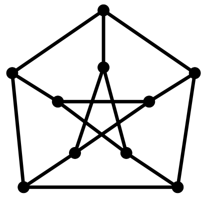
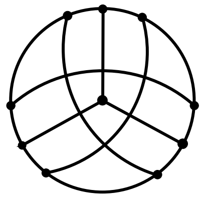
Corrigé Travaux dirigés iL01 : Mathématiques Discrètes, Feuille 7 vendredi 18 novembre 2005

1. Montrer que les trois graphes suivants sont isomorphes.

(1)



(2)



(3) $G = (V, E)$ où $V = \binom{[5]}{2}$ et $E = \{ \{a, b\} \in V \mid a \cap b = \emptyset \}$.

$\surd$ *Pour un isomorphisme des deux premiers, il suffit de trouver des étiquetages tels que la relation d'être des étiquettes de deux sommets voisins soit la même dans les deux cas. Pour l'isomorphisme avec le troisième graphe on peut faire un dessin du graphe et trouver une étiquetage convenable, mais on peut aussi utiliser les 10 paires $\{i, j\} \in \binom{[1,5]}{2}$ comme étiquettes dans l'un des deux graphes précédents, de telle façon que deux paires soient des étiquettes de sommets voisins si et seulement si leur intersection est vide (par exemple $\{1, 2\}$ sera voisin de $\{3, 4\}$, de $\{3, 5\}$, et de $\{4, 5\}$). Dans tous les cas on arrive facilement à le faire, si l'on essaye d'étiqueter par priorité les voisins de sommets ayant déjà un voisin, on ne rencontrera pas d'obstructions.*

2. Un automorphisme d'un graphe G est un isomorphisme de graphes $G \to G$.

a. Déterminer le nombre d'automorphismes des graphes suivants.

(1) K_n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
(2) P_n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
(3) C_n, pour tout $n \geq 3$.
(4) $K_{2,2}$ $K_{2,3}$, $K_{3,3}$.
(5) Le cube en dimension n : $G = (V, E)$ où $V = \{0, 1\}^n$, $E = \{ \{a, b\} \in V \mid \|a - b\| = 1 \}$.
(6) Le graphe de la question **1**.

$\surd$ *(1) Pour un graphe complet, toute permutation des sommets définit un automorphisme, donc K_n possède $n!$ automorphismes. (2) Pour un chemin P_n les seuls automorphismes sont l'identité et l'inversion $i \mapsto n - i$; pour $n = 0$ les deux sont les mêmes, donc P_0 n'a qu'un seul automorphisme, et P_n a 2 automorphismes pour $n > 0$. (3) Pour C_n on constate d'abord qu'il existe des automorphismes envoyant un sommet donné vers n'importe quel autre sommet (il suffit de prendre un «cyclage» convenable, c'est-à-dire une application qui en considérant les sommets comme des classes modulo n correspond à l'addition d'une constante). En effet le nombre d'automorphismes qui envoie $v \mapsto v'$ pour $v, v' \in V(C_n)$ fixés est toujours 2, d'où C_n possède $2n$ automorphismes. C'est un fait général que, pour $v_0 \in V(G)$ fixé, le nombre d'automorphismes qui envoie $v_0 \mapsto v$ est indépendant de v pour tous les $v \in V(G)$ pour lesquels il existe au moins un tel automorphisme (autrement dit, quand v parcourt $V(G)$ ce nombre ne peut prendre qu'un seule valeur non-nulle). C'est parce que les automorphismes forment un groupe (ils peuvent être composée et ils possèdent tous un automorphisme inverse) : si σ est un automorphisme qui envoie $v_0 \mapsto v$, alors il existe une bijection $\{ \alpha \in \mathrm{Aut}(G) \mid \alpha(v_0) = v_0 \} \to \{ \beta \in \mathrm{Aut}(G) \mid \beta(v_0) = v \}$ donnée par $\alpha \mapsto \sigma \circ \alpha$ avec inverse $\beta \mapsto \sigma^{-1} \circ \beta$. Il est facile à voir que C_n possède 2 automorphismes qui envoient $1 \mapsto 1$: l'identité, et l'inversion $i \mapsto n + 2 - i$ de l'ordre des sommets $i \neq 1$. (4) Pour $K_{n,m}$ avec $n \neq m$, l'ensemble des sommets est partitionné en les n sommets de degré m et les m sommets de degré n qui ne peuvent pas être mélangé par un automorphisme, mais toute paire de permutations des chaque partie séparément donne un automorphisme de $K_{n,m}$, au total $n!m!$ automorphismes. Dans $K_{n,n}$ on a toujours la partition en deux parties, mes les degrés sont tous n d'où un automorphisme peut échanger les deux parties ; ceci double ne nombre d'automorphismes, pour un total de $2(n!)^2$ automorphismes de $K_{n,n}$ (tout $n > 0$). En particulier $K_{2,2}$ $K_{2,3}$, $K_{3,3}$ ont respectivement 8, 12, et 72 automorphismes. (5) En réalisant le cube dans $\mathbf{R}^n$, des compositions de réflexions parallèles* *aux axes montre que le sommet v_0 à l'origine peut être envoyé vers n'importe quel des 2^n sommets. Puis, comme dans le (3) on se concentre sur les automorphismes qui fixent v_0 : par permutation des axes on voit qu'on peut fixer v_0 et réaliser n'importe quelle permutation de ses n voisins. Puis il n'est pas difficile à montrer qu'un automorphismes qui fixe v_0 et tous ses voisins est l'identité. Donc en raisonnant comme dans (3), on a $2^n n!$ automorphismes. (6) Pour sommets consécutifs $1, 2, 3, 4$ à l'extérieur, les nombres d'images possibles en fixant les précédents sont $10, 3, 2, 2$, et en fixant les quatre sommets il ne reste que l'identité, au total $10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 120$ automorphismes. Ce sont les automorphismes induits par les 120 permutations de [5] dans la description* **1***(3).*

b. Donner un graphe G avec $\#V(G) > 1$ dont le seul automorphisme est l'identité. Chercher (sans preuve formelle) le nombre minimal de sommets nécessaire pour obtenir cette propriété.

$\surd$ *Un triangle avec une «feuille» attaché à un sommet, et une queue de longueur 2 à un autre ($\#V = 6$). Matrice de contiguïté (dont on déduira un dessin) :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Après une recherche exhaustive, il paraît que tous les graphes avec $1 < \#V < 6$ ont au moins deux automorphismes.