Corrigé Examen iL01, Mathématiques Discrètes vendredi 17 décembre 2004
9h00–12h00

1. Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants, pour $n \in \mathbf{N}$.

a. $\{ X \in \mathcal{P}([n]) \mid \#X \geq 2 \}$.

$\surd$ *Des 2^n éléments de $\mathcal{P}([n])$ on exclut les $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n$ ensembles X avec $\#X \in \{0, 1\}$, et il reste $2^n - n - 1$ ensembles. Le raisonnement et la formule sont valables même pour des petites valeurs $n = 0, 1$ où l'ensemble indiqué est vide.*

b. $\{ (a, b, c) \in \mathbf{N}^3 \mid a + b + c = n \}$.

$\surd$ *Ce sont les compositions (faibles) de n en 3 parts ; leur nombre est $\left(\!\binom{3}{n}\!\right) = \binom{n+2}{n} = \binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.*

c. $\{ (S, T) \in \mathcal{P}([3n])^2 \mid \#S = \#T = n \ ; \ S \cap T = \emptyset \}$.

$\surd$ *C'est le coefficient « multinomial » $\binom{3n}{n,n,n}$ (c'est-à-dire le coefficient de $X^n Y^n Z^n$ dans $(X+Y+Z)^n$, qui est égal a $\frac{(3n)!}{(n!)^3}$. Vous pouvez le trouver en choisissant S de $\binom{3n}{n}$ manières et puis T de $\binom{2n}{n}$ manières, au total $\binom{3n}{n}\binom{2n}{n} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(3n)!}{n!n!n!}$.*

d. $\{ \pi \in \mathbf{S}_n \mid \mathrm{sg}(\pi) = -1 \}$ (ou $\mathrm{sg}(\pi)$ désigne la signature de la permutation π).

$\surd$ *Si au moins une permutation impaire existe dans $\mathbf{S}_n$, c'est-à-dire dès que $n \geq 2$, elles forment la moitié des permutations dans $\mathbf{S}_n$, car si $\sigma \in \mathbf{S}_n$ est impair, alors $\pi \mapsto \sigma \circ \pi$ définit une bijection des permutations paires vers des permutations impaires (la bijectivité découle de l'existence d'une application inverse $\pi \mapsto \sigma^{-1} \circ \pi$). Dans ces cas le nombre cherché est donc $\frac{n!}{2}$, et pour $n < 2$ le nombre est 0. Une formule qui est valable pour tout $n \in \mathbf{N}$ est $[n \geq 2] \frac{n!}{2}$.*

2. Soit $n \in \mathbf{N}$, et $Q_n = \{ \pi \in \mathbf{S}_n \mid \pi^4 = \mathrm{id} \}$.

a. Supposons que pour une permutation $\pi \in \mathbf{S}_n$ on a déterminé sa décomposition en cycles. Expliquer comment ceci permet de voir facilement si $\pi \in Q_n$ ou non.

$\surd$ *Pour que π^4, il faut et il suffit que tout cycle dans la décomposition ait une longueur qui divise 4 (comme les cycles de la décomposition commutent entre eux, on peut calculer π^4 en composant les puissances 4-èmes des cycles individuels). Par conséquent, il faut et il suffit qu'il n'y aie pas de cycles de longueurs autres que 2 et 4 (mais les orbites de taille 1 (des points fixes) sont autorisés; elles ne contribuent pas de cycles dans la décomposition en cycles).*

b. On définit la suite $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par $q_n = \#Q_n$ pour $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que cette suite vérifie la relation de récurrence $q_{n+1} = q_n + nq_{n-1} + n(n-1)(n-2)q_{n-3}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, avec la convention que $q_i = 0$ quand $i < 0$, et $q_0 = 1$.

