathbb{R}} \longrightarrow P_{k+1}$ l'application définie par: $j_{k+1}(x,X) = x.\exp X$. Soit enfin $E_{k+1} = L^2(\mathbb{X}_{k+1,\mathbb{R}})$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{X}_{k+1,\mathbb{R}}$, muni de la mesure adéquate. L'application $f \longrightarrow f \circ j_{k+1}$ est une isométrie de $\mathcal{H}_{\chi,k+1}$ sur E_{k+1} et, selon les mêmes arguments que précedemment, on peut définir un morphisme d'algèbres $\psi_{k+1} : U(\mathfrak{p}_{k+1}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_{k+1})$ tel que:

$$\forall f \in E^\infty_{k+1},\ \forall a \in U(\mathfrak{p}_{k+1}), (\pi_{k,k+1})^\infty(a).f = \psi_{k+1}(a).f. \tag{22}$$

• Les deux espaces $\mathfrak{u}_k$ et $\mathfrak{u}_{k+1}$ peuvent être mis en dualité par une transformation de Fourier $\mathcal{F}_{k,k+1}$, définie de la manière suivante: A toute fonction φ de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathfrak{u}_{k+1})$, on associe la fonction $\mathcal{F}_{k,k+1}(\varphi)$, définie par:

$$\forall Y \in \mathfrak{u}_k, \mathcal{F}_{k,k+1}(\varphi)(Y) = \int_{\mathfrak{u}_{k+1}} \varphi(X) e^{2i\pi f_k([X,Y])} dX. \tag{23}$$

Plus précisément, on pose $n_k = k(n-2k)$ et on identifie naturellement les espaces $\mathfrak{u}_k$ et $\mathfrak{u}_{k+1}$ à $\mathbb{R}^{n_k}$. L'application de $\mathfrak{u}_{k+1} \times \mathfrak{u}_k$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $(X,Y) \longrightarrow f_k([X,Y])$ s'identifie alors à une forme bilinéaire Q_k sur $\mathbb{R}^{n_k}$ donnée par:

$$\forall X = (x_{ij}) \in \mathfrak{u}_{k+1},\ \forall Y = (y_{ij}) \in \mathfrak{u}_k, Q_k(X,Y) = \sum_{i=1}^{i=k} x_{ik}.y_{k+1,n-i}. \tag{24}$$

L'application $\mathcal{F}_{k,k+1}$ se prolonge en un morphisme d'algèbres, noté encore $\mathcal{F}_{k,k+1}$, de $\mathbb{D}(\mathbb{X}_{k+1})$ dans $\mathbb{D}(\mathbb{X}_k)$ et on pose:

$$\phi_{k+1} = \mathcal{F}_{k,k+1} \circ \psi_{k+1}.$$

ϕ_{k+1} est un morphisme d'algèbres de $U(\mathfrak{p}_{k+1})$ dans $\mathbb{D}(\mathbb{X}_k)$ et il est clair, d'après (21) et (22), que $\ker \phi_k = I_{\pi,k,k}, \ker \phi_{k+1} = I_{\pi,k+1,k}$.

• On peut décrire de manière totalement analogue la représentation $\pi_{k,k+2}$, la variété $\mathbb{X}_{k+2}$, le morphisme ψ_{k+2}, la transformation de Fourier $\mathcal{F}_{k,k+2}$ qui relie $D(\mathbb{X}_{k+2})$ et $D(\mathbb{X}_k)$ et, enfin, le morphisme ϕ_{k+2} tel que: $\ker \phi_{k+2} = I_{\pi,k+2,k}$. Pour ne pas trop alourdir la rédaction, nous n'en donnerons pas la description explicite.

• Il reste à prouver que les restrictions des ϕ_i aux intersections deux à deux coincident. On fait cette vérification en déterminant explicitement ces opérateurs pour un système de générateurs. On présentera ici ces calculs pour les morphismes (ϕ_k, ϕ_{k+1}), les deux autres cas étant analogues comme nous l'avons déjà précisé au début de la démonstration (voir "Stratégie de la preuve").

Compte-tenu des définitions, il suffit de montrer que:

$$\forall Z \in \{X_{\alpha_k}, H_{\alpha_j}, k+1 \leq j \leq n-1, X_{-\alpha_{n-i}}\ 1 \leq i \leq k, X_{\beta_{k+1,j}},\ n-k \leq j \leq n-1\},$$
$$\phi_k(Z) = \phi_{k+1}(Z)$$

l'assertion étant immédiate ou s'en déduisant par composition pour les autres générateurs.

On obtient facilement les résultats suivants:

$$\forall i, 1 \leq i \leq k, \mathcal{F}_{k,k+1}(\frac{\partial}{\partial x_{ik}}) = 2i\pi y_{k+1,n-i}, \tag{25}$$

$$\forall i, 1 \leq i \leq k, 2i\pi \mathcal{F}_{k,k+1}(x_{ik}) = -\frac{\partial}{\partial y_{k+1,n-i}}, \tag{26}$$

$$\forall i, 1 \leq i \leq k, \mathcal{F}_{k,k+1}(x_{ik}.\frac{\partial}{\partial x_{ik}}) = -Id - y_{k+1,n-i}\frac{\partial}{\partial y_{k+1,n-i}}, \tag{27}$$

$$\forall i,j, 1 \leq i < j \leq k, \mathcal{F}_{k,k+1}(x_{jk}.\frac{\partial}{\partial x_{ik}}) = -y_{k+1,n-i}.\frac{\partial}{\partial y_{k+1,n-j}}. \tag{28}$$

D'autre part, soit $Z \in r_{Q,k}$. On note d_Z l'opérateur différentiel sur E_k^∞ défini par:

$$\forall f \in E_k^\infty,\ \forall Y \in \mathfrak{u}_k,\ \forall x \in R_{Q,k},\ d_Z.f(x,Y) = \frac{d}{dt}(f(x.\exp tZ.Y))_{t=0}.$$

Lemme 6.6. 1) *Il existe des fonctions b_{ik}, C^∞ sur $R_{Q,k}$, telles que:*

$$\phi_k(X_{\alpha_k}) = \phi_{k+1}(X_{\alpha_k}) = 2i\pi \sum_{i=1}^{i=k} b_{ik}(.)y_{k+1,n-i}. \tag{29}$$

2) $\forall i, 1 \leq i \leq k-1$,

$$\begin{aligned} \phi_k(X_{-\alpha_{n-i}}) &= \phi_{k+1}(X_{-\alpha_{n-i}}) \\ &= d_{X_{\alpha_i}} + \sum_{s=k+1}^{s=n-k} y_{s,n-i}\frac{\partial}{\partial y_{s,n-i-1}}. \end{aligned} \tag{30}$$

3)

$$\begin{aligned} &\phi_k(H_{\alpha_{k+1}}) = \phi_{k+1}(H_{\alpha_{k+1}}) \\ &\quad = -\sum_{i=1}^{i=k} y_{k+1,n-i}\frac{\partial}{\partial y_{k+1,n-i}} + \sum_{i=1}^{i=k} y_{k+2,n-i}\frac{\partial}{\partial y_{k+2,n-i}}. \end{aligned} \tag{31}$$

4) $\forall j, k+2 \leq j \leq n-1$,

$$\begin{aligned} &\phi_k(H_{\alpha_j}) = \phi_{k+1}(H_{\alpha_j}) \\ &\quad = -\sum_{i=k+1}^{i=j-1} y_{i,j}\frac{\partial}{\partial y_{i,j}} - 2y_{j,j}\frac{\partial}{\partial y_{j,j}} - \sum_{i=j+1}^{i=n-1} y_{j+1,i}\frac{\partial}{\partial y_{j+1,i}} - \frac{n-1}{2}Id. \end{aligned} \tag{32}$$

5)

$$\begin{aligned} &\phi_k(X_{-\alpha_{n-k}}) = \phi_{k+1}(X_{-\alpha_{n-k}}) \\ &\quad = \sum_{i=k+1}^{i=n-k}\sum_{j=n-k}^{j=n-1} y_{i,n-k}y_{n-k,j}\frac{\partial}{\partial y_{i,j}} + \frac{n-k}{2}y_{n-k,n-k}. \end{aligned} \tag{33}$$

6) *Soit* $a_{k+1,j}$ *la fonction* C^∞ *sur* $R_{Q,k}$ *définie par la relation:*

$$x^{-1}x_{\beta_{k+1,j}}(u)x = x_{\beta_{k+1,j}}(u\ a_{k+1,j}(x))$$

Alors, $\forall j, n-k \leq j \leq n-1$,

$$\phi_k(X_{\beta_{k+1,j}}) = \phi_{k+1}(X_{\beta_{k+1,j}}) = -a_{k+1,j}(.)\frac{\partial}{\partial y_{k+1,j}}. \tag{34}$$

Preuve. La démonstration de ce lemme est essentiellement technique. Nous nous contenterons d'en reproduire les calculs pour les formules (29) et (30).

