Corrigé Devoir à la maison iL01 : Mathématiques Discrètes vendredi 23 septembre 2005

1. On rappelle la définition $\operatorname{Inv}(\sigma) = \{\, \{\sigma_i, \sigma_j\} \mid i, j \in [1, n],\ i < j,\ \sigma_i > \sigma_j \,\}$. Dans le cours on a montré que si $\sigma \in \mathbf{S}_n$, et $\tau = (i \;\; i+1) \in \mathbf{S}_n$ est une transposition simple, alors

$$\operatorname{Inv}(\sigma \circ \tau) = \begin{cases} \operatorname{Inv}(\sigma) \cup \{\{\sigma_{i+1}, \sigma_i\}\} & \text{si } \sigma_i < \sigma_{i+1}, \text{ et donc } \{\sigma_i, \sigma_{i+1}\} \notin \operatorname{Inv}(\sigma), \\ \operatorname{Inv}(\sigma) \setminus \{\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}\} & \text{si } \sigma_i > \sigma_{i+1}, \text{ et donc } \{\sigma_{i+1}, \sigma_i\} \in \operatorname{Inv}(\sigma). \end{cases}$$

a. Montrer par récurrence sur $\#\operatorname{Inv}(\sigma)$ que toute permutation $\sigma \in \mathbf{S}_n$ peut être écrite comme la composée de $\#\operatorname{Inv}(\sigma)$ transpositions simples.

3 $\surd$ *Si* $\#\operatorname{Inv}(\sigma) = 0$ *on a* $\sigma_1 < \cdots < \sigma_n$ *et donc* $\sigma = \mathrm{id}$, *et dans ce cas une écriture vide convient. Supposons donc* $\#\operatorname{Inv}(\sigma) = k > 0$, *et on suppose par récurrence que toute permutation* $\pi \in \mathbf{S}_n$ *avec* $\#\operatorname{Inv}(\pi) < k$ *peut être écrite comme la composée de* $\#\operatorname{Inv}(\pi)$ *transpositions simples. Il existe un indice* $i < n$ *tel que* $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ *(car sinon on aurait* $\sigma_1 < \cdots < \sigma_n$ *et donc* $\sigma = \mathrm{id}$*) ; on fixe un tel indice (par exemple le plus petit) et on pose* $\tau_k = (i \;\; i+1)$ *et* $\sigma' = \sigma \circ \tau_k$. *D'après la propriété citée, on a* $\#\operatorname{Inv}(\sigma') = k - 1$, *donc par l'hypothèse de récurrence il existe une écriture* $\sigma' = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{k-1}$ *de* σ' *comme composée de* $k-1$ *transpositions simples, et il en découle que* $\sigma = \sigma' \circ \tau_k = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$ *est une écriture de* σ *comme composée de* k *transpositions simples.*

b. Écrire $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 6 & 7 & 3 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{S}_7$ comme la composée de $\#\operatorname{Inv}(\sigma) = 12$ transpositions simples.

1 $\surd$ *En composant chaque fois à droite par la première transposition simple* $(i \;\; i+1)$ *qui réduit le nombre de transpositions, dont l'indice* i *est écrit sur la flèche, on réduit* σ *à* id *ainsi:* $\sigma = (5,2,6,7,3,1,4) \xrightarrow{1} (2,5,6,7,3,1,4) \xrightarrow{4} (2,5,6,3,7,1,4) \xrightarrow{3} (2,5,3,6,7,1,4) \xrightarrow{2} (2,3,5,6,7,1,4) \xrightarrow{5} (2,3,5,6,1,7,4) \xrightarrow{4} (2,3,5,1,6,7,4) \xrightarrow{3} (2,3,1,5,6,7,4) \xrightarrow{2} (2,1,3,5,6,7,4) \xrightarrow{1} (1,2,3,5,6,7,4) \xrightarrow{6} (1,2,3,5,6,4,7) \xrightarrow{5} (1,2,3,5,4,6,7) \xrightarrow{4} (1,2,3,4,5,6,7) = \mathrm{id}$. *De cette écriture on déduit, en allant dans le sens inverse que* $\sigma = \mathrm{id}(4\;\;5)(5\;\;6)(6\;\;7)(1\;\;2)(2\;\;3)(3\;\;4)(4\;\;5)(5\;\;6)(2\;\;3)(3\;\;4)(4\;\;5)(1\;\;2)$, *et on peut évidemment supprimer le* 'id' *initial.*

c. Cette écriture, est-elle la seule solution possible ?

