Un calcul et un groupe exceptionnels

Marc van Leeuwen

Laboratoire de Mathématiques et Applications
Université de Poitiers

14 juin 2007 / colloquium Poitiers

Plan

Petite chronologie (personnelle)

- 1989–1995, Amsterdam. Développement du logiciel ‘LiE’.
- 2002. Congrès “Théorie de Lie Algorithmique” à Montréal ; Le projet ‘Atlas of Lie groups and Representations’ formé.
- 2003. Invitation de Fokko du Cloux à rejoindre ‘Atlas’.
- 2004. Fokko termine la partie “structure” du logiciel **`atlas`**.
- novembre 2005. Fokko termine “polynômes de KLV”.
- décembre 2005. Réunion ‘Atlas’ à Boston. Maladie Fokko.
- juillet 2006. Atlas workshop. Prototype nouvelle interface.
- 10 novembre 2006. Décès Fokko.
- décembre 2006. Version modulaire “crack E_8” d’**`atlas`**.
- 9 janvier 2007. Polynômes de KLV pour $E_8(\mathbf{R})$ calculés.
- 19 mars 2007. Annonce du résultat.

Limitations

On ne peut pas tout expliquer dans une heure.
Je *ne parlerai pas* de

- la théorie de groupes de Lie réels (non compacts),
- leurs représentations (de dimension infinie),
- la signification des polynômes de Kazhdan-Lusztig-Vogan,
- les applications du résultat trouvé,
- le but ultime du projet ‘Atlas’.

Par contre j’espère expliquer

- Qu’est-ce qui est désigné par « E_8 » ?

Je mettrai l’accent sur les aspects *discrets*.

Définition

Un groupe de Lie G sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est un ensemble muni à la fois des structures de *groupe* et de *variété différentielle*, telles que la composition $(x, y) \mapsto x.y$ soit de classe $\mathcal{C}^2(G \times G, G)$.

Tout groupe peut être vu comme un groupe de Lie de dimension 0 en le munissant de la topologie discrète ;
ce n'est guère instructif.

Il est donc raisonnable de prendre pour point de départ un groupe de Lie *connexe*.

Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Pour un groupe de Lie connexe G, l'étude de son espace tangent $\mathfrak{g} = T_e(G)$ à l'élément neutre est très informatif.

La dérivée seconde du *commutateur* $(x, y) \mapsto x.y.x^{-1}.y^{-1}$ fournit une application bilinéaire $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ notée $(a, b) \mapsto [a, b]$.

L'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni de ce *crochet de Lie* vérifie les axiomes d'une *algèbre de Lie* (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) :

- $[b, a] = -[a, b]$,
- $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$.

G agit sur $\mathfrak{g}$ comme un groupe d'automorphismes.

Classe de groupes de Lie considérée

Deux cas extrêmes sont relativement simples à traiter :

- algèbres de Lie commutatives, pour lesquelles $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$,
- algèbres de Lie semisimples, pour lesquelles $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$,

Pour ne pas exclure $G = \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$, on définit une classe de groupes de Lie «sympathiques», dont l'algèbre de Lie peut mélanger (en somme directe) *que* ces deux cas.

Pour point de départ, **`atlas`** prend les groupes de Lie *complexes connexes réductifs*.

Sous-algèbres de Cartan

Soit G un groupe complexe réductif.
La notion de *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{g}$ est telle que

- il en existe toujours au moins une,
- elles sont (toutes) maximales commutatives,
- leur ensemble forme *une* orbite sous l'action de G.

Alors sans état d'âme, on fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$.

Action du groupe de Weyl sur $\mathfrak{h}$

L'action d'un $g \in G$ peut envoyer $\mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}$ de façon *non-triviale*.

Le groupe qui représente ce résidu de l'action de G est *fini*.
C'est le groupe de Weyl $W = \mathsf{Stab}_G(\mathfrak{h}) / \mathsf{Z}_G(\mathfrak{h})$.

Exemple.
$G = \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{g} = M_n(\mathbf{C})$, $\mathfrak{h} = \{\text{matrices diagonales}\}$.

Pour $g \in G$, les éléments de $g \cdot \mathfrak{h}$ sont diagonalisables sur $g(\mathcal{E})$, l'image par g de la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

Posons $\mathbf{C}\mathcal{E} = \{\mathbf{C}e_1, \ldots, \mathbf{C}e_n\}$ (ensemble de n droites dans $\mathbf{C}^n$),
alors $W = \mathsf{Stab}_G(\mathbf{C}\mathcal{E}) / \bigcap_{i=1}^n \mathsf{Stab}_G(\mathbf{C}e_i) \cong S_n$.
$W = S_n$ agit sur $\mathfrak{h}$ par permutation des coefficients diagonaux.