1) Considérons l'expression $x_{\alpha_k}(-u)x \exp Y, Y \in \mathfrak{u}_k$. Comme $x_{\alpha_k}(-u)$ est un élément du radical unipotent de Q_{kk}, sur lequel $R_{Q,k}$ agit, on a:

$$x_{\alpha_k}(-u)x = x.\prod_{i=1}^{i=k} x_{\beta_{ik}}(c_{ik}(x,u)),$$

où $c_{ik} \in C^\infty(R_{Q,k} \times \mathbb{R})$ et $c_{ik}(x,0) = 0$.

Ecrivons $\exp Y$ sous la forme:

$$\exp Y = \prod_{k+1 \leq i \leq n-k \leq j \leq n-1} x_{\beta_{ij}}(y_{ij}).$$

On obtient:

$$x_{\alpha_k}(-u)x \exp Y = x \exp Y \prod_{i=1}^{i=k} x_{\beta_{ik}}(c_{ik}(x,u)).\prod_{i=1}^{i=k} x_{\beta_{i,n-i}}(c_{ik}(x,u)y_{k+1,n-i}).$$

Soit $f \in E_k$.

Il s'en suit que:

$$\pi_{k,k}(x_{\alpha_k}(u)).f = \prod_{i=1}^{i=k} e^{2i\pi c_{ik}(x,u)y_{k+1,n-i}}.f.$$

D'où, par dérivation, et en posant: $\dfrac{\partial c_{ik}}{\partial u}(x,0) = b_{ik}(x)$, on a:

$$\phi_k(X_{\alpha_k}).f = 2i\pi \sum_{i=1}^{i=k} b_{ik}(.)y_{k+1,n-i}.f.$$

On procède de la même façon pour déterminer $\psi_{k+1}(X_{\alpha_k})$. Soit $X \in \mathfrak{u}_{k+1}$. On écrit $\exp X$ sous la forme:

$$\exp X = \prod_{i=1}^{i=k} x_{\beta_{ik}}(x_{ik}).\prod_{k+2 \leq i \leq n-k \leq j \leq n-1} x_{\beta_{ij}}(x_{ij}).$$

Ceci nous donne:

$$x_{\alpha_k}(-u)x \exp X = x \prod_{i=1}^{i=k} x_{\beta_{ik}}(c_{ik}(x,u) + x_{ik}).\prod_{k+2 \leq i \leq n-k \leq j \leq n-1} x_{\beta_{ij}}(x_{ij}).$$

D'où, par dérivation:

$$\psi_{k+1}(X_{\alpha_k}).f = \sum_{i=1}^{i=k} b_{ik}(.)\frac{\partial f}{\partial x_{ik}}.$$

En utilisant la définition de ϕ_{k+1} et (25), on en déduit (29).

2) Soit $i, 1 \leq i \leq k-1$. Posons: $v_i(u) = x_{\alpha_i}(u)x_{-\alpha_{n-i}}(u)$. On constate que $v_i(u) \in B_{k,k,\varepsilon}$. En reprenant les notations précédentes, on peut écrire, pour $Y \in \mathfrak{u}_k$:

$$\begin{aligned} x_{-\alpha_{n-i}}(-u)x \exp Y &= x x_{\alpha_i}(u) v_i(-u) \exp Y \\ &= x x_{\alpha_i}(u) \prod_{s=k+1}^{s=n-k} x_{\beta_{s,n-i-1}}(y_{s,n-i-1} + u y_{s,n-i}). \prod_{\substack{k+1 \leq s \leq n-k \\ n-k \leq j \leq n-1 \\ j \neq n-i-1}} x_{\beta_{sj}}(y_{sj}).v_i(-u). \end{aligned}$$

D'où, par dérivation:

$$\phi_k(X_{-\alpha_{n-i}}) = d_{X_{\alpha_i}} + \sum_{s=k+1}^{s=n-k} y_{s,n-i} \frac{\partial}{\partial y_{s,n-i-1}}.$$

En suivant le même type de calculs, on aboutit à la formule:

$$\psi_{k+1}(X_{-\alpha_{n-i}}) = d_{X_{\alpha_i}} - x_{i+1,k} \frac{\partial}{\partial x_{ik}} + \sum_{s=k+2}^{s=n-k} x_{s,n-i} \frac{\partial}{\partial x_{s,n-i-1}}.$$

On utilise ensuite la définition de ϕ_{k+1} et (28) pour en déduire (30). A l'aide de calculs analogues et de (25), (26), (27) et (28), on démontre de même (31), (32), (33) et (34).

2ème cas. On suppose maintenant que $n = 2p$ et on envisage le cas de l'orbite $O_{p,\varepsilon}$.

• Cette fois, la représentation π_p dépend du choix d'un paramètre $\delta \in \mathcal{D}_{\varepsilon,\varepsilon'}$, ensemble défini par (13) on va utiliser les sous-groupes paraboliques P_{p-1} et P_p. On rappelle que la forme f_p est de type unipotent, ce qui n'est pas le cas de f_{p-1}, et l'on considère tout d'abord la représentation suivante:

$$\pi_{p,p} = \operatorname{Ind}_{B_{p,p,\varepsilon}}^{P_p} \chi_{p,\varepsilon'} \otimes 1 \otimes S_{p,p,\varepsilon}.T_{p,p,\varepsilon}$$

avec

$$\mathfrak{b}_{p,p,\varepsilon} = \mathfrak{r}_{p,\varepsilon} + \mathfrak{n}_p.$$

On pose:

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_p &= \langle X_{\beta_{i,p-1}}, 1 \leq i \leq p-1 \rangle \oplus \langle X_{\beta_{p+1,j}}, p+1 \leq j \leq 2p-1 \rangle, \\ \mathfrak{s}_p &= r_{Q,p-1} \oplus \mathbb{R} H_{\alpha_p} \oplus \mathfrak{u}_p. \end{aligned}$$

$\mathfrak{s}_p$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{p}_p$ supplémentaire de $\mathfrak{b}_{p,p,\varepsilon}$ et de dimension $\dfrac{1}{2}\dim O_{p,\varepsilon}$. On note $\mathcal{H}_p$ l'espace de Hilbert de la représentation induite $\pi_{p,p}$ et on considère la variété réelle $\mathbb{X}_{p,\mathbb{R}} = R_{Q,p-1} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathfrak{u}_p$, $\mathbb{X}_p$ sa complexifiée. Soit $j_p : \mathbb{X}_{p,\mathbb{R}} \longrightarrow P_p$ l'application définie par:

$$\forall x \in R_{Q,p-1},\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall Y \in \mathfrak{u}_p, j_p(x,t,Y) = x.\exp Y \exp - \ln t H_{\alpha_p}.$$

On considère ensuite l'espace de Hilbert $E_p = L^2(\mathbb{X}_{p,\mathbb{R}})$ et on définit l'application $\mathrm{j}_p : \mathcal{H}_p \longrightarrow E_p$ par:

$$\forall (x,t,Y) \in R_{Q,p-1} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathfrak{u}_p,\ \forall f \in \mathcal{H}_p,\ \mathrm{j}_p(f)(x,t,Y) = t^{\frac{1}{2}-p} f \circ j_p(x,t,Y).$$

On constate qu'avec un bon choix de mesures j_p est une isométrie. Par transport de structure, on réalise $\pi_{p,p}$ dans l'espace E_p et on a encore: $E_p^\infty \subset C^\infty(\mathbb{X}_{p,\mathbb{R}})$. On utilise les arguments développés dans le premier cas et le théorème 5.1. de [16] pour définir un morphisme d'algèbres $\phi_p : U(\mathfrak{p}_p) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_p)$ tel que:

$$\forall f \in E_p^\infty,\ \forall a \in U(\mathfrak{p}_p), \pi_{p,p}^\infty(a).f = \phi_p(a).f. \tag{35}$$