$\surd$ *Pour une permutation $\pi \in Q_{n+1}$, le dernier élément $n+1$ est soit un point fixe, soit membre d'un 2-cycle, soit membre d'un 4-cycle. Dans le premier cas la restriction de π à $[n]$ peut être n'importe que élément de Q_n, dans les deux cas restants π est déterminé par le choix du cycle dont $n+1$ est membre, et par la restriction $\tilde{\pi}$ de π au complément de ce cycle, qui vérifiera $\tilde{\pi}^4 = \mathrm{id}$. Le nombre de choix pour un 2-cycle contenant $n+1$ est n (on choisit l'autre membre du cycle), et le nombre de choix pour un 4-cycle contenant $n+1$ est $n^{\underline{3}} = n(n-1)(n-2)$ (on choisit dans l'ordre successivement les trois éléments qui suivent $n+1$ dans son cycle). Ainsi on trouve que $q_{n+1} = q_n + nq_{n-1} + n^{\underline{3}}q_{n-3}$, ce qui avec la convention mentionnée est valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

c. On définit la série formelle $Q = \sum_{n \in \mathbf{N}} q_n \frac{X^n}{n!} \in \mathbf{Q}[[X]]$. Déduire de la relation du point b une équation différentielle que vérifie la série Q. [On pourra substituer la relation dans $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}Q$.]

$\surd$ *On a $X^k \sum_{n \in \mathbf{N}} q_n \frac{X^n}{n!} = \sum_{m \geq k} m^{\underline{k}} q_{m-k} \frac{X^m}{m!} = \sum_{n \in \mathbf{N}} n^{\underline{k}} q_{n-k} \frac{X^n}{n!}$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}Q = \sum_{n \in \mathbf{N}} q_{n+1} \frac{X^n}{n!}$, d'où la relation de récurrence, qui implique $\sum_{n \in \mathbf{N}} q_{n+1} \frac{X^n}{n!} = \sum_{n \in \mathbf{N}} (q_n + nq_{n-1} + n^{\underline{3}} q_{n-3}) \frac{X^n}{n!}$, se traduit par l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}Q = Q + XQ + X^3Q = (1 + X + X^3)Q$.*

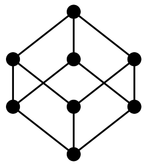
d. Donner une expression pour la série formelle Q (résoudre l'équation différentielle).

$\surd$ *Comme $Q[X := 0] = 1$, l'équation différentielle se résout par $Q = \exp(X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{4})$ (ici l'expression $G = X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{4}$ a été determinée par les conditions $G[X := 0] = 0$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(G) = 1 + X + X^3$).*

3. Pour $n \in \mathbf{N}$ on définit un graphe $G_n = (\mathcal{P}([n]), E)$ où $E = \{\, \{X, X \setminus \{x\}\} \mid X \in \mathcal{P}([n]), x \in X \,\}$.

a. Dessiner G_3.

$\surd$



b. Montrer que $\deg_{G_n}(X) = n$ pour tout $X \in \mathcal{P}([n])$.

$\surd$ *Une arête concernant X est soit de la forme $\{X, X \setminus \{x\}\}$ avec $x \in X$, soit de la forme $\{Y, Y \setminus \{y\}\}$ avec $X = Y \setminus \{y\}$ et $y \in Y$ donc $Y = X \cup \{y\} \neq X$. Il y a $\#X$ arêtes du premier type, et $\#([n] \setminus X) = n - \#X$ arêtes du second type, donc le total est toujours n.*

c. Montrer que G_n est un graphe connexe pour tout n.

$\surd$ *Il suffit d'établir un chemin d'un sommet quelconque X vers le sommet $\emptyset$, qu'on peut construire par l'algorithme suivant. En commençant avec $X' = X$, tandis que le sommet actuel X' n'est pas vide, on choisit un $x \in X'$ et on suit l'arête de X' vers $X' \setminus \{x\}$, et on replace X' par le nouveau sommet $X' \setminus \{x\}$. Comme la taille de l'ensemble X' diminue à chaque pas, le chemin se termine après $\#X$ pas au point $\emptyset$.*

d. Montrer que G_n est un graphe bipartite pour tout n.