Racines

Comme $\mathfrak{h}$ est commutatif, on peut décomposer $\mathfrak{g}$ comme somme d'espaces propres simultanés pour les opérations $\mathrm{ad}\, h = [h, \cdot\,] : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$.

Un tel espace propre V est caractérise par son *poids* $\lambda : \mathfrak{h} \to \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{ad}\, h(x) = [h, x] = \lambda(h)x$ pour tout $h \in \mathfrak{h}$ et $x \in V$.

En plus, $\dim V_\lambda \leq 1$, sauf pour $\lambda = 0 \in \mathfrak{h}^*$ (où $V_\lambda = \mathfrak{h}$).

Les $\lambda \neq 0$ avec $\dim V_\lambda = 1$ sont les *racines* de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$.

Les racines forment un ensemble fini $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$.

On a $\dim G = \dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} + \#\Phi$.

Systèmes de racines

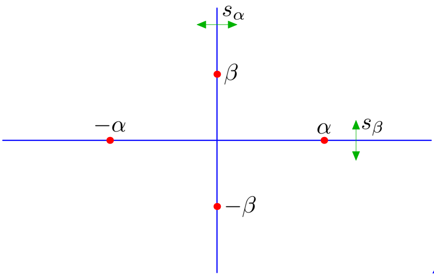
Propriétés de Φ :

- L'ensemble Φ est stable par l'action du groupe W sur $\mathfrak{h}^*$;
- Pour chaque $\alpha \in \Phi$ l'action de W contient une réflection s_α avec $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$;
- Les s_α engendrent l'action de W sur $\mathfrak{h}^*$;
- Pour tout $\beta \in \Phi$ on a $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbf{Z}\alpha$ (condition cristallographique) ;
- $\Phi \cap 2\Phi = \emptyset$.

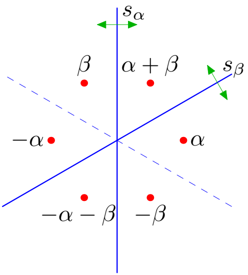
Un ensemble avec de tels propriétés est appelé un système de racines (dans l'espace vectoriel $\mathfrak{h}^*$ muni de l'action de W).

Dans l'étude de Φ, on peut limiter les scalaires à $\mathbf{R}$ (ou à $\mathbf{Q}$).

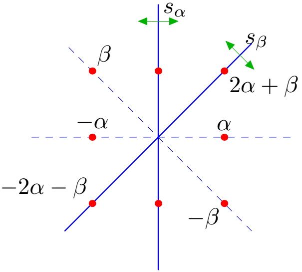
Exemples en rang 2



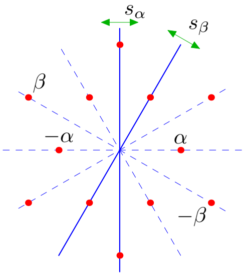
$A_1 \times A_1$



A_2



$B_2 = C_2$



G_2

Groupes de Coxeter

Pour $n = \dim\langle\Phi\rangle_{\mathbf{R}}$, l'action de W peut être représentée dans $\mathbf{R}^n$ comme engendrée par n réflections $s_i : x \mapsto x - 2\varphi_i(x)e_i$, où φ_i est une forme linéaire telle que $\varphi_i(e_i) = 1$.

On peut supposer que $\varphi_i(e_j) = \varphi_j(e_i)$; pour que $s_i.s_j$ soit d'ordre fini $m_{i,j} \geq 2$, il convient de prendre $\varphi_i(e_j) = -\cos\frac{\pi}{m_{i,j}}$.

Ces réflections engendrent le *groupe de Coxeter* déterminé par $I = \{1, \ldots, n\}$ et le système symétrique de coefficients $(m_{i,j})_{i \neq j}$.

Posant $m_{i,i} = 1$ pour $i \in I$, ce groupe est celui avec la présentation abstraite $W = \langle\, s_i : i \in I \mid (s_i s_j)^{m_{i,j}} = e \quad (i, j \in I) \,\rangle$

Question fondamentale : dans quels cas le groupe W est-il fini ?

