Université de Poitiers
Département de Mathématiques

3M22–Séries temporelles
Master MMAS 2, année 2009–10

SÉRIES TEMPORELLES. — FICHE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 1

Exercice 1. — Trouver l'élément raisonnable (ou quelques éléments raisonnables) suivant les quatre séries temporelles $y = (y_t)_{t\in\mathbf{N}}$ différentes commençant ainsi :

$$2, 6, 12, 20, 30, 42, \dots \qquad 4, 10, 20, 36, 62, 104, \dots$$
$$3, 2, 1, 6, 3, 2, 1, \dots \qquad 0, -1, -2, 3, 0, -1, -2, \dots$$

Pour chacun de ces cas, déterminer l'équation de récurrence définissant la suite correspondante ainsi que sa solution analytique.

Remarque. — S'il n'y a certainement pas unicité des prolongements de ces suites, certains sont plus simples que d'autres, donc plus raisonnables ou naturels. Dans le cas de la seconde suite plusieurs solutions simples sont envisageables.

Exercice 2. — Une série temporelle $y = (y_t)_{t\geq 0}$ vérifie la relation de récurrence

$$y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} = (-1)^{t-1} \quad \text{pour } t \geq 2, \qquad \text{avec } y_0 = 2 \text{ et } y_1 = 3.$$

Obtenir une formule analytique pour y_t en utilisant : la méthode des fonctions génératrices, la décomposition en fractions partielles et l'expansion en série de puissances. On rappelle que pour $a > 0$ donné, on a

$$\frac{1}{(a-z)^k} = \sum \binom{n+k-1}{k-1} \frac{z^n}{a^{n+1}}, \qquad |z| < a.$$

Exercice 3. — (i) Montrer que le filtre $P(B) = \frac{1}{3}(2+B+B^2-B^3)$ « enlève » les composantes saisonnières de période de 3, c'est-à-dire qu'il transforme chaque fonction de période 3 en une fonction constante.

(ii) Trouver l'ordre de la tendance polynomiale maximale conservée (laissée invariante) par ce filtre.

Exercice 4. — Trouver un filtre $1 + aB + bB^2 + cB^3$ qui laisse passer une tendance affine sans distorsion et élimine les suites saisonnières d'ordre 2. (*Indication.* — Trouver un système de $2 + 1 = 3$ équations et les résoudre.)

Exercice 5. — Trouver un filtre $f(B)$ qui conserve les polynômes de degré inférieur ou égal à 1 qui enlève les composantes saisonnières d'ordre 4. En déduire que pour une série ayant une composante périodique d'ordre 4 et une tendance linéaire $m = (m_t)_{t\in\mathbf{N}}$, la tendance est donnée par $m_t = f(B)Y_t$.

Exercice 6. — (i) Se rappeler qu'une série saisonnière est périodique, et que chaque série périodique est la somme d'une série constante et d'une série saisonnière.

(ii) Trouver une base de l'espace vectoriel des séries périodiques d'ordre p.

(iii) Trouver une base de l'espace vectoriel des séries saisonnières d'ordre p, et ensuite une base des séries périodiques qui la contient.

Exercice 7. — On considère la série suivante :

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	58	40	31	15	18	15	9	9	10	8

(i) Représenter graphiquement cette série.

(ii) On se propose d'ajuster une tendance f de la forme $f(t) = \dfrac{1}{a+bt}$. Justifier ce choix.