• Considérons maintenant la représentation:

$$\pi_{p-1,p} = \mathrm{Ind}_{B_{p-1,p,\varepsilon}}^{P_p} \delta \otimes 1 \otimes S_{p-1,p,\varepsilon}.T_{p-1,p,\varepsilon}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_{p-1,p,\varepsilon} &= \mathfrak{r}'_{p-1,p,\varepsilon} + {}^u\mathfrak{p}_{p-1}(X_{p,\varepsilon}) + \mathfrak{n}_{p-1},\\
\mathfrak{r}'_{p-1,p,\varepsilon} &= sl_2(\alpha_p) \oplus sl_{p-1}(X_{\alpha_1} + X_{-\alpha_{2p-1}}, \ldots, X_{\alpha_{p-2}} + X_{-\alpha_{p+2}}),\\
{}^u\mathfrak{p}_{p-1}(X_{p,\varepsilon}) &= \langle X_{-\beta_{pj}}, p \leq j \leq 2p-1\rangle.
\end{aligned}$$

On pose:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}_{p-1} &= \langle X_{\beta_{p,j}}, p+1 \leq j \leq 2p-1\rangle \oplus \langle X_{\beta_{p+1,j}}, p+1 \leq j \leq 2p-1\rangle,\\
\mathfrak{s}_{p-1} &= r_{Q,p-1} \oplus \mathfrak{u}_{p-1}.
\end{aligned}$$

$\mathfrak{s}_{p-1}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{p}_{p-1}$ supplémentaire de $\mathfrak{b}_{p-1,p,\varepsilon}$. On note $\mathcal{H}_{\delta,p}$ l'espace de Hilbert de la représentation induite $\pi_{p-1,p}$ et V_δ l'espace de δ.

On sait qu'il existe un opérateur unitaire $\phi_\delta : V_\delta \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{+*})$ permettant de réaliser, dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^{+*})$, la restriction de toute série discrète de $\widetilde{SL_2(\alpha_p)}$ à son sous-groupe de Borel (pour cela, on peut se référer par exemple à [17], paragraphe 3.6). En particulier, on a les formules suivantes:

$$\begin{aligned}
\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{+*}), \delta(\exp uH_{\alpha_p}).f(t) &= e^{\frac{u}{2}}.f(te^u),\\
\delta(\exp uX_{\alpha_p}).f(t) &= e^{-i\pi\varepsilon ut^2}.f(t).
\end{aligned} \tag{36}$$

On considère la variété réelle $\mathbb{X}_{p-1,\mathbb{R}} = R_{Q,p-1} \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathfrak{u}_{p-1}$, $\mathbb{X}_{p-1}$ sa complexifiée. Soit $E_{p-1} = L^2(\mathbb{X}_{p-1,\mathbb{R}})$.

En utilisant l'opérateur ϕ_δ, on peut donc définir une isométrie $\mathfrak{j}_{p-1}$ de $\mathcal{H}_{\delta,p}$ sur E_{p-1}, donnée par:

$$\forall x \in R_{Q,p-1},\ \forall X \in \mathfrak{u}_{p-1},\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \forall f \in \mathcal{H}_{\delta,p},\ \mathfrak{j}_{p-1}(f)(x,t,X) = \phi_\delta(f(x\exp X))(t).$$

Par transport de structure, on réalise $\pi_{p-1,p}$ dans E_{p-1} et on a encore: $E_{p-1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{X}_{p-1,\mathbb{R}})$. On peut ainsi définir un morphisme d'algèbres $\psi_{p-1} : U(\mathfrak{p}_{p-1}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_{p-1})$ tel que:

$$\forall f \in E_{p-1}^\infty,\ \forall a \in U(\mathfrak{p}_{p-1}), \pi_{p-1,p}^\infty(a).f = \psi_{p-1}(a).f. \tag{37}$$

• Comme précedemment, on met en dualité les espaces $\mathfrak{u}_p$ et $\mathfrak{u}_{p-1}$ par une transformation de Fourier $\mathcal{F}_{p,p-1}$ qui se définit selon une formule analogue à (23), soit:

$$\forall Y \in \mathfrak{u}_p, \mathcal{F}_{p,p-1}(\varphi)(Y) = \int_{\mathfrak{u}_{p-1}} \varphi(X) e^{2i\pi f_{p,\varepsilon}([X,Y])} dX. \tag{38}$$

On a également des formules analogues à (25), (26) (27) et (28), que l'on notera, sans les reproduire ici, (25'), (26'), (27') et (28'). Cette transformation se prolonge en un morphisme d'algèbres de $\mathbb{D}(\mathbb{X}_{p-1})$ dans $\mathbb{D}(\mathbb{X}_p)$ et on pose enfin:

$$\phi_{p-1} = \mathcal{F}_{p,p-1} \circ \psi_{p-1}.$$

ϕ_{p-1} est un morphisme d'algèbres de $U(\mathfrak{p}_{p-1})$ dans $\mathbb{D}(\mathbb{X}_p)$ et il est clair, d'après (35) et (36), que $\ker \phi_{p-1} = I_{\pi,p-1,p}, \ker \phi_p = I_{\pi,p,p}$.

• On peut décrire de manière totalement analogue la représentation $\pi_{p,p+1}$, la variété $\mathbb{X}_{p+1}$, le morphisme ψ_{p+1}, la transformation de Fourier $\mathcal{F}_{p,p+1}$ qui relie $D(\mathbb{X}_{p+1})$ et $D(\mathbb{X}_p)$ et, enfin, le morphisme ϕ_{p+1}, tel que: $\ker \phi_{p+1} = I_{\pi,p+1,p}$.

• Il reste à prouver que les restrictions des ϕ_i aux intersections deux à deux coincident. Comme dans le cas précédent, nous nous contenterons de faire les vérifications pour les morphismes (ϕ_{p-1}, ϕ_p). Il est facile de constater, compte-tenu de la définition des espaces de réalisation considérés, que les calculs donnant $\phi_p(Z)$ ou $\phi_{p-1}(Z)$ sont les mêmes que dans le premier cas, en remplaçant k par $p-1$, sauf pour $Z = H_{\alpha_p}, X_{\alpha_p}$.

On identifie l'espace $\mathfrak{u}_p$ à $\mathbb{R}^{2p-2}$ à l'aide de l'application:

$$Y \longrightarrow ((y_{i,p-1})_{1\leq i\leq p-1}, (y_{p+1,j})_{p+1\leq j\leq 2p-1})).$$

On identifiera de la même manière $\mathfrak{u}_{p-1}$ à $\mathbb{R}^{2p-2}$. On introduit, d'autre part, la forme quadratique sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2p-2}$, $\mathcal{Q}_{p,\varepsilon}(t, Y) = \varepsilon t^2 - \sum_{i+j=2p} y_{i,p-1}y_{p+1,j}$. □

Lemme 6.7. *On a les formules suivantes:*

$$\begin{aligned}\phi_p(H_{\alpha_p}) &= \phi_{p-1}(H_{\alpha_p})\\ &= (p-\frac{1}{2}).Id + \sum_{i=1}^{i=p-1} y_{i,p-1}\frac{\partial}{\partial y_{i,p-1}} + \sum_{j=p+1}^{j=2p-1} y_{p+1,j}\frac{\partial}{\partial y_{p+1,j}} + t\frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned} \tag{39}$$

$$\phi_p(X_{\alpha_p}) = \phi_{p-1}(X_{\alpha_p}) = i\pi\mathcal{Q}_{p,\varepsilon}.Id. \tag{40}$$

Preuve. Il s'agit encore de calculs essentiellement techniques, on reproduira seulement ceux qui justifient (39), pour ϕ_p et ϕ_{p-1}.

On considère l'expression: $h_{\alpha_p}(e^{-u}).x.\exp Y.h_{\alpha_p}(t)$, pour $x \in R_{Q,p-1}, Y \in \mathfrak{u}_p$, $t \in \mathbb{R}^{+*}$. On obtient:

$$h_{\alpha_p}(e^{-u}).x.\exp Y.h_{\alpha_p}(t) = x.\exp(e^u Y).h_{\alpha_p}(te^{-u}).$$

En tenant compte de la définition de l'opérateur $\mathfrak{j}_p$ et par dérivation, on aboutit à la formule souhaitée pour l'opérateur $\phi_p(H_{\alpha_p})$.