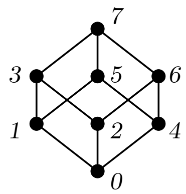
$\surd$ *On écrit $\mathcal{P}([n]) = V_0 \cup V_1$ où $V_i = \{\, X \in \mathcal{P}([n]) \mid \#X \equiv i \pmod 2 \,\}$. Il est clair qu'aucune arête ne relie deux sommets de V_0 ou deux sommets de V_1, donc G_n est un graphe bipartite.*

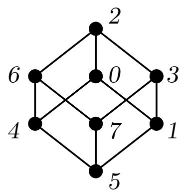
e. Pour quelles valeurs de n le graphe G_n est-il eulerien ?

$\surd$ *Un graphe connexe est eulerien si et seulement si les degrés de tous les sommets sont pairs. Comme tous les degrés des sommets de G_n sont n, ce graphe est eulerien si et seulement si n est pair.*

f. La différence symétrique de deux ensembles X, Y est définie par $X \,\Delta\, Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$. Indiquer la permutation des sommets de G_3 donnée par $X \mapsto X \,\Delta\, \{1, 3\}$. Montrer avec le dessin que c'est un automorphisme de G_3, c'est-à-dire un isomorphisme de graphes $G_3 \to G_3$.

$\surd$ *En numérotant chaque $X \in \mathcal{P}([3])$ par $\sum_{x \in X} 2^{x-1}$, la permutation devient $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. C'est une rotation par 180° si l'on réalise G_3 comme le graphe d'un cube. Dans les dessin ci-dessous, où on a appliqué la permutation aux étiquettes des sommets, on voit bien que les mêmes paires de nombres sont liées par des arêtes.*





g. Montrer que pour tout $S \in \mathcal{P}([n])$ fixé, l'opération $X \mapsto X \,\Delta\, S$ est un automorphisme de G_n.

$\surd$ *L'opération est une bijection, et même son propre inverse, car $(X \,\Delta\, S) \,\Delta\, S = X$. On va montrer que pour une arête $\{X, X \setminus \{x\}\}$ de G, on a aussi que $\{X \,\Delta\, S, (X \setminus \{x\}) \,\Delta\, S\}$ est une arête de G_n. Pour $y \neq x$ on voit facilement que $y \in X \,\Delta\, S \iff y \in (X \setminus \{x\}) \,\Delta\, S$, donc la seule différence possible entre les ensembles $X \,\Delta\, S$ et $(X \setminus \{x\}) \,\Delta\, S$ est la présence de x. Si $x \notin S$, alors $x \in X \,\Delta\, S$ et $x \notin (X \setminus \{x\}) \,\Delta\, S$, donc dans ce cas $(X \setminus \{x\}) \,\Delta\, S = (X \,\Delta\, S) \setminus \{x\}$. Si par contre $x \in S$, alors $x \notin X \,\Delta\, S$ et $x \in (X \setminus \{x\}) \,\Delta\, S$, donc $X \,\Delta\, S = ((X \setminus \{x\}) \,\Delta\, S) \setminus \{x\}$ dans ce cas. Dans les deux cas on a montré que $\{X \,\Delta\, S \;,\; (X \setminus \{x\}) \,\Delta\, S\} = \{(X \setminus \{x\}) \,\Delta\, S \;,\; X \,\Delta\, S\}$ est une arête de G_n.*

4. On appellera «ensemble pondéré» un ensemble E muni d'une application de «poids» $P_E : E \to \mathbf{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'ensemble $P_E^{-1}(n) = \{\, x \in E \mid P_E(x) = n \,\}$ soit fini. La série génératrice d'un ensemble pondéré E est $S_E \in \mathbf{Z}[[X]]$ défini par

$$S_E = \sum_{x \in E} X^{P_E(x)} = \sum_{n \in \mathbf{N}} \#P_E^{-1}(n) X^n.$$

a. Soient E, F deux ensembles pondérés. On munit $E \times F$ du poids $P_{E\times F} : E \times F \to \mathbf{N}$ défini par $P_{E\times F}(x,y) = P_E(x) + P_F(y)$. Montrer que le produit cartésien $E \times F$ devient ainsi un ensemble pondéré, et que sa série génératrice $S_{E\times F}$ vérifie $S_{E\times F} = S_E S_F$.