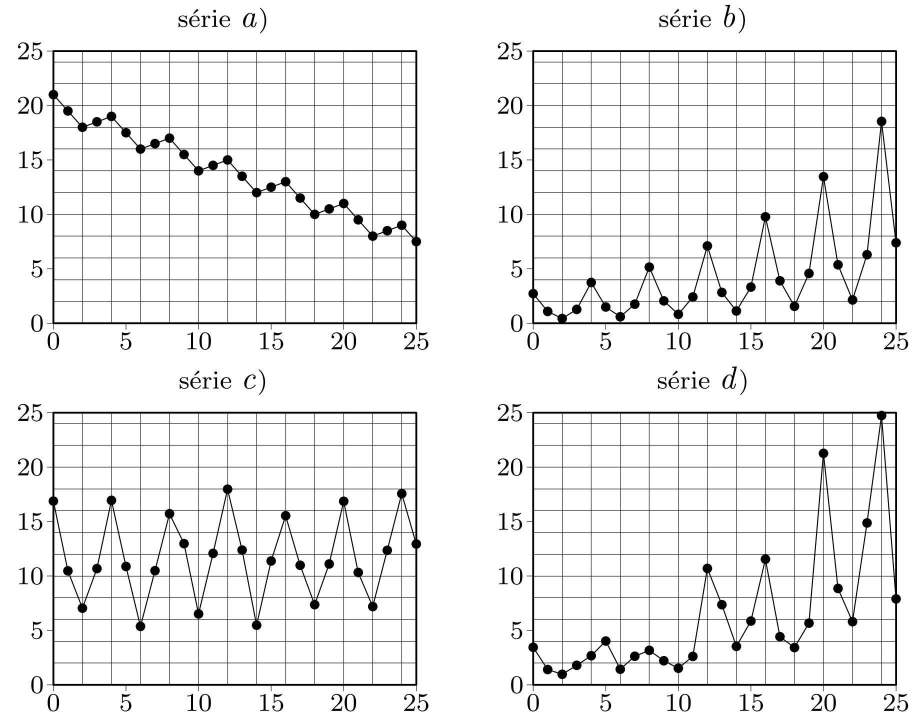
(iii) Déterminer les coefficients a et b en utilisant un changement de variables approprié :

a) par la méthode des deux points (en les choisissant judicieusement) ;

b) par régression linéaire.

(iv) Représenter les deux tendances ainsi obtenues sur le graphique précédent et comparer les résultats. Est-ce que les résidus ont une allure irrégulière ?

Exercice 8. — Pour chacune des quatre séries suivantes,



(i) Écrire le modèle qui semble vous convenir, en précisant le type de modèle (par défaut « additif »), la tendance et la période.

(ii) Exprimer le modèle choisi sous la forme d'une équation vectorielle *linéaire* avec des paramètres inconnus, puis donner la formule de régression permettant une détermination de ces paramètres.

Exercice 9. — On considère la série temporelle suivante :

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y_i	7.5	4.4	3.3	7.6	3.9	2.4	6.9	4.5	2.7	8.2	4.1	3.0	7.5	3.5	2.8

(i) Représenter graphiquement cette série.

(ii) Quel modèle proposeriez-vous pour cette série ? Donner des justifications.

(iii) Calculer les facteurs saisonniers $s = (s_j)_{1 \leq j \leq p}$ ainsi que leur moyenne $\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} s_j$, en supposant la tendance constante égale à un nombre a ($m_t = a$ pour tout t).

(iv) En notant $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$, la série des fluctuations irrégulières, calculer e_1, e_2 et e_3.

(v) Proposer une méthode pour l'estimation des paramètres, en supposant cette fois une tendance affine $m_t = at + b$. (On pourra implémenter le calcul à l'aide d'un logiciel spécifique, ou tenter de faire le calcul à l'aide d'une calculatrice.) Proposer un *test* pour choisir entre les deux modèles.

Exercice 10. — On considère un modèle simple où la tendance est constante ($f(t) = a$).

(i) On considère tout d'abord le modèle sans composante saisonnière. Comment choisir a si le modèle est additif ? Que peut-on dire dans ce cas sur les fluctuations irrégulières ? Que se passe-t-il si le modèle est multiplicatif ?

(ii) On suppose maintenant qu'une composante saisonnière $s = (s_j)_{1 \leq j \leq p}$ est présente. On suppose que le nombre d'observations n est un multiple entier de périodes $n = \ell \times p$. Comment choisir a et $s = (s_j)_{1 \leq j \leq p}$ si le modèle est additif ? Que se passe-t-il si le modèle est multiplicatif ?