Soit $X \in \mathfrak{u}_{p-1}$. On écrit $\exp X$ sous la forme suivante:

$$\exp X = \prod_{j=p+1}^{j=2p-1} x_{\beta_{p,j}}(x_{p,j}).\prod_{j=p+1}^{j=2p-1} x_{\beta_{p+1,j}}(x_{p+1,j}).$$

Un calcul identique au précédent nous donne:

$$h_{\alpha_p}(e^{-u}).x.\exp X = x\prod_{j=p+1}^{j=2p-1} x_{\beta_{p,j}}(x_{p,j}e^{-u}).\prod_{j=p+1}^{j=2p-1} x_{\beta_{p+1,j}}(x_{p+1,j}e^{u})h_{\alpha_p}(e^{-u}).$$

Si l'on tient compte maintenant de la définition de l'opérateur $\mathfrak{j}_{p-1}$ et de son inverse, en utilisant (36) et par dérivation, on aboutit à:

$$\psi_{p-1}(H_{\alpha_p}) = -\sum_{j=p+1}^{j=2p-1} x_{p,j}\frac{\partial}{\partial x_{p,j}} + \sum_{j=p+1}^{j=2p-1} x_{p+1,j}\frac{\partial}{\partial x_{p+1,j}} + t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}Id.$$

On utilise ensuite la transformée de Fourier $\mathcal{F}_{p,p-1}$ et la formule (27′). On en déduit le résultat souhaité pour $\phi_{p-1}(H_{\alpha_p})$.

3ème cas. On suppose enfin que $n = 2p + 1$ et on envisage le cas de l'orbite maximale O_p. La représentation π_p est alors déterminée à partir du paramètre ρ_{-i} défini dans le paragraphe 5.5.

• On considère tout d'abord la représentation:

$$\pi_{p,p} = \mathrm{Ind}_{B_{p,p}}^{P_p} \chi_{p,-1} \otimes 1 \otimes S_{p,p} T_{p,p}$$

avec

$$\mathfrak{b}_{p,p} = \mathfrak{r}_p + {}^u\mathfrak{p}_p(X_p) + \mathfrak{n}_p,$$
$${}^u\mathfrak{p}_p(X_p) = \langle X_{-\beta_{p+1,j}}, p+1 \leq j \leq 2p\rangle.$$

On note:

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}_p &= \langle X_{\beta_{i,p-1}}, 1 \leq i \leq p-1\rangle \oplus < \langle X_{\beta_{p+1,j}}, p+2 \leq j \leq 2p\rangle \\ &\quad \oplus \langle X_{\beta_{p+2,j}}, p+2 \leq j \leq 2p\rangle, \\ \mathfrak{d}_p &= \langle H_{\alpha_{p+1}}, X_{\alpha_{p+1}}\rangle, \\ \mathfrak{s}_p &= r_{Q,p-1} \oplus \mathfrak{u}_p \oplus \mathfrak{v}_p.\end{aligned}$$

Alors, $\mathfrak{s}_p$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{p}_p$ supplémentaire de $\mathfrak{b}_{p,p}$, de dimension $\dfrac{1}{2}\dim O_p$.

On note encore $\mathcal{H}_p$ l'espace de Hilbert de la représentation induite $\pi_{p,p}$ et on considère la variété réelle $\mathbb{X}_{p,\mathbb{R}} = R_{Q,p-1} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathfrak{u}_p$, $\mathbb{X}_p$ sa complexifiée. Soit $j_p : \mathbb{X}_p \longrightarrow P_p$ l'application définie par: $\forall x \in R_{Q,p-1},\ \forall (t,a) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \forall Y \in \mathfrak{u}_p$,

$$j_p(x,t,a,Y) = x.\exp Y \exp aX_{\alpha_{p+1}} w_{\alpha_{p+1}}^{1-\frac{t}{|t|}} \exp \ln|t| H_{\alpha_{p+1}}.$$

On définit ensuite, comme dans le cas précédent, l'espace de Hilbert $E_p = L^2(\mathbb{X}_{p,\mathbb{R}})$, puis l'application $\mathrm{j}_p : \mathcal{H}_p \longrightarrow E_p$ par: $\mathrm{j}_p = f \circ j_p$.

On constate que, pour un bon choix des mesures, j_p est une isométrie. Par transport de structure, on réalise $\pi_{p,p}$ dans l'espace E_p et on a encore: $E_p^\infty \subset C^\infty(\mathbb{X}_{p,\mathbb{R}})$. On peut ainsi définir un morphisme d'algèbres $\phi_p : U(\mathfrak{p}_p) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_p)$ tel que:

$$\forall f \in E_p^\infty,\ \forall a \in U(\mathfrak{p}_p), \pi_{p,p}^\infty(a).f = \phi_p(a).f. \tag{41}$$

• Venons-en maintenant à la représentation:

$$\pi_{p-1,p} = \mathrm{Ind}_{B_{p-1,p}}^{P_{p-1}} \rho_{-i} \otimes 1 \otimes S_{p-1,p} T_{p-1,p}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{p-1,p} &= \mathfrak{r}'_{p-1,p} + {}^u\mathfrak{p}_{p-1}(X_p) + \mathfrak{n}_{p-1}, \\ \mathfrak{r}'_{p-1,p} &= sl_3(\alpha_p, \alpha_{p+1}) \oplus sl_{p-1}(X_{\alpha_1} + X_{-\alpha_{2p-1}}, \ldots, X_{\alpha_{p-2}} + X_{-\alpha_{p+2}}) \\ &\quad \oplus \langle H_{\alpha_p} - H_{\alpha_{p+1}}\rangle, \\ {}^u\mathfrak{p}_{p-1}(X_p) &= \langle X_{-\beta_{p+1,j}}, p+1 \leq j \leq 2p\rangle \oplus \langle X_{-\beta_{p,j}}, p \leq j \leq 2p\rangle \\ &\quad \oplus \langle X_{\beta_{i,p-1}} + X_{-\beta_{p+2,2p+1-i}}, 1 \leq i \leq p-1\rangle.\end{aligned}$$

On rappelle également que le paramètre ρ_{-i} est celui donné par le théorème 5.7. et correspond à l'unique représentation minimale de sl_3 associée au paramètre d'admissibilité t_{-i} de l'orbite minimale. On note, ensuite:

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}_{p-1} &= \langle X_{\beta_{p,j}}, p+2 \leq j \leq 2p\rangle \oplus \langle X_{\beta_{p+1,j}}, p+2 \leq j \leq 2p\rangle \\ &\quad \oplus \langle X_{\beta_{p+2,j}}, p+2 \leq j \leq 2p\rangle, \\ \mathfrak{s}_{p-1} &= r_{Q,p-1} \oplus \mathfrak{u}_{p-1}\end{aligned}$$

Alors, $\mathfrak{s}_{p-1}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{p}_{p-1}$ supplémentaire de $\mathfrak{b}_{p-1,p}$.

On considère, dans un premier temps, la représentation minimale ρ_{-i} de $SL_3\widetilde{(\alpha_p, \alpha_{p+1})}$. On en donne un espace de réalisation, selon des arguments dévéloppés par P. Torasso dans [21]. Pour cela, on considère le sous-groupe parabolique S_p, associé à la racine α_p. On sait, alors, que la restriction de ρ_{-i} à S_p est une représentation induite d'un sous-groupe de S_p dont l'algèbre de Lie est une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à l'orbite $S_p.X_{-\alpha_p-\alpha_{p+1}}$. On note V_ρ l'espace de cette représentation induite.