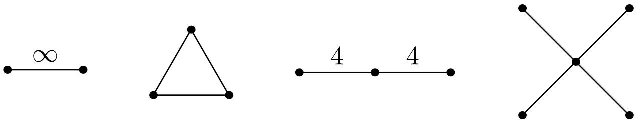
Diagramme de Coxeter

La matrice $(m_{i,j})_{i,j\in I}$ se visualise par un graphe sur I, avec le nombre $m_{i,j}$ comme étiquette sur l'arête entre i et j. Si $m_{i,j} = 2$ cette arête est *absente* ; les étiquettes 3 ne seront pas écrites.

La finitude de W se teste séparément sur les composantes connexes du graphe.

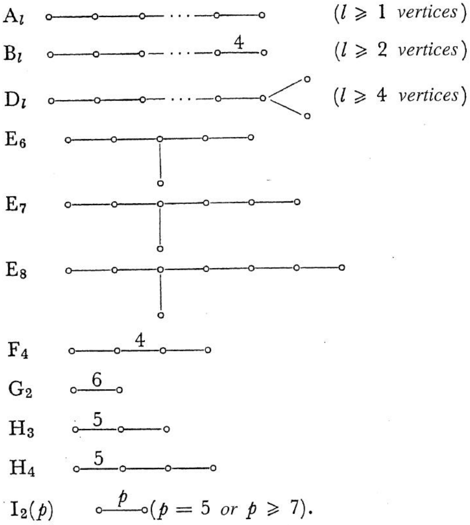
Le groupe W est fini si et seulement si la matrice symétrique $(-\cos\frac{\pi}{m_{i,j}})_{i,j\in I}$ est définie positive.

Ainsi un grand nombre de graphes est à exclure comme sous-graphe :



$\dots$

Groupes de Coxeter irréductibles finis



type	ordre
A_n	$(n+1)!$
B_n	$n!\,2^n$
D_n	$n!\,2^{n-1}$
E_6	51840
E_7	2903040
E_8	696729600
F_4	1152
G_2	12
H_3	120
H_4	14400
$I_2(p)$	$2p$

Polytopes réguliers

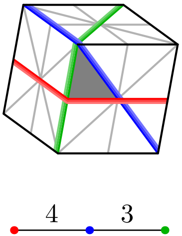
Les groupes de Coxeter et leur action interviennent dans la classification des polytopes convexes réguliers (généralisation de la notion de solide platonicien, en dimension d quelconque).

Le group de symétrie d'un tel polytope permute transitivement les faces, et le stabilisateur d'une face (un polytope régulier de dimension $d - 1$) comporte toutes les symétries de celle-ci.

Domaine fondamental

Pour obtenir un domaine fondamental pour l'action du groupe de symétrie sur la surface du polytope, on choisit une face, une face de cette face (c'est-à-dire une arête si $d = 3$), etc., jusqu'à un sommet (au total on choisit un *drapeau*).

Ce domaine fondamental est borné par d hyperplans de réflection, pour des réflections qui chacun stabilisent toutes les composantes *sauf une* du drapeau. Ces réflections engendrent un groupe de Coxeter dont le diagramme est *linéaire* et ordonné, et qui correspond au type du polytope. Les étiquettes forment le *symbole de Schäfli* du polytope.



Classification des polytopes convexes réguliers

diagramme	*polytope*	*groupe*	*ordre*
$\bullet\overset{p}{\text{———}}\bullet$	p-gone	$I_2(p)$	$2p$
$\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet$	tétraèdre	A_3	24
$\bullet\overset{4}{\text{———}}\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet$	cube	B_3	48
$\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet\overset{4}{\text{———}}\bullet$	octaèdre	B_3	48
$\bullet\overset{5}{\text{———}}\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet$	dodécaèdre	H_3	120
$\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet\overset{5}{\text{———}}\bullet$	icosaèdre	H_3	120
$\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet$	4-simplexe	A_4	120
$\bullet\overset{4}{\text{———}}\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet$	4-hypercube	B_4	384
$\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet\overset{4}{\text{———}}\bullet$	4-hyperoctaèdre	B_4	384
$\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet\overset{4}{\text{———}}\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet$	24-tope	F_4	1152
$\bullet\overset{5}{\text{———}}\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet$	120-tope	H_4	14400
$\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet\overset{3}{\text{———}}\bullet\overset{5}{\text{———}}\bullet$	600-tope	H_4	14400

Classification des systèmes de racines

Pour un groupe de Coxeter fini agissant sur $\mathbf{R}^n$, il faut choisir des racines dans $\mathbf{R}^n$ qui vérifient la condition cristallographique.