√ *$P_{E\times F}^{-1}(n) = \{\, (x,y) \mid P_E(x) + P_F(y) = n \,\} = \bigcup_{i=0}^{n} P_E^{-1}(i) \times {P_F}^{-1}(n-i)$, ce qui est fini pour tout n, donc $E \times F$ est un ensemble pondéré. En plus on voit que le coefficient de X^n dans $S_{E\times F}$ est la somme des produits des coefficients de X^i dans S_E et de X^{n-i} dans S_F, donc $S_{E\times F} = S_E S_F$.*

b. Soit $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite d'entiers naturels définis par $c_n = \#\{\, (a,b) \in \mathbf{N}^2 \mid 2a + 3b = n \,\}$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n X^n = \frac{1}{(1-X^2)} \cdot \frac{1}{(1-X^3)}$ dans $\mathbf{Z}[[X]]$. [Appliquer le point *a.*]

√ *Si l'on prend $E = \mathbf{N}$ pondéré par $p_E(a) = 2a$, alors $S_E = \sum_{i\in\mathbf{N}} X^{2i} = \frac{1}{1-X^2}$ dans $\mathbf{Z}[[X]]$. De même pour $F = \mathbf{N}$ pondéré par $p_F(b) = 3b$ on aura $S_F = \frac{1}{1-X^3}$. Donc $S_{E\times F} = \frac{1}{(1-X^2)} \cdot \frac{1}{(1-X^3)}$ d'après le point a, où $E \times F$ est $\mathbf{N}^2$ pondéré par $P_{E\times F}(a,b) = 2a + 3b$, et $c_n = \#P_{E\times F}^{-1}(n)$.*

c. L'expression trouvée dans le point b ne permet pas de trouver facilement une formule pour c_n, mais elle permet un calcul rapide des termes initiaux de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n X^n$. Déterminer ses 16 premiers termes (c'est-à-dire calculer $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n X^n$ modulo X^{16}).

√ *On multiplie $\frac{1}{(1-X^2)} = 1 + X^2 + X^4 + X^6 \cdots$ par $\frac{1}{(1-X^3)} = 1 + X^3 + X^6 + X^9 \cdots$, ce qui donne $1 + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + 2X^6 + X^7 + 2X^8 + 2X^9 + 2X^{10} + 2X^{11} + 3X^{12} + 2X^{13} + 3X^{14} + 3X^{15} + \cdots$.*

d. De combien de façons différentes peut-on faire un montant de 0,50 avec des pièces de 0,50, de 0,20, de 0,10 et de 0,05, si l'on dispose d'un stock illimité de chaque pièce ? Et combien si l'on dispose également de pièces de 0,02 ?

√ *On calcule successivement nombres en augmentant le répertoire des pièces disponibles, du plus grand au plus petit (cet ordre n'est pas obligatoire, mais limite le plus la taille des expansions intermédiaires). Pour cela, on développe les fractions suivantes en série, en calculant modulo X^{51}.*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-X^{50})} &\equiv 1 + X^{50} \\
\frac{1}{(1-X^{50})(1-X^{20})} &\equiv 1 + X^{20} + X^{40} + X^{50} \\
\frac{1}{(1-X^{50})(1-X^{20})(1-X^{10})} &\equiv 1 + X^{10} + 2X^{20} + 2X^{30} + 3X^{40} + 4X^{50} \\
\frac{1}{(1-X^{50})(1-X^{20})(1-X^{10})(1-X^{5})} &\equiv 1 + X^{5} + 2X^{10} + 2X^{15} + 4X^{20} + 4X^{25} \\
&\qquad + 6X^{30} + 6X^{35} + 9X^{40} + 9X^{45} + 13X^{50},
\end{aligned}$$

d'où le nombre cherché est 13. Si l'on admet aussi les pièce de 0,02, il faut encore multiplier par $\frac{1}{1-X^2} = 1 + X^2 + X^4 + X^6 \cdots$, et le coefficient de X^{50} sera la somme des coefficients dans le résultat précédent de tous les monômes de la forme X^{50-2i}, c'est-à-dire $13 + 9 + 6 + 4 + 2 + 1 = 35$.

Fin.