Examen Géométrie Élémentaire (L2) mardi 15 mai 2018
14h-16h

Les documents et l'utilisation d'appareils électroniques ne sont pas autorisées.

Les 5 parties sont indépendantes.

Notations utilisées : $\mathcal{D}_{A,B}$ est la droite passant par les points A et B, le point $\mathrm{bar}(A,B)$ est l'isobarycentre (milieu) de A et B, et (dans un espace euclidien) $\overline{AB}$ est la distance entre A et B.

Pour résoudre des questions géométriques, vous pouvez (si cela vous semble utile) choisir un repère adapté à la situation de la question, et traduire la question en termes de coordonnées par rapport à ce repère.

1. On considère un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{O}'$ le point dont les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ sont $(3, -5, 2)$, et soient $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - \vec{k}$, et $\vec{w} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$, alors $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un autre repère cartésien (on l'admet). Si les coordonnées d'un point P par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont $(2, -3, 4)$, quelles sont ses coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$?

2. Dans $\mathbf{R}^2$, qu'on considère ici comme un plan affine, soient A, B, C, D les sommets du carré unité, c'est-à-dire $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$, et $D = (0,1)$.

a. Déterminer le point L d'intersection des droites $\mathcal{D}_{A,C}$ et $\mathcal{D}_{B,E}$, où $E = \mathrm{bar}(A,D)$.

b. Montrer que les points $F = \mathrm{bar}(A,B)$, L, et D sont alignés.

c. Monter plus généralement que pour un parallélogramme A, B, C, D dans un plan affine, les points $F = \mathrm{bar}(A,B)$, le point L d'intersection des droites $\mathcal{D}_{A,C}$ et $\mathcal{D}_{B,\mathrm{bar}(A,D)}$ et le point D sont alignés.

3. Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension 3, muni d'un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Décrire concrètement (par une équation en coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$, ou par une forme paramétrique, selon votre préférence) le plan médiateur entre les points A et B, où A est le point aux coordonnées $(3, 1, 4)$, et B le point aux coordonnées $(5, -3, -2)$ (toujours par rapport à $\mathcal{R}$).

4. Dans un plan affine, un triangle de sommets A, B, C est donné, ainsi qu'un nombre réel $\lambda > 1$. On considère l'homothétie h de centre A et de facteur λ, et on pose $B' = h(B)$ et $C' = h(C)$. Ainsi les points B, C, C', B' forment les côtés d'un trapèze dont $\mathcal{D}_{B,C}$ et $\mathcal{D}_{B',C'}$ sont les côtés parallèles, et dont les deux autres côtés $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ se coupent en A.

a. Montrer que le point A et les milieux $\mathrm{bar}(B,C)$ et $\mathrm{bar}(B',C')$ sont alignés.

b. Soit P le point d'intersection des diagonales $\mathcal{D}_{B,C'}$ et $\mathcal{D}_{B',C}$ du trapèze. Montrer que P se trouve aussi sur la droite passant par A, $\mathrm{bar}(B,C)$ et $\mathrm{bar}(B',C')$ (celle de la question *a*).

5. On se place dans un plan euclidien $\mathcal{P}$, où sont donné deux points distincts A, B. On cherche à décrire l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{\, P \in \mathcal{P} \mid (\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{BP}) \perp (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}) \,\}$$

(ici « $\perp$ » désigne la relation d'orthogonalité entre deux vecteurs).

a. On pose $\vec{p} = \overrightarrow{AP}$; traduire la condition $P \in \mathcal{C}$ en une équation dans laquelle $\vec{p}$ est l'unique inconnue (les autres quantités dans l'équation ne peuvent donc pas dépendre du point P).

b. On suppose maintenant que la distance $\overline{AB}$ est 4. Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle, dont on déterminera le centre et le rayon. [Indication : on pourra choisir un repère euclidien adapté à la situation et écrire l'équation en termes de coordonnées de $P \in \mathcal{C}$ par rapport à ce repère.]

Fin.