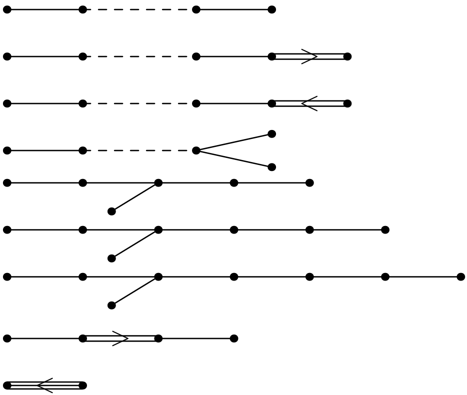
Contrairement à la situation pour les polytopes, I n'est pas ordonné. Le diagramme n'est pas nécessairement linéaire, ni connexe, mais les points suivant doivent être pris en compte :

- Pour tout $i \neq j$ il faut avoir $m_{i,j} \in \{2, 3, 4, 6\}$;
- Si $m_{i,j} \in \{4, 6\}$, l'arête entre i et j devient orientée, pour indiquer le rapport des longueurs des racines associés.

Donc les types $I_2(p)$ (pour $p = 5$ ou $p \geq 7$) sont exclus, ainsi que H_3 et H_4 ; l'orientation de l'arête étiquetée 4 distingue les types B_n et C_n pour $n \geq 3$ (mais B_2, G_2, et F_4 restent seul).

Classification des systèmes de racines irréductibles

diagramme

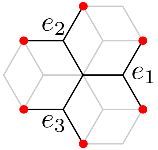


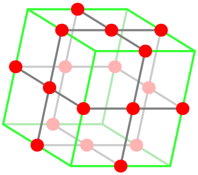
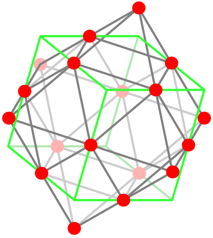
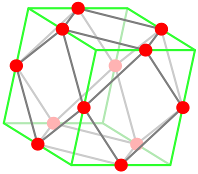
type	$\#\Phi$	*indice*
A_{n-1}	$n(n-1)$	n
B_n	$2n^2$	2
C_n	$2n^2$	2
D_n	$2n(n-1)$	4
E_6	72	3
E_7	126	2
E_8	240	1
F_4	48	1
G_2	12	1

Systèmes de racines classiques

type	*racines*
A_{n-1}	$\{\, e_i - e_j \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}; i \neq j \,\}$
B_n	$\{\, \pm e_i \pm e_j \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}; i < j \,\} \cup \pm\mathcal{E}$
C_n	$\{\, \pm e_i \pm e_j \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}; i < j \,\} \cup \pm 2\mathcal{E}$
D_n	$\{\, \pm e_i \pm e_j \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}; i < j \,\}$

où $\mathcal{E} = \{\, e_i \mid i \in \{1, \ldots, n\} \,\}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.



Un système de racines exceptionnel

L'indice d'un système de racines est l'indice $[X : Y]$ des réseaux $Y = \langle\Phi\rangle_{\mathbf{Z}}$ et $X = \{\, v \in \langle\Phi\rangle_{\mathbf{R}} \mid \forall\alpha \in \Phi : s_\alpha(v) - v \in \mathbf{Z}\alpha \,\}$.

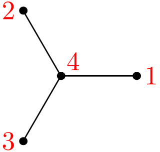
L'ensemble $\pm\mathcal{E}$ est un système de racines de type $(A_1)^n$, qui est d'indice 2^n (car $Y = \mathbf{Z}^n$ et $X = (\frac{1}{2}\mathbf{Z})^n$).

Si l'on veut rajouter des éléments de $X - Y$ à Φ_0 comme racines de la même longueur dans un système plus grand, il faut que $n \geq 4$. En effet pour $n = 4$ on peut former $\Phi_0 = \pm\mathcal{E} \cup \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}^4$, qui est un système de racines avec $\#\Phi_0 = 24$. Ce système est l'ensemble des vecteurs unité dans le réseau $\mathbf{Z}^4 \cup \big((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbf{Z}^4\big)$.

Ce Φ_0 est d'indice 4. (Comme l'indice du système A_4 est 5, Φ_0 donne une meilleure façon d'«empiler des boules» en $\mathbf{R}^4$.)