On définit, comme précedemment, l'application $\mathfrak{j}_p : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow S_p$ par:

$$\mathfrak{j}_p(t,a) = \exp aX_{\alpha_{p+1}}.w_{\alpha_{p+1}}^{1-\frac{t}{|t|}}.\exp \ln|t| H_{\alpha_{p+1}}.$$

Cette application induit une isométrie $\phi_\rho : V_\rho \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$ qui permet de réaliser ρ_{-i}, par transport de structure, dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{H}_{\rho,p}$ l'espace de Hilbert de la représentation induite $\pi_{p-1,p}$. On considère la variété réelle $\mathbb{X}_{p-1,\mathbb{R}} = R_{Q,p-1} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathfrak{u}_{p-1}$ et $\mathbb{X}_{p-1}$ sa complexifiée. Soit $E_{p-1} = L^2(\mathbb{X}_{p-1,\mathbb{R}})$. On définit l'application $\mathfrak{j}_{p-1} : \mathcal{H}_{\rho,p} \longrightarrow E_{p-1}$ par:

$$\forall f \in \mathcal{H}_{\rho,p},\ \forall (x,t,a,X) \in \mathbb{X}_{p-1,\mathbb{R}}, \mathfrak{j}_{p-1}(f)(x,t,a,X) = \phi_\rho(f(x \exp X))(t,a).$$

On a encore l'inclusion: $E_{p-1}^\infty \subset C^\infty(\mathbb{X}_{p-1})$ et on peut ainsi définir un morphisme d'algèbres $\psi_{p-1} : U(\mathfrak{p}_{p-1}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_{p-1})$ tel que:

$$\forall f \in E_{p-1}^\infty, \forall a \in U(\mathfrak{p}_{p-1}), \pi_{p-1,p}^\infty(a).f = \psi_{p-1}(a).f. \tag{42}$$

• On définit de manière totalement analogue la représentation $\pi_{p,p+1}$, la variété $\mathbb{X}_{p+1}$ et le morphisme ψ_{p+1}.

• Comme dans les cas précédents, il existe des transformations de Fourier $\mathcal{F}_{p,p-1}$, $\mathcal{F}_{p,p+1}$, définies par une formule analogue à (23) ou (38), qui mettent respectivement en dualité les espaces $\mathfrak{u}_p$ et $\mathfrak{u}_{p-1}$, $\mathfrak{u}_p$ et $\mathfrak{u}_{p+1}$. Ces opérateurs se prolongent respectivement en des morphismes d'algèbres $\mathcal{F}_{p,p-1} : \mathbb{D}(\mathbb{X}_{p-1}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_p)$, $\mathcal{F}_{p,p+1} : \mathbb{D}(\mathbb{X}_{p+1}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_p)$ et on pose, enfin: $\phi_{p-1} = \mathcal{F}_{p,p-1} \circ \psi_{p-1}$, $\phi_{p+1} = \mathcal{F}_{p,p+1} \circ \psi_{p+1}$. On obtient ainsi des morphismes d'algèbres $\phi_{p-1} : U(\mathfrak{p}_{p-1}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_p)$, $\phi_{p+1} : U(\mathfrak{p}_{p+1}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_p)$ et il est clair que:

$$\ker \phi_{p-1} = I_{\pi,p-1,p},\ \ker \phi_p = I_{\pi,p,p},\ \ker \phi_{p+1} = I_{\pi,p+1,p}.$$

• Il reste à prouver que les restrictions des ϕ_i aux intersections deux à deux coincident. On procède comme dans les cas précédents. Considérons, par exemple, les morphismes (ϕ_{p-1}, ϕ_p). Compte-tenu des définitions et par analogie avec le cas précédent, il suffit de prouver que:

$$\phi_p(Z) = \phi_{p-1}(Z),\ \forall Z \in \langle X_{\alpha_{p+1}}, X_{-\alpha_{p+1}}, H_{\alpha_{p+1}}, X_{\alpha_p}, X_{-\alpha_p}, H_{\alpha_p} \rangle.$$

Or, ceci se vérifie sans difficultés, en tenant compte des choix faits dans les définitions de $E_p^\infty, E_{p-1}^\infty$ et de l'espace de réalisation de ρ_{-i}.

On procède de la même facon pour les morphismes (ϕ_{p-1}, ϕ_{p+1}) ou (ϕ_p, ϕ_{p+1}). □

Théorème 6.8. *Soit* $(k, \varepsilon) \in I_n$. *Soit* $\pi_k \in \mathcal{R}_k$. *Alors:*

$$GK \dim \pi_k = \dim O_{k,\varepsilon}.$$

Ainsi, la représentation π_k *est* GK*-associée à l'orbite* $O_{k,\varepsilon}$.

Preuve. D'après la proposition 6.5, on dispose des morphismes d'algèbres $\phi_i : U(\mathfrak{p}_i) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_k), \phi_j : U(\mathfrak{p}_j) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_k), (i,j) \in \{k-1,k,k+1\}$ ou $(i,j) \in \{k,k+1,k+2\}$ tels que:

$$(\phi_i)_{|U(\mathfrak{p}_{ij})} = (\phi_j)_{|U(\mathfrak{p}_{ij})}.$$

D'après la proposition 6.1 et le corollaire 6.2, l'algèbre $\mathbb{D}(\mathbb{X}_k)$ est solution du problème universel pour la somme amalgamée des $U(\mathfrak{p}_i), i \in \{k-1,k,k+1\}$ ou $i \in \{k,k+1,k+2\}$ et il existe donc un morphisme d'algèbres $\phi : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_k)$ tel que:

$$\phi_{|U(\mathfrak{p}_i)} = \phi_i, \; i \in \{k-1,k,k+1\} \text{ ou } i \in \{k,k+1,k+2\}.$$

Soit E_k l'espace de la représentation π_k. En utilisant (21), (22), (35), (37), (41) et (42), on peut écrire:

$$\forall f \in E_k^\infty,\ \forall a \in U(\mathfrak{p}_i), i \in \{k-1,k,k+1\} \text{ ou } i \in \{k,k+1,k+2\},\ \pi_k^\infty(a).f = \phi_i(a).f.$$

Comme $\mathfrak{g}$ est engendrée par les paraboliques $\mathfrak{p}_i, i \in \{k-1,k,k+1\}$ ou $i \in \{k,k+1,k+2\}$, on en déduit que:

$$\forall f \in E_k^\infty,\ \forall a \in U(\mathfrak{g}), \pi_k^\infty(a).f = \phi(a).f.$$

Il s'en suit que ϕ induit un morphisme injectif $\overline{\phi} : (U(\mathfrak{g})/\ker \pi_k^\infty) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{X}_k)$.

Ceci implique que:

$$GK \dim \pi_k \leq GK \dim \mathbb{D}(\mathbb{X}_k).$$

Or, selon des résultats classiques applicables à la variété affine $\mathbb{X}_k$ (voir, par exemple, [20]), on sait que:

$$GK \dim\ \mathbb{D}(\mathbb{X}_k) = 2 \dim \mathbb{X}_k = \dim O_{k,\varepsilon}.$$

Ceci implique l'inégalité: $GK \dim \pi_k \leq \dim O_{k,\varepsilon}$. L'égalité souhaitée est alors conséquence de (20). □

7. Représentations GK-associées et représentations associées

La méthode des orbites consiste à "associer", selon un sens qui sera rappelé ultérieurement, le dual unitaire de G et l'ensemble des G-orbites nilpotentes coadjointes. Le but de ce paragraphe est donc de montrer que, pour tout entier k, la représentation π_k est "associée" à $O_{k,\varepsilon}$.

7.1. Plaçons-nous à nouveau dans le cadre général suivant:

Soit G un groupe de Lie réel simple connexe, simplement connexe et quasi-déployé, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ la complexifiée de $\mathfrak{g}$, $G_\mathbb{C}$ un groupe de Lie complexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\mathbb{C}, U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ et $S(\mathfrak{g})$ son algèbre symétrique. On suppose choisie une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ et on note $\mathfrak{b}_\mathbb{C}$ sa complexifiée. Soit B le sous-groupe de Borel de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. Considérons maintenant une représentation unitaire irréductible π de G, π_B sa restriction à B. On note $I_{\pi,G}$ l'annulateur infinitésimal de π dans $U(\mathfrak{g})$, $I_{\pi,B} = I_{\pi,G} \cap U(\mathfrak{b})$ l'annulateur infinitésimal de π_B. Soit, enfin, $Gr : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow S(\mathfrak{g})$ l'application canonique usuelle qui envoie $U(\mathfrak{g})$ sur son gradué $S(\mathfrak{g})$. On introduit de même l'application $Gr : U(\mathfrak{b}) \longrightarrow S(\mathfrak{b})$.

