Contrôle continu Géométrie Élémentaire (L2) lundi 6 mars 2017
8h30-9h30

Les quatre parties sont indépendantes

1. On considère un plan affine $\mathcal{E}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$. Soit $\mathcal{O}'$ le point de coordonnées $(4, -7)$ par rapport à $\mathcal{R}$, et soient $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, et $\vec{v} = -3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$. Alors $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', (\vec{u}, \vec{v}))$ est un autre repère cartésien de $\mathcal{E}$ (on l'admet).

a. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ du point P dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont $(-5, 1)$.

b. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}'$ du point Q dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$ sont $(3, -4)$.

2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}))$. Comme d'habitude on désigne par x, y, z les trois coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$. On définit deux plans affines $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ par les équations $\mathcal{P}_1 : 3x - 5y + 2z = 4$ et $\mathcal{P}_2 : x + 3y - 4z = 7$.

a. Argumenter que les deux plans sont sécants (c'est-à-dire leur intersection est une droite ; on ne demande pas de trouver cette droite).

b. Déterminer une équation pour le plan qui contient la droite d'intersection $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ des deux plans, ainsi que le point A dont les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ sont $A_{\mathcal{R}} = (1, -4, -2)$. [Indication: si l'on forme une combinaison linéaire des équations de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_2$, l'équation ainsi obtenue sera toujours vérifiée pour tous les points de l'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. On pourra chercher une telle équation qui en plus soit vérifiée pour le point A.]

3. Dans un plan euclidienne muni d'un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$, déterminer la distance entre le point P de coordonnées $(2, 5)$ par rapport à $\mathcal{R}$, et la droite $\mathcal{D} = \{\, \mathcal{O} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \mid 3x - 4y - 6 = 0 \,\}$.

4. Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension 3, $\mathcal{O}$ un point de $\mathcal{E}$. On note le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

a. Si on fixe un vecteur non nul $\vec{n}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et une constante $c \in \mathbf{R}$, quelle est la nature de l'ensemble de points $\mathcal{S} = \{\, A \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{\mathcal{O}A} \cdot \vec{n} = c \,\}$?

b. Si $B \notin \mathcal{S}$ et P est point d'intersection de $\mathcal{S}$ avec la droite $\{\, B + \lambda\vec{n} \mid \lambda \in \mathbf{R} \,\}$, montrer que P est plus proche de B que tout autre point de $\mathcal{S}$.

c. Montrer que la distance de B à l'ensemble $\mathcal{S}$, qui d'après la question précédente est égale à la distance entre B et P, est donnée par

$$\frac{|\overrightarrow{\mathcal{O}B} \cdot \vec{n} - c|}{\|\vec{n}\|}.$$

Fin.