En effet Φ_0 est de type D_4, avec comme «racines simples» :

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_1 & (0, & 0, & 0, & 1) \\
\alpha_2 & (0, & 0, & 1, & 0) \\
\alpha_3 & (0, & 1, & 0, & 0) \\
\alpha_4 & (+\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2})
\end{array}$$



Mais ce n'est pas la forme «habituelle» du système de racines de type D_4, qui est $\Phi_1 = \{ \pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 4 \}$. Une bijection $\Phi_0 \to \Phi_1$ est donnée, en identifiant $\mathbf{R}^4$ avec $\mathbf{H}$, par multiplication par un élément de Φ_1 comme $1 + \mathbf{i}$.

$\Phi_0 \cup \Phi_1$ est un système de racines de type F_4, et le groupe de Weyl correspondant fournit *toutes* les symétries du système Φ_0.

Un système de racines encore plus exceptionnel

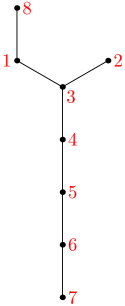
Une construction similaire est possible à partir des systèmes de racines de type D_n. Le système $\Phi = \{\, \pm e_i \pm e_j \mid i, j \in \{1, \ldots, n\}; i < j \,\}$ engendre le réseau $P = \langle \Phi \rangle_{\mathbf{Z}} = \{ v \in \mathbf{Z}^n \mid \sum_i v_i \in 2\mathbf{Z} \,\}$. Le réseau $X = \{\, v \in \langle \Phi \rangle_{\mathbf{R}} \mid \forall \alpha \in \Phi : s_\alpha(v) - v \in \mathbf{Z}\alpha \,\}$ est égal à $\mathbf{Z}^n \cup ((\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) + \mathbf{Z}^n)$, d'où l'indice $[X : P]$ de Φ est 4.

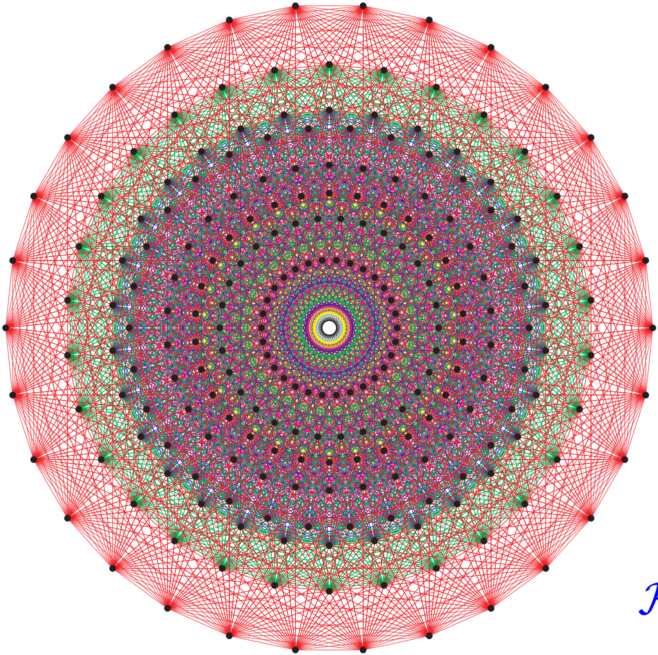
Une possibilité d'étendre Φ avec un élément de $X - P$ se produit *uniquement* quand $n = 8$. Dans ce cas l'orbite de $v = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sous l'action du groupe de Weyl de Φ est formée des 128 vecteurs obtenus en changeant les signes d'un nombre *pair* de coordonnées de v. Ces vecteurs rajoutés aux $2 \times 8 \times 7 = 112$ racines de Φ constituent les 240 racines d'un système de racines Ψ de type E_8.

Les racines simples du système de type E_8

On peut décrire Ψ comme l'ensemble de vecteurs de longueur $\sqrt{2}$ dans le réseau $P \cup \left((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + P\right)$ dans $\mathbf{R}^8$.

$$\begin{array}{llllllllll}
\alpha_1 & (0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & -1) \\
\alpha_2 & (0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1) \\
\alpha_3 & (0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & -1, & 0) \\
\alpha_4 & (0, & 0, & 0, & 0, & 1, & -1, & 0, & 0) \\
\alpha_5 & (0, & 0, & 0, & 1, & -1, & 0, & 0, & 0) \\
\alpha_6 & (0, & 0, & 1, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0) \\
\alpha_7 & (0, & 1, & -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0) \\
\alpha_8 & (+\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & +\frac{1}{2})
\end{array}$$





FIN