Corrigé Contrôle continu Géométrie Élémentaire (L2) lundi 6 mars 2017
8h30-9h30

1. On considère un plan affine $\mathcal{E}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$. Soit $\mathcal{O}'$ le point de coordonnées $(4, -7)$ par rapport à $\mathcal{R}$, et soient $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$, et $\vec{v} = -3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$. Alors $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', (\vec{u}, \vec{v}))$ est un autre repère cartésien de $\mathcal{E}$ (on l'admet).

a. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ du point P dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont $(-5, 1)$.

$\surd$ *On a* $P = \mathcal{O}' - 5\vec{u} + \vec{v} = \mathcal{O} + 4\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} - 5(2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}) + (-3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}) = \mathcal{O} - 9\vec{\imath} + 14\vec{\jmath}$ *donc les coordonnées demandées sont* $(-9, 14)$.

b. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}'$ du point Q dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$ sont $(3, -4)$.

$\surd$ *Pour cette conversion il est utile d'exprimer d'abord* $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ *en termes de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$*, ce qu'on peut faire en formant des combinaisons des équation définissant* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *; on a* $\vec{\imath} = 2\vec{u} + \vec{v}$ *et* $\vec{\jmath} = \vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$*. Alors on calcule* $Q = \mathcal{O} + 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} = \mathcal{O}' - 4\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} = \mathcal{O}' - \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} = \mathcal{O}' - (2\vec{u} + \vec{v}) + 3(\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}) = \mathcal{O}' + \vec{u} + \vec{v}$ *et les coordonnées cherchées sont* $(1, 1)$.

2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}))$. Comme d'habitude on désigne par x, y, z les trois coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$. On définit deux plans affines $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ par les équations $\mathcal{P}_1 : 3x - 5y + 2z = 4$ et $\mathcal{P}_2 : x + 3y - 4z = 7$.

a. Argumenter que les deux plans sont sécants (c'est-à-dire leur intersection est une droite ; on ne demande pas de trouver cette droite).

$\surd$ *Les premiers membres* $3x - 5y + 2z$ *et* $x + 3y - 4z$ *de ces équations ne sont pas proportionnels, donc les équations définissent deux plans affines non parallèles dans* $\mathcal{E}$ *(et en particulier non confondus). De tels plans sont sécants. (Le système des de équations aura une solution générale à un paramètre, qui décrit donc une droite affine.)*

b. Déterminer une équation pour le plan qui contient la droite d'intersection $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ des deux plans, ainsi que le point A dont les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ sont $A_{\mathcal{R}} = (1, -4, -2)$. [Indication: si l'on forme une combinaison linéaire des équations de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_2$, l'équation ainsi obtenue sera toujours vérifiée pour tous les points de l'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. On pourra chercher une telle équation qui en plus soit vérifiée pour le point A.]

$\surd$ *Chaque point de* $\mathcal{D}$ *vérifiera l'équation la combinaison linéaire des deux équations de* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$ *avec coefficients* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ *quelconques, c'est-à-dire* $(3\lambda + \mu)x + (-5\lambda + 3\mu)y + (2\lambda - 4\mu)z = 4\lambda + 7\mu$*. Pour que cette combinaison linéaire définisse un plan contenant le point* A*, il faut que* $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ *et l'équation doit être vérifiée pour* $x = 1, y = -4, z = -2$*. Cette dernière condition donne après substitution* $19\lambda - 3\mu = 4\lambda + 7\mu$ *ou* $15\lambda = 10\mu$*, donc on pourra prendre par exemple* $\lambda = 3$ *et* $\mu = 2$*. Cela donne l'équation* $9x - y - 8z = 29$*.*
Il n'était pas nécessaire de trouver une description plus explicite de $\mathcal{D}$*, mais pour ceux qui l'ont cherchée , une telle description est* $\mathcal{D} = \{\, P + \lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbf{R} \,\}$ *avec* $P_{\mathcal{R}} = (\frac{47}{14}, \frac{17}{14}, 0)$ *et* $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$*.*

3. Dans un plan euclidienne muni d'un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$, déterminer la distance entre le point P de coordonnées $(2, 5)$ par rapport à $\mathcal{R}$, et la droite $\mathcal{D} = \{\, \mathcal{O} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \mid 3x - 4y - 6 = 0 \,\}$.