(iii) Reprendre la question précédente lorsque le nombre d'observations n'est pas un multiple entier du nombre de périodes (de la forme $n = \ell \times p + m$, écriture obtenue par division euclidienne).

Exercice 11. — On considère une série temporelle $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ périodique de période p. On suppose que le nombre d'observations n est multiple de p : $n = \ell \times p$. Montrer alors que les corrélations suivantes sont :

$$\varrho(p) = \frac{\ell - 1}{\ell}, \qquad \varrho(2p) = \frac{\ell - 2}{\ell}, \ldots, \qquad \varrho(jp) = \frac{\ell - j}{\ell}, \ldots$$

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

3M22–Séries temporelles
Master MMAS 2, année 2009–10

SÉRIES TEMPORELLES. — FICHE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 2

Exercice 1. — Calculer la fonction d'auto-covariance du processus à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ défini par

$$Z_n = \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\varepsilon_n + a_2\varepsilon_{n-1} \\ b_1\varepsilon_{n-1} + b_2\varepsilon_{n-2} \end{pmatrix}$$

où $(\varepsilon_n)_n$ est un bruit blanc standard.

Exercice 2 *(restrictions sur les valeurs des coefficients d'auto-corrélation pour les processus* MA*)*. — Trouver pour les processus MA(1) les valeurs maximales et minimales de la corrélation ϱ_1 et les valeurs de θ pour lesquelles ces valeurs sont atteintes.

Exercice 3. — (i) Déterminer les corrélations (le corrélogramme) des processus suivants :

a) le processus MA(2), $X_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2}$;

b) le processus MA(3), $X_t = \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \theta_3\varepsilon_{t-3}$.

(ii) Calculer les corrélations (et tracer le corrélogramme) dans les cas suivants :

a) MA(2), $\theta_1 = -5/6$, $\theta_2 = 1/6$;

b) MA(2), $\theta_1 = 0.8$, $\theta_2 = 0.5$;

c) MA(3), $\theta_1 = 0.8$, $\theta_2 = -0.4$, $\theta_3 = -0.3$.

Exercice 4. — Examiner si les deux processus MA(2) de l'exercice précédent sont inversibles.

Exercice 5. — Soit X un processus ARMA$(1,1)$ vérifiant l'équation $X_t - 0.5X_{t-1} = \varepsilon_t + 0.4\varepsilon_{t-1}$, avec ε un bruit blanc.

(i) Préciser si le processus est stationnaire, causal, inversible.

(ii) Trouver les coefficients (ψ_j) de sa représentation comme processus MA(∞) et les coefficients (π_j) de sa représentation comme processus AR(∞), et préciser si ces représentations sont convergentes.

Exercice 6. — Mêmes questions pour les processus ARMA$(2,1)$ et ARMA$(2,2)$ définis par :

(i) $X_t - \dfrac{1}{2}X_{t-1} - \dfrac{3}{16}X_{t-2} = \varepsilon_t + 1.25\,\varepsilon_{t-1}$;

(ii) $(1 - B - B^2/4)X_t = (1 + B + B^2)\varepsilon_t$.

Exercice 7. — On considère le processus X défini par

$$(1 - 0.8\,B + 0.16\,B^2)X = (1 + \theta B)\varepsilon.$$

(i) Est-ce que ce processus est stationnaire et causal ? Si oui, obtenir la « représentation ψ » de X par rapport au bruit ε.

(ii) Sous quelles conditions ce processus est-il inversible ? Obtenir la « représentation π » du bruit ε en termes de la série. Quel problème se présente si la série n'est pas inversible ?