On pose: $J_{\pi,G} = Gr(I_{\pi,G}), J_{\pi,B} = Gr(I_{\pi,B}) = J_{\pi,G} \cap S(\mathfrak{b})$. Soit $V(J_{\pi,G})$ la variété des zéros dans $\mathfrak{g}_\mathbb{C}^*$ de $J_{\pi,G}$. Si $I_{\pi,B}$ est un idéal primitif de $U(\mathfrak{b})$, on sait définir un idéal de $S(\mathfrak{b})$, noté $\widetilde{J}_{\pi,B}$, image de $I_{\pi,B}$ par l'inverse de l'application de Dixmier. Nous reviendrons précisément sur ce point dans 7.2.

La notion de représentation associée à une G-orbite réelle est, selon la terminologie usuelle de la méthode des orbites, celle qui est rappelée dans la définition suivante:

Définition 7.1. Soit O une G-orbite coadjointe nilpotente dans $\mathfrak{g}^*$ et $O_{\mathbb{C}}$ sa complexifiée. π est dite associée à O si:

$$V(J_{\pi,G}) = \overline{O_{\mathbb{C}}}.$$

On rappelle que cette condition est seulement nécessaire pour définir la notion de représentation associée et qu'il existe en fait une notion plus fine introduite par R. Howe, [12], et évoquée dans l'introduction.

On rappelle aussi que, d'après [1], il existe une $G_{\mathbb{C}}$-orbite adjointe nilpotente O_π dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ telle que:

$$V(J_{\pi,G}) = \overline{O_\pi}.$$

Nous allons commencer par démontrer le résultat suivant:

Théorème 7.1. *On suppose que la représentation π satisfait aux trois hypothèses suivantes:*

(1) *La représentation π_B est irréductible.*
(2) *L'idéal $\widetilde{J}_{\pi,B}$ est un idéal gradué de $S(\mathfrak{b})$.*
(3) $GK\dim\pi = GK\dim\pi_B = GK\dim(S(\mathfrak{b})/\widetilde{J}_{\pi,B})$.

Alors, la $G_{\mathbb{C}}$-orbite O_π contient une $B_{\mathbb{C}}$-orbite ouverte.

7.2. La démonstration du théorème 7.1 repose fortement sur un résultat de J.Y. Charbonnel, donné dans [4], concernant les idéaux primitifs d'une algèbre de Lie complètement résoluble. Pour simplifier, et puisque nous appliquerons ce qui va suivre à la sous-algèbre de Borel introduite précedemment, nous noterons $\mathfrak{b}$ une telle algèbre de Lie et nous la supposerons algébrique de radical unipotent $\mathfrak{n}$.

Soit $A(\mathfrak{b})$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{b}$ à coefficients polynômiaux, $\widehat{S}(\mathfrak{b}^*)$ l'algèbre des séries formelles sur $\mathfrak{b}$, $\widehat{A}(\mathfrak{b})$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{b}$ à coefficients séries formelles, $E_{\mathfrak{b}}$ le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathfrak{b}^*$ engendré par les poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{b}$, c'est-à-dire l'espace des $\mathbb{Q}$-combinaisons linéaires des racines considérées comme fonctionnelles linéaires sur $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}$, $\widehat{S}(E_{\mathfrak{b}})$ le sous-anneau fermé de $\widehat{A}(\mathfrak{b})$ engendré par $E_{\mathfrak{b}}$. Soit, enfin, $\widehat{P}(\mathfrak{b})$ la sous-algèbre de $\widehat{A}(\mathfrak{b})$ engendrée par $A(\mathfrak{b})$ et $\widehat{S}(E_{\mathfrak{b}})$.

On utilise pour $\widehat{P}(\mathfrak{b})$ la filtration induite par la filtration naturelle définie sur $\widehat{A}(\mathfrak{b})$ et on considère le gradué associé qui s'identifie à $\widehat{S}(E_{\mathfrak{b}}).S(\mathfrak{b}^*)\otimes S(\mathfrak{b})$. Si L est un idéal à gauche de $\widehat{P}(\mathfrak{b})$, on note $Gr(L)$ l'idéal correspondant dans $\widehat{S}(E_{\mathfrak{b}}).S(\mathfrak{b}^*)\otimes S(\mathfrak{b})$.

Dans [7], J. Dixmier introduit les opérateurs $L_{\mathfrak{b}}, R_{\mathfrak{b}}$ et $W_{\mathfrak{b}}$ définis de la manière suivante; on considère les deux séries entières:

$$\frac{T}{1-\exp(-T)} = \sum b_r T^r, \quad \frac{T}{\exp(T)-1} = \sum c_r T^r.$$

On vérifie que: $b_0 = c_0 = 1, b_1 = \dfrac{1}{2}, c_1 = -\dfrac{1}{2}, b_r = c_r,\ \forall r \geq 2, b_{2r+1} = 0$. Pour tout $x \in \mathfrak{b}$, on pose:

$$\forall y \in \mathfrak{b},\ L_{\mathfrak{b}}(x)(y) = \sum_{r \geq 0} b_r (ad\ y)^r.x,$$
$$R_{\mathfrak{b}}(x)(y) = \sum_{r \geq 0} c_r (ad\ y)^r.x,$$
$$W_{\mathfrak{b}}(x)(y) = L_{\mathfrak{b}}(x)(y) - R_{\mathfrak{b}}(x)(y) = [y, x].$$

L'application $L_{\mathfrak{b}}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{b}$ dans l'algèbre de Lie sous-jacente à $\widehat{A}(\mathfrak{b})$. On peut prolonger $L_{\mathfrak{b}}$ de manière canonique en un homomorphisme de $U(\mathfrak{b})$ dans $\widehat{A}(\mathfrak{b})$.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{b}$, $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale dans $\mathfrak{b}^*$. J.Dixmier, dans [7], lemme 7.3, donne une expression des champs de vecteurs $L_{\mathfrak{b}}$ à partir des bases précédentes:

Lemme 7.2. *Soit $u = \sum_{|\alpha| \leq p} \lambda_\alpha e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n}$ un élément de $U_p(\mathfrak{b})$ où les λ_α sont des nombres complexes. Alors, on a:*

$$L_{\mathfrak{b}}(u) = \sum_{|\alpha|=p} \lambda_\alpha e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n} + \sum_{|\beta|<p} \psi_\beta e_1^{\beta_1} \ldots e_n^{\beta_n} + \sum_{|\gamma|<p, 1 \leq i \leq n} w_{\gamma,i} e_1^{\gamma_1} \ldots e_n^{\gamma_n} W_{\mathfrak{b}}(e_i)$$

où les $\psi_\beta, w_{\gamma,i}$ sont des éléments de $\widehat{S}(\mathfrak{b}^*)$.

Dans [6], J. Dixmier introduit une application dite "application de Dixmier " et notée $\mathrm{Dix}_{\mathfrak{b}}$ qui, à chaque idéal premier $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$-invariant J de $S(\mathfrak{b})$, associe un idéal premier $\mathrm{Dix}_{\mathfrak{b}}(J)$ de $U(\mathfrak{b})$. En fait, lorsqu'il est primitif, $\mathrm{Dix}_{\mathfrak{g}}(J)$ se réalise comme l'annulateur d'une représentation induite de $\mathfrak{b}$ à partir d'une polarisation d'un élément f de $\mathfrak{b}^*$ et J n'est autre que l'idéal de l'orbite $B_{\mathbb{C}}.f$. Cette orbite sera appelée "l'orbite de Dixmier" de $\mathrm{Dix}_{\mathfrak{g}}(J)$.

L'application $\mathrm{Dix}_{\mathfrak{b}}$ est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$-invariants de $S(\mathfrak{b})$ sur l'ensemble des idéaux premiers de $U(\mathfrak{b})$. On notera $\beta_{\mathfrak{b}}$ son application inverse.