$\surd$ *L'équation de* $\mathcal{D}$ *s'écrit* $\{\, \mathcal{O} + \vec{v} \mid \vec{v} \cdot \vec{n} - 6 = 0 \,\}$ *où* $\vec{n} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ *est un vecteur normal de* $\mathcal{D}$*. La distance entre* P *et* $\mathcal{D}$ *est celle entre* P *et le point* $Q \in \mathcal{D}$ *le plus proche de* P*, qui est tel que* $\overrightarrow{PQ} \perp \mathcal{D}$*, et donc* $\overrightarrow{PQ} = \lambda\vec{n}$ *pour un certain* $\lambda \in \mathbf{R}$*. On pose donc* $Q = P + \lambda\vec{n}$*, et la condition* $Q \in \mathcal{D}$ *donne* $3(2 + 3\lambda) - 4(5 - 4\lambda) - 6 = 0$ *ce qui se simplifie à* $25\lambda - 20 = 0$ *et qui a pour solution* $\lambda = \frac{4}{5}$*. La distance cherchée est* $d(P, P + \lambda\vec{n}) = \|\lambda\vec{n}\| = |\lambda|\,\|\vec{n}\| = \frac{4}{5}5 = 4$*.*
Une autre possibilité est de prendre l'expression $3x - 4y - 6$ *qui figure dans la définition de* $\mathcal{D}$*, l'évaluer dans les coordonnées du point* P*, c'est-à-dire pour* $x = 2$ *et* $y = 5$*, prendre la valeur absolue, et diviser par la norme du "vecteur normal"* $\vec{n} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ *; cela est argumenté dans l'exercice suivant (en dimension 3, mais cela ne change rien à l'argument). On trouve alors* $\frac{|3\times 2 - 4\times 5 - 6|}{5} = \frac{20}{5} = 4$*.*
Le point Q *a coordonnées* $Q_{\mathcal{R}} = (2, 5) + \frac{4}{5}(3, -4) = \frac{1}{5}(22, 9)$*. Bien qu'il n'est pas nécessaire de les calculer, on peut le faire et trouver la distance 4 par un calcul un peu plus compliqué que dans les méthodes précédentes. une méthode encore plus compliqué (qui bizarrement est celle qu'ont choisi la plupart des étudiants) est de décrire les points* Q *tels que* $\overrightarrow{PQ} \perp \mathcal{D}$ *non pas comme droite paramétrée, mais par une équation* $(4x + 3y = 23)$ *et de trouver les coordonnées de* Q *en résolvant le système d'équations en* x, y *formé de cette équation et celle définissant* $\mathcal{D}$*. L'intérêt principal est une plus ample occasion de faire des erreurs de calcul.*

4. Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension 3, $\mathcal{O}$ un point de $\mathcal{E}$. On note le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

a. Si on fixe un vecteur non nul $\vec{n}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et une constante $c \in \mathbf{R}$, quelle est la nature de l'ensemble de points $\mathcal{S} = \{\, A \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{\mathcal{O}A} \cdot \vec{n} = c \,\}$?

$\surd$ *Il s'agit d'un plan affine avec $\vec{n}$ comme vecteur normal.*

b. Si $B \notin \mathcal{S}$ et P est point d'intersection de $\mathcal{S}$ avec la droite $\{\, B + \lambda\vec{n} \mid \lambda \in \mathbf{R} \,\}$, montrer que P est plus proche de B que tout autre point de $\mathcal{S}$.

$\surd$ *Soit $P = B + \lambda\vec{n} \in_S$ et $Q \in \mathcal{S}$ un autre point. Puisque $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0$ on peut appliquer le théorème de Pythagore qui donne $\|\overrightarrow{BQ}\|^2 = \|\overrightarrow{BP}\|^2 + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 > \|\overrightarrow{BP}\|^2$, donc (en prenant la racine carrée) la distance $\|\overrightarrow{BQ}\|$ de Q à B est plus grande que la distance $\|\overrightarrow{BP}\|$ de P à B.*

c. Montrer que la distance de B à l'ensemble $\mathcal{S}$, qui d'après la question précédente est égale à la distance entre B et P, est donnée par

$$\frac{|\overrightarrow{\mathcal{O}B} \cdot \vec{n} - c|}{\|\vec{n}\|}.$$

$\surd$ *Puisque $P \in \mathcal{S}$ on a $\overrightarrow{\mathcal{O}P} \cdot \vec{n} = c$ et $\overrightarrow{PB} \perp \vec{n}$, on a $\overrightarrow{\mathcal{O}B} \cdot \vec{n} - c = (\overrightarrow{\mathcal{O}P} + \overrightarrow{PB}) \cdot \vec{n} - c = \overrightarrow{PB} \cdot \vec{n}$, et avec $\overrightarrow{BP} = \lambda\vec{n}$ cela donne $\overrightarrow{\mathcal{O}B} \cdot \vec{n} - c = -\lambda\|\vec{n}\|^2$. Alors la fraction dans la question devient $\frac{|\lambda|\,\|\vec{n}\|^2}{\|\vec{n}\|} = \|\lambda\vec{n}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$, la distance de P à B.*

Fin.