Exercice 8. — Trouver les trois inégalités qui définissent la région triangulaire du plan $\{(\theta_1, \theta_2) : \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}\}$ pour laquelle un processus MA(2) est inversible. Tracer la région sur un graphe. Indiquer le domaine des racines réelles et des racines complexes. (*Indication.* — les conditions pour avoir des racines de module plus grand que 1 sont différentes dans les cas de racines réelles ou complexes, et pour un polynôme $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2$, la condition pour avoir des racines réelles de module plus grand que 1 sont plus compliquées que les conditions (équivalentes) que le polynôme « réciproque » $\tilde{\theta}(z) = z^2\theta(1/z) = z^2 + \theta_1 z + \theta_2$ ait des racines réelles de module plus petit que 1. Pour ce dernier polynôme, les conditions sont :

a) racines complexes : $|z_i|^2 = |z_1 z_2| = |c/a| = |\theta_2| < 1$;

b) racines réelles : $\tilde{\theta}(1) = 1 + \theta_1 + \theta_2 > 0$, $\tilde{\theta}(-1) = 1 - \theta_1 + \theta_2 > 0$.

(i) Pour le processus MA(2), trouver un domaine S contenant toutes les valeurs possibles des coefficients d'auto-corrélation ϱ_1, ϱ_2 telles que le processus soit inversible et les valeurs de θ_1, θ_2 pour lesquelles les valeurs sur la frontière de S sont atteintes.

Exercice 9. — Trouver le domaine de causalité dans le plan $\{(\phi_1, \phi_2) : \phi_1, \phi_2 \in \mathbf{R}\}$ d'un processus AR(2).

Exercice 10. — Obtenez en partant directement du système de Yule–Walker les cinq premières corrélations pour un processus AR(2), avec :

a) $\phi_1 = 0.6$, $\phi_2 = -0.2$;

b) $\phi_1 = -0.6$, $\phi_2 = 0.2$.

Calculer aussi la variance $\gamma(0)$. Tracer les corrélations.

Exercice 11. — (i) Vérifier si le processus AR(2), défini par $X_t = -0.3X_{t-1} + 0.10X_{t-2} + \varepsilon_t$ est stationnaire causal. Calculer son corrélogramme en partant directement du système de Yule–Walker, puis tracer-le.

(ii) Même question pour le processus AR(2) défini par $X_t = -X_{t-1} - 0.34X_{t-2} + \varepsilon_t$.

Exercice 12. — Calculer les fonctions d'auto-covariance et d'auto-corrélation des processus apparaissant dans les exercices antérieurs.

Exercice 13. — Une question d'unicité. — *Est-ce que deux processus distincts peuvent avoir même fonction d'auto-covariance ?*

Soient $(u_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ et $(v_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ deux bruits blancs de variances respectives σ^2 et $\theta^2\sigma^2$ avec $0 < |\theta| < 1$. On considère alors les processus aléatoires $(X_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ tels que

$$X_t = u_t + \theta u_{t-1} \qquad \text{et} \qquad Y_t = v_t + \frac{1}{\theta} v_{t-1}$$

Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ ont la même fonction d'auto-covariance.

Exercice 14. — Une question d'inversibilité. — *Est-ce qu'un processus à représentation* MA *non inversible peut aussi avoir une représentation inversible ?*

Soit $(X_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ le processus aléaloire défini par

$$X_t = \varepsilon_t + \frac{1}{\theta}\,\varepsilon_{t-1}$$

où $0 < |\theta| < 1$ et $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ est un bruit blanc.

(i) Montrer que cette représentation du processus n'est pas inversible.

(ii) On pose maintenant

$$w_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \theta^j X_{t-j}.$$

Montrer que $(w_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ est un bruit blanc dont on précisera la variance en fonction de σ^2 et θ.

(iii) Montrer que $X_t = w_t + \theta w_{t-1}$ et que cette représentation de $(X_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ est inversible.

Correction (?) de l'exercice 4. — (en examinant la récurrence obtenue par la méthode des coefficients indéterminés...)

La région d'inversibilité dans le domaine (θ_1, θ_2) :

$$\theta_2 > -\theta_1 - 1$$
$$\theta_2 > \theta_1 - 1$$
$$\theta_2 < 1$$

est le triangle situé au dessus des deux lignes $\theta_2 + \theta_1 = -1$, $\theta_2 = \theta_1 - 1$ et au dessous de la ligne $\theta_2 = 1$.