Si I est un idéal de $U(\mathfrak{b})$, on note enfin $\psi_{\mathfrak{b}}(I)$ l'idéal à gauche de $\widehat{P}(\mathfrak{b})$ engendré par $L_{\mathfrak{b}}(I)$ et $W_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{n})$. On a alors le résultat suivant, donné dans [4], corollaire 5.8:

Théorème 7.3. *Soit I un idéal primitif de $U(\mathfrak{b})$ et $J = \beta_{\mathfrak{b}}(I)$. Alors, on a l'inclusion suivante:*

$$\sqrt{Gr(J)} \subset Gr(\psi_{\mathfrak{b}}(I)).$$

On note ϕ le morphisme surjectif canonique d'algèbres de $\widehat{A}(\mathfrak{b})$ sur $S(\mathfrak{b})$ défini de la manière suivante: Soit $u \in \widehat{A}(\mathfrak{b}), u = \sum_{|\alpha| \leq p} \varphi_\alpha e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n}$, avec $\varphi_\alpha \in \widehat{S}(\mathfrak{g}^*)$, pour tout n-uplet α. Alors,

$$\phi(u) = \sum_{|\alpha| \leq p} \varphi_\alpha(0) e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n}.$$

Comme $W_{\mathfrak{b}}(e_i) = e_i^*.e_i$, il s'en suit que: $\forall i, 1 \leq i \leq n, \phi(W_{\mathfrak{b}}(e_i)) = 0$.

D'autre part, soit $u = \sum_{|\alpha| \leq p} \lambda_\alpha e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n} \in U_p(\mathfrak{b})$. A l'aide du lemme 7.2 on peut donc écrire:

$$\phi(L_{\mathfrak{b}}(u)) = \sum_{|\alpha|=p} \lambda_\alpha e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n} + \sum_{|\beta|<p} \psi_\beta(0) e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n}.$$

De ceci on déduit que, si $Gr(\phi)$ désigne l'application graduée correspondante, alors on a:

$$\forall u \in U(\mathfrak{b}), Gr(\phi)(Gr(L_{\mathfrak{b}}(u))) = Gr(u).$$

Ceci implique que, pour tout idéal I de $U(\mathfrak{b})$:

$$Gr(\phi)(Gr(\psi_{\mathfrak{b}}(I))) \subset Gr(I).$$

Soit I un idéal primitif de $U(\mathfrak{b})$, $J = \beta_{\mathfrak{b}}(I)$. On sait, d'après le théorème 7.3, que $\sqrt{Gr(J)} \subset Gr(\psi_{\mathfrak{b}}(I))$. Comme, d'autre part, $\sqrt{Gr(J)}$ est un idéal de $S(\mathfrak{b})$, il s'en suit que $Gr(\phi)(\sqrt{Gr(J)}) = \sqrt{Gr(J)}$. D'où:

$$\sqrt{Gr(J)} \subset Gr(I).$$

Ainsi, on obtient:

Corollaire 7.4. *Soit I un idéal primitif de $U(\mathfrak{b})$ et $J = \beta_{\mathfrak{b}}(I)$. Alors, on a:*

$$\sqrt{Gr(J)} \subset Gr(I).$$

7.3. **Preuve du théorème 7.1.** Supposons donnée une représentation unitaire irréductible π de G vérifiant les hypothèses du théorème 7.1. La représentation π_B est irréductible, l'idéal $I_{\pi,B}$ est donc primitif et comme, d'après l'hypothèse (2) du théorème 7.1, $\widetilde{J}_{\pi,B}$ est gradué dans $S(\mathfrak{b})$, on a, d'après le corollaire 7.4:

$$\sqrt{\widetilde{J}_{\pi,B}} \subset Gr(I_{\pi,B}).$$

Soit $O_{\pi,B}$ la $B_{\mathbb{C}}$-orbite de Dixmier de l'idéal primitif $I_{\pi,B}$. On sait que $\widetilde{J}_{\pi,B}$ est l'idéal de $O_{\pi,B}$. Comme $\overline{O_{\pi,B}}$ est une sous-variété irréductible de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^*$ il s'en suit que $\widetilde{J}_{\pi,B}$ est un idéal premier, ce qui implique:

$$\widetilde{J}_{\pi,B} \subset Gr(I_{\pi,B}).$$

D'après l'hypothèse (3) du théorème 7.1, on sait que les idéaux $\widetilde{J}_{\pi,B}$ et $Gr(I_{\pi,B})$ ont même dimension de Gelfand-Kirillov ou encore que:

$$GK\dim(S(\mathfrak{b})/\widetilde{J}_{\pi,B}) = GK\dim(S(\mathfrak{b})/Gr(I_{\pi,B})).$$

Comme $\widetilde{J}_{\pi,B}$ est premier, l'inclusion précédente et le corollaire 3.6 de [2] permettent alors d'affirmer que:

$$\widetilde{J}_{\pi,B} = Gr(I_{\pi,B}) = J_{\pi,B}. \tag{43}$$

Soit $\mu : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow \mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^*$ l'application "restriction" et $\mu^* : S(\mathfrak{b}) \longrightarrow S(\mathfrak{g})$ le comorphisme de μ, identifiant $S(\mathfrak{b})$ à une sous-algèbre de $S(\mathfrak{g})$.

Via la forme de Killing, on peut donc définir un morphisme dominant, noté encore μ, de O_π sur la sous-variété fermée $\overline{\mu(O_\pi)}$ de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^*$. On désigne respectivement par $R(\overline{O_\pi})$, $R(\overline{\mu(O_\pi)})$ et $R(\overline{O_{\pi,B}})$ les algèbres de fonctions sur les variétés affines correspondantes.

$J_{\pi,G}$ est l'idéal, dans $S(\mathfrak{g})$, de la variété $\overline{O_\pi}$ et il est facile d'en déduire que, moyennant l'identification précédente, $J_{\pi,B}$ est l'idéal, dans $S(\mathfrak{b})$, de la variété $\overline{\mu(O_\pi)}$.

Il existe un morphisme canonique surjectif de $S(\mathfrak{b})$ sur $R(\overline{\mu(O_\pi)})$ qui, à chaque polynôme P sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$, fait correspondre la restriction de P à $\overline{\mu(O_\pi)}$, considérée comme sous-variété de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^*$. De ce qui précède on déduit un isomorphisme d'algèbres $F : S(\mathfrak{b})/J_{\pi,B} \longrightarrow R(\overline{\mu(O_\pi)})$.

Il existe aussi un morphisme surjectif canonique de $S(\mathfrak{b})$ sur $R(\overline{O_{\pi,B}})$ qui, à tout polynôme P sur $\mathfrak{b}^*_{\mathbb{C}}$, fait correspondre la restriction de P à $\overline{O_{\pi,B}}$ et ce morphisme induit un isomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{b})/\widetilde{J}_{\pi,B}$ sur $R(\overline{O_{\pi,B}})$. Comme $\widetilde{J_{\pi,B}} = J_{\pi,B}$, On déduit de tout ceci l'existence d'un isomorphisme d'algèbres $\sigma^* : R(\overline{\mu(O_\pi)}) \longrightarrow R(\overline{O_{\pi,B}})$. On constate, de plus, que cet isomorphisme est $B_{\mathbb{C}}$-équivariant. Suivant des résultats bien connus de géométrie algébrique, (voir, par exemple, [11], corollaire 3.7), on sait qu'il existe un isomorphisme de variétés $\sigma : \overline{O_{\pi,B}} \longrightarrow \overline{\mu(O_\pi)}$ dont σ^* est le comorphisme.

Il est facile de vérifier, en outre, que cet isomorphisme est $B_{\mathbb{C}}$-équivariant. En effet, soit $u \in \overline{O_{\pi,B}}, b \in B_{\mathbb{C}}$ et supposons que $\sigma(b.u) \neq b.\sigma(u)$. Il existe alors $f \in R(\overline{\mu(O_\pi)})$ tel que: $f(\sigma(b.u)) \neq f(b.\sigma(u))$, ce qui revient à dire que $b^{-1}.\sigma^*(f)(u) \neq \sigma^*(b^{-1}.f)(u)$. Ceci contredit alors la $B_{\mathbb{C}}$-équivariance de σ^*. On obtient ainsi un morphisme de variétés $\theta = \sigma^{-1} \circ \mu : O_\pi \longrightarrow \overline{O_{\pi,B}}$ qui est dominant et $B_{\mathbb{C}}$-équivariant.