1 $\surd$ *Non, par exemple* $\sigma = \mathrm{id}(1\;\;2)(2\;\;3)(4\;\;5)(3\;\;4)(2\;\;3)(1\;\;2)(5\;\;6)(4\;\;5)(3\;\;4)(6\;\;7)(5\;\;6)(4\;\;5)$.

d. Montrer que le nombre $\#\operatorname{Inv}(\sigma)$ dans le point *a* est le minimum possible, c'est à dire que pour toute écriture de $\sigma \in \mathbf{S}_n$ comme la composée de k transpositions simples on aura $k \geq \#\operatorname{Inv}(\sigma)$.

2 $\surd$ *On ne fixe pas* σ, *mais on montre par récurrence sur* k *que toute composée* $\gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_k$ *de* k *transpositions simples vérifie* $\#\operatorname{Inv}(\gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_k) \geq k$, *ce qui est équivalent à dire qu'aucun* $\sigma \in \mathbf{S}_n$ *ne peut être écrit comme composée de* k *transpositions simples avec* $k < \#\operatorname{Inv}(\sigma)$. *Une composée de* 0 *transpositions simples donne* id, *qui vérifie bien* $\#\operatorname{Inv}(\mathrm{id}) = 0$, *donc pour* $k = 0$ *c'est bon. Soit donc* $\sigma = \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_k$ *une composée de* $k > 0$ *transpositions simples. Par récurrence on suppose que* $\sigma' = \sigma \circ \gamma_k = \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_{k-1}$ *vérifie* $\#\operatorname{Inv}(\sigma') \geq k-1$, *donc* $\#\operatorname{Inv}(\sigma) = \#\operatorname{Inv}(\sigma' \circ \gamma_k) \in \{\#\operatorname{Inv}(\sigma') + 1, \#\operatorname{Inv}(\sigma') - 1\}$, *et* $\#\operatorname{Inv}(\sigma) \geq k$, *comme voulu.*

2. On a montré dans le cours que le nombre de permutions dans $\mathbf{S}_n$ de type $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ (donc avec $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n$) est donné par la formule

$$\frac{n!}{\left(\prod_{l=1}^{n} m_l(\lambda)!\right)\left(\prod_{i=1}^{k} \lambda_i\right)} \qquad \text{où } m_l(\lambda) = \#\{\, i \in [1,k] \mid \lambda_i = l \,\}.$$

a. Faire un tableau donnant pour tous les types possibles dans $\mathbf{S}_5$, le nombre de permutations de ce type, et la signature de ces permutations. Vérifier le nombre total de permutations, et le fait qu'il y a autant de permutations paires que de permutations impaires.

2 $\surd$ *Voici le tableau. Il y a* $24 + 20 + 15 + 1 = 60$ *permutations paires et* $30 + 20 + 10 = 60$ *impaires.*

type	*nombre*	*signe*
(5)	24	$+1$
$(4,1)$	30	-1
$(3,2)$	20	-1
$(3,1,1)$	20	$+1$
$(2,2,1)$	15	$+1$
$(2,1,1,1)$	10	-1
$(1,1,1,1,1)$	1	$+1$

b. Énumérer les permutations dans $\mathbf{S}_6$ avec type $(2,2,2)$, et vérifier que leur nombre correspond avec celui donné par la formule.

1 $\checkmark$ *On a* $\frac{6!}{3!\times 2^3} = 15$ *et les* 15 *permutations sont* $(1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$, $(1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)$, $(1\ 2)(3\ 6)(4\ 5)$, $(1\ 3)(2\ 4)(5\ 6)$, $(1\ 3)(2\ 5)(4\ 6)$, $(1\ 3)(2\ 6)(4\ 5)$, $(1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)$, $(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$, $(1\ 4)(2\ 6)(3\ 5)$, $(1\ 5)(2\ 3)(4\ 6)$, $(1\ 5)(2\ 4)(3\ 6)$, $(1\ 5)(2\ 6)(3\ 4)$, $(1\ 6)(2\ 3)(4\ 5)$, $(1\ 6)(2\ 4)(3\ 5)$, $(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$.