Contrôle continu Espaces euclidiens et hermitiens (L2PR) mercredi 3 mars 2021
10h30–12h30

L'utilisation de documents ou de tout appareil électronique est interdite. Dans vos réponses aux questions autres que la question de cours, vous pouvez citer et utiliser sans démonstration tout résultat du cours ou des TD. Les 4 parties sont indépendantes.

1. *Questions de cours.* Soit E un espace euclidien.

a. Donner la définition d'un endomorphisme orthogonal de E.

b. Donner une formule pour la projection orthogonale sur un sous-espace V de E, en termes de données (de votre choix) qui décrivent V.

c. Montrer que, si ϕ est un endomorphisme diagonalisable de E dont les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, alors ϕ est un endomorphisme symétrique.

2. Soit E un espace euclidien. On rappelle que pour $v \in E$ on a défini $v^\perp = \{ w \in E \mid v \perp w \}$.

a. Montrer (en établissant des inclusions dans les deux sens) que $(v^\perp)^\perp = \operatorname{Vect}(v)$.

b. Montrer plus généralement pour $v_1, \ldots, v_k \in E$ que $(v_1^\perp \cap \cdots \cap v_k^\perp)^\perp = \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$.

3. Soit $E = \mathbf{R}[X]_{<4}$ le $\mathbf{R}$-espace des polynômes de degré inférieur à 4. Sur E on définit la forme bilinéaire φ par

$$\varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^{4} P[i]Q[i]$$

où $P[a]$ pour $a \in \mathbf{R}$ désigne le résultat de substituer $X = a$ dans P.

a. En admettant que φ est une forme bilinéaire, montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.

b. Déterminer la matrice de la restriction de φ au sous-espace $F = \operatorname{Vect}(1, X, X^2)$, par rapport à la base $[1, X, X^2]$ de F.

c. Soit $V = \operatorname{Vect}(1, X)$; montrer que parmi les vecteurs $v \in V$, la valeur $\varphi(X^2 - v, X^2 - v)$ est minimale quand v est égale à la projection orthogonale v_0 de X^2 sur V.

d. Trouver cette valeur minimale de $\varphi(X^2 - v_0, X^2 - v_0)$, et détailler le vecteur (polynôme) $v_0 \in \operatorname{Vect}(1, X)$ pour lequel cette valeur est obtenue.

4. Dans $E = \mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, considérons les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (0, -1, -4, 1)$ et $v_3 = (-2, -5, 4, 1)$; on pose $V = \operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

a. Donner une base du sous-espace $V^\perp$.

b. Trouver une base orthonormée $[b_1, b_2, b_3, b_4]$ de F adaptée à la décomposition $E = V \oplus V^\perp$, donc avec $[b_1, b_2, b_3]$ une base orthonormée de V et $[b_4]$ une base orthonormée de $V^\perp$.

c. Décrire, pour un vecteur $w = (x, y, z, t)$ quelconque de E, ses projections orthogonales w_1 sur V et w_2 sur $V^\perp$, c'est-à-dire donner $w_1 \in V$ et $w_2 \in V^\perp$ tels que $w = w_1 + w_2$. [Comme les expressions explicites en termes de x, y, z, t peuvent être compliquées, il peut être pratique de les représenter sous forme d'une matrice opérant par multiplication sur le vecteur w.]

Fin.