CC 2 (combinatoire) Combinatoire et Géométrie (L2) mardi 5 novembre 2019
9h00-10h00

Les documents et l'utilisation d'une calculatrice (ou de tout appareil électronique) sont interdits.

La notation $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X.

Barème indicatif : partie **1**: 6 points ; partie **2**: 8 points ; partie **3**: 6 points + 2 points bonus.

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $X \supset Y$, (c'est-à-dire $X \supseteq Y$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $X \supseteq Y$».

On remarque que ces possibilités sont mutuellement exclusives, donc toute réponse qui consiste à choisir plus d'une option est forcément fausse. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{\{0,6\},\{2,8\},\{4,10\}\}$, et $Y = \{\{0,4,8\},\{2,6,10\}\}$.
b. $X = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\,\}$ et $Y = \{\,(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in \mathbf{R}\,\}$.
c. $X = \{\,3m \mid m \in \mathbf{Z}\,\}$, et $Y = \{\,2n \mid n \in X\,\}$ [à noter: la définition de Y utilise l'ensemble X].
d. $X = \{\,\{\,x \in I \mid x \leq a\,\} \mid a \in I\,\}$, et $Y = \{\,A \in \mathcal{P}(I) \mid \forall x \in I : \forall y \in A : (x < y \to x \in A)\,\}$, où I désigne l'intervalle $\{1,2,3\}$ de $\mathbf{N}$.
e. $X = [0,\pi] = \{\,x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq \pi\,\}$, et $Y = \{\,x \in \mathbf{R} \mid \sin x \geq 0\,\}$.
f. $X = \mathbf{R}_{\geq 0} = \{\,x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\,\}$ et $Y = \operatorname{Im}(f)$, l'image de l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par $f : x \mapsto x^2 + x + 1$.

2. Chacune des relations suivantes (définie sur l'ensemble X indiqué) est réflexive et transitive (on l'admet). Indiquer s'il s'agit d'une relation d'équivalence, s'il s'agit d'une relation d'ordre partiel et s'il s'agit d'une relation d'ordre total (plus d'une des trois options peut s'appliquer, ou aucune).

a. Sur $X = \{\,A \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}) \mid \#A \in \mathbf{N}\,\}$ (l'ensemble des parties finies de $\mathbf{Z}$), la relation d'inclusion "$\subseteq$".
b. Sur $X = \{\,\mathbf{N}_{<n} \mid n \in \mathbf{N}\,\}$ où $\mathbf{N}_{<n} = \{\,x \in \mathbf{N} \mid x < n\,\}$ (l'ensemble des parties initiales finies de $\mathbf{N}$), la relation d'inclusion "$\subseteq$".
c. Sur $X = \mathbf{C}$ la relation $x \mathrel{\mathcal{R}} y \iff |x| \leq |y|$.
d. Sur $X = \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\})$ (l'ensemble parties de $\mathbf{N}_{<10}$), la relation d'équipotence: $A \mathrel{\mathcal{R}} B \iff \#A = \#B$.

3. On considère sur l'ensemble $X = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \neq 0\,\}$ la relation $\sim$ d'être un multiple scalaire: $(x,y) \sim (x',y') \iff \exists \lambda \in \mathbf{R}_{\neq 0} : (x,y) = (\lambda x', \lambda y')$.

a. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur X.
b. Soit $Q = X/{\sim}$ l'ensemble quotient pour cette relation d'équivalence, et pour chaque $(x,y) \in X$ soit $C((x,y)) \in Q$ la classe d'équivalence à laquelle appartient (x,y). Montrer qu'on peut définir une application $f : Q \to \mathbf{R}$ par $f : C((x,y)) \mapsto \frac{y}{x}$ pour tout $(x,y) \in X$.
c. [bonus] Montrer que f est une bijection $Q \to \mathbf{R}$.

Fin.