Les racines sont réelles/complexes, en dessous/au dessus, de la parabole $\theta_2 = \theta_1^2/4$.

(i) Pour passer de (θ_1, θ_2) à $(\varrho_1; \varrho_2)$ on utilise

$$\varrho_1 = \frac{\theta_1(1+\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, \qquad \varrho_2 = \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}\,.$$

Transformant les équations antérieures, on trouve : $theta_2 = 1$ implique $\varrho_1 = 2\theta_1/(2+\theta_1^2)$, $\varrho_2 = 1/(2+\theta_1^2)$, $\theta_1 = \varrho_1/2\varrho_2$, $\varrho_2(2+\varrho_1^2/4\varrho_2^2) = 2\varrho_2 + \varrho_1^2/4\varrho_2^2 = 1$ et donc $\varrho_1^2 = 4\varrho_2(1-2\varrho_2)$. Finalement, on trouve

$$\text{dessous}\varrho_1 = 2\sqrt{\varrho_2(1-2\varrho_2)}, \qquad \varrho_2 + 1/2 \geq \varrho_1, \qquad \varrho_2 + 1/2 \geq -\varrho_1$$

où les dernières deux inégalités viennent de l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géometrique de $(1+\theta_2), \theta_1$.

Correction (?) de l'exercice 5. —

Le domaine de causalité d'un processus AR(2)

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

(beaucoup plus compliqué que pour le AR(1)), obtenu comme le domaine d'inversibilité du processus MA(2), est le triangle situé en dessous de $\varphi_2 + \varphi_1 < 1$, $\varphi_2 - \varphi_1 < 1$ et au dessus de $\varphi_2 = -1$.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

3M22–Séries temporelles
Master MMAS 2, année 2009–10

FILTRAGE ET SÉRIES TEMPORELLES. — CONTRÔLE

Vendredi 13 novembre 2009, 9h00–12h00

Tout document est interdit. La calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1. — Déterminer une moyenne mobile causale $\Theta(B) = \sum_{i=0}^{q} \theta_i B^i$ d'ordre q minimal qui laisse passer une tendance linéaire sans distorsion et qui enlève les composantes saisonnières d'ordre 4.

Exercice 2. — (i) Donner les formules des coefficients de corrélation ϱ_1 et ϱ_2 pour un processus MA(1)

$$X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}.$$

(ii) Trouver les valeurs maximales et minimales de ϱ_1 et les valeurs de θ pour lesquelles ces valeurs sont atteintes.

Exercice 3. — On considère le processus aléatoire suivant :

$$X(t) = X_t = 10 + 0{,}7X(t-1) - 0{,}12X(t-2) + \varepsilon(t) - 0{,}5\varepsilon(t-1)$$

où ε est un bruit blanc centré de variance $\sigma^2 = 1$.

(i) En supposant le processus X stationnaire, déterminer l'espérance de $X(t)$.

SÉRIES TEMPORELLES. — CONTRÔLE

21 novembre 2008, durée 1 heure

Tout document est interdit. La calculatrice est autorisée. La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte.

Exercice 1. — Trouver un filtre $1 + \alpha B + \beta B^2 + \gamma B^3 + \delta B^4$ qui laisse passer une tendance affine sans distorsion et élimine les périodicités d'ordre 3. *Indication.* — trouver un système de $3 + 1 = 4$ équations et les résoudre.

Exercice 2. — On considère le processus X défini par $(1-0.8\,B+0.16\,B^2)X_t = (1+\theta B)\varepsilon_t$.

(i) Est-ce que ce processus est stationnaire et causal ? Si oui, obtenez la « représentation ψ » de X par rapport au bruit ε.

(ii) Sous quelles conditions ce processus est-il inversible ? Obtenez la « représentation π » du bruit ε en termes de la série. Quel problème se présente si la série n'est pas inversible ?