Corrigé Contrôle écrit iL01, Mathématiques Discrètes vendredi 22 octobre 2004
15h30–17h30

1. Soit $\pi = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&4&6&8&5&3&2&1\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{S}_8$.

a. Calculer $\mathrm{sg}(\pi)$ (la signature de π).

$\surd$ *$\pi = (1\ 7\ 2\ 4\ 8) \circ (3\ 6)$ donc $\mathrm{sg}(\pi) = (-1)^{5-1}(-1)^{2-1} = -1$.*

b. Calculer la permutation π^{127}.

$\surd$ *Avec $\rho = (1\ 7\ 2\ 4\ 8)$ et $\sigma = (3\ 6)$ (et donc $\pi = \rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$) on a que ρ^5 et σ^2 sont égaux à l'identité ; donc $\pi^{127} = (\rho\circ\sigma)^{127} = \rho^{127}\circ\sigma^{127} = (\rho^5)^{25}\circ\rho^2\circ(\sigma^2)^{63}\circ\sigma = \rho^2\circ\sigma = (1\ 2\ 8\ 7\ 4)\circ(3\ 6)$, ce qu'on peut aussi écrire $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&8&6&1&5&3&4&7\end{smallmatrix}\right)$.*

c. Soit $\pi' = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&2&8&3&1&7&4&6\end{smallmatrix}\right)$. Est-ce qu'il existe $\sigma \in \mathbf{S}_8$ tel que $\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1} = \pi'$? Si votre réponse est « oui », donner un exemple, si elle est « non », donner une raison.

$\surd$ *On a $\pi' = (1\ 5)\circ(3\ 8\ 6\ 7\ 4) = (3\ 8\ 6\ 7\ 4)\circ(1\ 5)$. On a les cycles des mêmes longueurs que π, donc la réponse est « oui » ; on peut prendre par exemple $\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1&7&2&4&8&3&6&5\\3&8&6&7&4&1&5&2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&6&1&7&2&5&8&4\end{smallmatrix}\right)$.*

2. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit p_n le nombre de permutations $\pi \in \mathbf{S}_{2n}$ dont la décomposition en cycles disjoints est constituée de n 2-cycles (autrement dit, π est un conjugué de $(1\ 2)\circ(3\ 4)\circ(5\ 6)\circ\cdots\circ(2n-1\ 2n)$).

a. Donner une relation de récurrence pour p_n (la valeur initiale étant $p_0 = 1$).

$\surd$ *L'image π_{2n} du dernier élément $2n$ est un nombre $i \in [2n-1]$ et on aura alors aussi $\pi_i = 2n$. Sur les $2n-2$ éléments restants $[2n] \setminus \{i, 2n\}$, on aura le même type de permutation, un nombre de p_{n-1} possibilités. Donc $p_n = (2n-1)p_{n-1}$.*

b. Exprimer p_n comme un produit de nombres entiers.

$\surd$ *La récurrence du point précédent se résout directement par $p_n = \prod_{i=1}^{n}(2i-1)$*

c. Donner une expression pour p_n en termes de nombres factoriels (donc on pourra utiliser des expressions telles que $(2n)!$, ainsi que des opérations arithmétiques, mais pas le symbole « $\prod$ »).

$\surd$ $\prod_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)\prod i=1^n(2i)}{\prod_{i=1}^{n}(2i)} = \frac{\prod_{i=1}^{2n} i}{2^n\prod_{i=1}^{n} i} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$. *Ce résultat découle aussi de la formule générale pour la taille d'une classe de conjugaison, donnée dans le cours).*

3. On rappelle la notation $[n] = \{\, i \in \mathbf{N} \mid 1 \le i \le n \,\}$ pour $n \in \mathbf{N}$. Déterminer le nombres suivants.

a. $\#\{\, (a_1, \ldots, a_k) \in [n]^k \mid a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_k \,\}$, pour $n, k \in \mathbf{N}$.

$\surd$ *C'est le nombre de fonctions faiblement décroissantes $[k] \to [n]$, qui est égal (par renversement de la suite) au nombre de fonctions faiblement croissantes : $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$.*

b. $\#\{\, (X, Y) \in \mathcal{P}([9])^2 \mid \#X = 5, \#Y = 7, \#(X \cap Y) = 3 \,\}$

$\surd$ *Les trois ensembles $X \cap Y$, $X \setminus Y$ et $Y \setminus X$ sont disjoints et ont respectivement 3, 2, et 4 éléments, ce qui épuise les 9 éléments de $[9]$. Donc la réponse est le nombre de partitions de 9 en trois parties de taille 3, 2, 4, quel nombre est $\frac{9!}{3!2!4!} = 1260$ (ce nombre s'écrit aussi par exemple comme $\binom{9}{5}\binom{5}{3}$), suivant les $\binom{9}{5}$ manières de choisir X et les $\binom{5}{3}$ manières de choisir ensuite $X \cap Y$).*

c. $\sum_{X\in\mathcal{P}([n])}\binom{\#X}{2}$, pour $n \in \mathbf{N}$.

$\surd$ $\sum_{X\in\mathcal{P}([n])}\binom{\#X}{2} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{2} = \sum_{i=2}^{n}\frac{n!}{(n-i)!(i-2)!2!} = \binom{n}{2}\sum_{i=2}^{n}\binom{n-2}{i-2} = \binom{n}{2}2^{n-2}$. *On peut aussi trouver ce résultat en faisant d'abord l'observation que la somme compte l'ensemble $\{\, (X, Y) \mid X \in \mathcal{P}([n]), Y \in \binom{X}{2} \,\} = \{\, (X, Y) \mid Y \in \binom{[n]}{2}, Y \subseteq X \subseteq [n] \,\}$; dans la seconde forme il y a $\binom{n}{2}$ choix pour Y et 2^{n-2} choix pour le reste de X.*

d. $\#\{\, (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in [n]^5 \mid a_1 \le a_2 < a_3 < a_4 \le a_5 \,\}$, pour $n \in \mathbf{N}$.

$\surd$ *En ajoutant à $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ le vecteur $(0, 1, 1, 1, 2)$ on transforme la suite en une suite strictement croissante $a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 1 < a_4 + 1 < a_5 + 2$, dont tous les termes sont dans $[n+2]$; cette transformation est bijective vers de telles suites strictement croissantes, car soustraction de $(0, 1, 1, 1, 2)$ d'une telle suite donne un élément de l'ensemble compté. La réponse est donc le nombre $\binom{n+2}{5}$ de suites strictement croissantes de longueur 5 d'éléments de $[n+2]$.*

Fin.