De l'hypothèse (3) du théorème 7.1, on déduit que: $\dim O_\pi = \dim O_{\pi,B}$. D'autre part, l'orbite O_π est une réunion de $B_{\mathbb{C}}$-orbites. Supposons que chaque $B_{\mathbb{C}}$-orbite dans O_π soit de dimension strictement inférieure à $\dim O_\pi$. Soit O une telle orbite. Comme θ est $B_{\mathbb{C}}$-équivariant, il s'en suit que $\theta(O)$ est une $B_{\mathbb{C}}$ -orbite dans $\overline{O_{\pi,B}}$, de dimension strictement inférieure à $\dim O_{\pi,B}$. D'où: $\theta(O) \subset \overline{O_{\pi,B}} \backslash O_{\pi,B}$. Ceci est vrai pour toute $B_{\mathbb{C}}$-orbite O dans O_π. On a, ainsi:

$$\theta(O_\pi) \subset \overline{O_{\pi,B}} \backslash O_{\pi,B}.$$

Comme $O_{\pi,B}$ est ouvert dans $\overline{O_{\pi,B}}$, cela contredit le fait que le morphisme θ est dominant. Ainsi, O_π possède une $B_{\mathbb{C}}$-orbite de dimension $\dim O_\pi$, ce qui finit de démontrer le théorème 7.1.

7.4. On va maintenant appliquer le théorème 7.1 au cas des représentations π_k construites précédemment. On reprend les notations des paragraphes 3, 4, 5 et 6.

Soit $(k, \varepsilon) \in I_n, \pi_k \in \mathcal{R}_k, I_{\pi,k}$ l'annulateur infinitésimal de π_k dans $U(\mathfrak{g})$ et $J_{\pi,k} = Gr(I_{\pi,k})$ l'idéal correspondant dans $S(\mathfrak{g})$. On désigne par $O_{k,\mathbb{C}}$ la $G_{\mathbb{C}}$-orbite telle que:

$$V(J_{\pi,k}) = \overline{O_{k,\mathbb{C}}}.$$

- D'après la proposition 5.4, la restriction $\pi_{k,B}$ de π_k à B est irréductible.

- Soit $b_{k,\varepsilon} = \mathcal{K}(X_{k,\varepsilon}, .)$ la restriction à $\mathfrak{b}^*$ de la forme linéaire associée à $X_{k,\varepsilon}$ par la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$. $I_{\pi,k,B}$ est l'annulateur infinitésimal de $\pi_{k,B}$ et il résulte de la construction de $\pi_{k,B}$ que cet idéal est exactement celui qui correspond à l'orbite $O_{\pi,k,B} = B_{\mathbb{C}}.b_{k,\varepsilon}$ par la correspondance de Dixmier (voir [6], chapitre 6). Soit $\widetilde{J}_{\pi,k,B}$ l'idéal de $O_{\pi,k,B}$. Comme $\dim O_{\pi,k,B} = \dim O_{k,\varepsilon}$, il s'en suit que:

$$GK \dim \pi_k = GK \dim \left(S(\mathfrak{b})/\widetilde{J}_{\pi,k,B}\right).$$

- En reprenant les arguments de 6.2. et en utilisant notamment la proposition 6.3. on montre également que:

$$GK \dim \pi_{k,B} = \dim O_{k,\varepsilon} = GK \dim \pi_k.$$

- On sait, enfin, que $b_{k,\varepsilon}$ est définie par un élément nilpotent de $\mathfrak{g}$. Ceci implique facilement que l'orbite $O_{\pi,k,B}$ est un cône et, donc, que son idéal $\widetilde{J}_{\pi,k,B}$ est gradué.

Ainsi, les trois hypothèses du théorème 7.1 sont satisfaites et on obtient:

Proposition 7.5. *Soit* $(k,\varepsilon) \in I_n, \pi_k$ *un élément de* $\mathcal{R}_k$. *Alors, la* $G_{\mathbb{C}}$*-orbite associée à* π_k *contient une* $B_{\mathbb{C}}$*-orbite dense.*

On sait maintenant que, dans $sl_n(\mathbb{C})$, il n'existe qu'une seule orbite nilpotente sphérique de dimension donnée. La proposition 7.5 et le théorème 6.8 impliquent finalement le résultat suivant:

Théorème 7.6. *Soit* $(k,\varepsilon) \in I_n, \pi_k \in \mathcal{R}_k$. *Alors, la représentation* π_k *est associée à l'orbite* $O_{k,\varepsilon}$.

References

[1] Borho W., et Brylinski J.L., *Differential operators on homogeneous spaces III*, Inventiones Math. **80** (1985), 1–68. MR0784528 (87i:22045)

[2] Borho W. et Kraft H., *Über die Gelfand-Kirillov dimension*, Math. Annalen **220** (1976), 1–24. MR0412240 (54 #367)

[3] Brylinski R. et Kostant B., *Geometric quantization and holomorphic half-form models of unitary minimal representations I*, preprint.

[4] Charbonnel J.Y., *Sur l'inverse de l'application de Dixmier pour une algèbre de Lie résoluble*, Journal of Algebra **226** (2000), 106–143. MR1749880 (2001c:17021)

[5] Collingwood D.H. et McGovern W., *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras,* Van Nostrand Reinhold, Mathematics Series, 1993. MR1251060 (94j:17001)

[6] Dixmier J., *Algèbres enveloppantes,* Cahiers Sci. 37, Gauthier-Villars, Paris, 1974. MR0498737 (58 #16803a)

[7] Dixmier J., *Sur la méthode des orbites,* Proceedings of the conference on non commutative harmonic analysis, Marseille-Luminy, Lecture Notes in Math., 728, Springer-Verlag, New York, 1978. MR0548324 (81e:17013)

[8] Duflo M., *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques*, Acta Math. **149** (1982), 153–213. MR0688348 (85h:22022)

[9] Faraut J. et Koranyi A., *Analysis on symmetric cones*, Oxford mathematical monographs, Clarendon Press, Oxford, 1994. MR1446489 (98g:17031)

[10] Flicker Y.Z., *Explicit realization of a higher metaplectic representation*, Indag. Math (NS) 1 (1990) **4**, 417–433. MR1106089 (92k:11048)

[11] Hartshorne R., *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, New York, 1977. MR0463157 (57 #3116)

[12] Howe R., *Wave front sets of representations of Lie groups. Automorphic forms, representation theory and arithmetic*, Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math., 10, Bombay, 1979, 117-140. MR0633659 (83c:22014)

[13] Joseph A., *The minimal orbit in a simple Lie algebra and its associated maximal ideal*, Ann. Sci. École Norm. Sup., (4) **9** (1976), 1–29. MR0404366 (53 #8168)

[14] Lion G., et Vergne M., *The Weil representation, Maslov index and theta series,* Birkhäuser, Boston, 1980. MR0573448 (81j:58075)

[15] Panyushev D., *Complexity and nilpotent orbits*, Manuscripta Math. **83**, (1994), 223–237. MR1277527 (95e:14039)

[16] Poulsen N.S., *On* C^∞*-vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups*, J. Funct. Anal. **9** (1972), 87–120. MR0310137 (46 #9239)

[17] Sabourin H., *Un exemple de représentations unipotentes associées à une orbite nilpotente non minimale: le cas des orbites de dimension* 10 *de* $so(4,3)$, J. of Lie Theory, **10**, (2000), 285–310. MR1774861 (2002b:22027)

[18] Schwartz J.O., *The determination of the admissible nilpotent orbits in real classical groups*, Ph.D. Thesis.

[19] Serre J.P., *Arbres, amalgames,* SL_2, Astérisque **46**, 1977. MR0476875 (57 #16426)

[20] Smith S.P., *Gel′fand-Kirillov dimension of rings of formal differential operators on affine varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. **90**, (1984), 1–8. MR0722404 (85d:16019)

[21] Torasso P., *Quantification géométrique, opérateurs d'entrelacement et représentations unitaires de* $\widetilde{SL}_3(\mathbb{R})$, Acta Math. **150**, (1983), 153–242. MR0709141 (86b:22026)

[22] Torasso P., *Méthode des orbites de Kirillov-Duflo et représentations minimales des groupes simples sur un corps local de caractéristique nulle*, Duke Math. J. **90** (1997), 261–377. MR1484858 (99c:22028)

UMR 6086 CNRS, Département de Mathématiques, Université de Poitiers, Boulevard Marie et Pierre Curie, Téléport 2 - BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex, France

E-mail address: sabourin@math.univ-poitiers.fr