Corrigé Examen terminal Combinatoire (L2) mercredi 10 janvier 2018
14h00-16h00

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $X \supset Y$, (c'est-à-dire $X \supseteq Y$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $X \supseteq Y$».

Ces possibilités étant mutuellement exclusives, toute réponse qui consiste à choisir plus d'une seule option est fausse. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{\, x \in \mathbf{R} \mid \sin(x) \geq \frac{1}{2} \,\}$ et $Y = [\frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi]$ (un intervalle fermé de $\mathbf{R}$).

$\surd$ *Pour chaque $x \in Y$ on a $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ et donc $x \in X$, d'où $Y \subseteq X$. Mais $X \neq Y$ car X contient aussi les translatés de l'intervalle Y par des multiples de 2π. Donc C.*

b. $X = \{\, \{n, \frac{n^2-n}{2}\} \mid n \in \{0,1,2,3,4\} \,\}$ et $Y = \{\{3\},\{6,4\},\{0,1\},\{0\},\{2,1\}\}$

$\surd$ *En calculant les éléments de X et en réduisant les paires à deux éléments identiques $\{a,a\} = \{a\}$, on trouve (dans un autre ordre) tous les éléments de Y : A.*

c. $X = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x < 6y + 3 \,\}$, et $Y = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \,\}$.

$\surd$ *On a $X \subset Y$ car $4x < 6y + 3 \iff y > \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \Rightarrow y \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$, mais $X \neq Y$ (par exemple $(0, -\frac{1}{2}) \in Y \setminus X$. Réponse B.*

d. $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $Y = f^{-1}(A \cup B)$ (ici $f^{-1}(S)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble S par f), où $A = [0,1]$ et $B = [3,4]$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$.

$\surd$ *On a toujours $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = \{\, x \mid f(x) \in A$ ou $f(x) \in B \,\} = f^{-1}(A \cup B)$, donc A.*

e. $X = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \,\}$ et $Y = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \leq 1 \,\}$.

$\surd$ *Aucune inclusion, par exemple $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \in X \setminus Y$ et $(1,-1) \in Y \setminus X$. Donc D*

2. Dans un jeu de 32 cartes, avec 4 «couleurs» et 8 «valeurs», on sélectionne une «main» de 5 cartes ; l'ordre des cartes dans une main est ignoré.

a. Combien de mains différentes y a-t-il ?

$\surd$ $\binom{32}{5}$, *qui vaut* 201376

b. Parmi ces mains, quel est le nombre de mains dont les cartes ont 5 valeurs distinctes ?

$\surd$ *On peut choisir les 5 valeurs de $\binom{8}{5} = 56$ manières, et pour chaque choix on peut attribuer des couleurs aux valeurs de $4^5 = 1024$ manières. Au total on a $56 \times 1024 = 57344$ mains.*

c. Quelle est la probabilité qu'une main choisie au hasard (avec probabilité uniforme) contienne 3 cartes d'une même valeur et 2 d'une autre valeur (appelée «main pleine» ou «full house») ?

$\surd$ *Une telle main est déterminée par les deux valeurs concernées, dans l'ordre ($8 \times 7 = 56$ possibilités), pour la première valeur un choix de 3 parmi les 4 couleurs ($\binom{4}{3} = 4$ possibilités), et la seconde valeur un choix de 2 parmi les 4 ($\binom{4}{2} = 6$ possibilités) ; au total $56 \times 4 \times 6 = 1344$. La probabilité est $\frac{1344}{201376} = \frac{6}{899} \approx 0.0067$.*

3. Pour deux évènements A, B définis sur une espace probabilisé, il est donné que $\Pr(A) = 0{,}7 = \Pr(B)$, et que $\Pr(A \mid B) = 0{,}6$. Calculer la probabilité $\Pr(A^c \cap B^c)$ qui ni A ni B se produise (ici A^c désigne l'événement complémentaire de A). Est-ce que A et B sont des évènements indépendants ?

$\surd$ *Puisque $\Pr(A \mid B) = \Pr(A \cap B)/\Pr(B)$ on trouve $\Pr(A \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$. Ensuite $\Pr(A \cap B^c) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) = 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}28$, et pareillement $\Pr(A^c \cap B) = 0{,}28$, et il reste $\Pr(A^c \cap B^c) = 1 = 0{,}42 - 0{,}28 - 0{,}28 = 0{,}02$ (et comme c'est positif, la situation décrite dans l'énoncé est possible, ce qui n'est pas clair a proiri). Et A et B ne sont pas indépendants, sinon on aurait dû avoir $\Pr(A \mid B) = \Pr(A)$.*

4. Dans chacun des descriptions suivantes, donner le nombre de valeurs/configurations/objets du type spécifié. Le terme “mot” signifie une chaîne finie de caractères (lettres).

a. Les mots de longueur 13 qui contiennent 9 lettres A et 4 lettres B.

$\surd$ *Le nombre de choix pour les positions des « A » :* $\binom{13}{4} = 715$.

b. Les monômes de degré 7 en les 6 variables u, v, w, x, y, z (par exemple uvw^2xyz ou v^5z^2).

$\surd$ *Le nombre de choix de* 7 *parmi* 6 *avec répétitions, soit* $\binom{6+7-1}{7} = \binom{12}{7} = \binom{12}{5} = 792$.

c. Classements (c’est-à-dire listes ordonnées) de 5 noms, choisis parmi 12 candidats.

$\surd$ *C’est* $12^{\underline{5}} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95040$.

d. Les chemins de réseau menant du point $(1, 1)$ vers $(6, 11)$

$\surd$ *Par translation, c’est aussi le nombre de chemins de réseau de* $(0, 0)$ *vers* $(5, 10)$*, soit* $\binom{5+10}{5} = \binom{15}{5} = 3003$.

e. Les nombres naturels $n < 10^7 = 10\,000\,000$ dont les chiffres de leur écriture décimale sont croissants au sens large, par exemple 1223339, 12458 ou 0 (on peut écrire chacun à 7 chiffres sans que cela ne change rien; les deux dernier deviennent alors 0012458 respectivement 0000000).

$\surd$ *Le nombre de choix de* 7 *parmi* 10 *avec répétitions, soit* $\binom{10+7-1}{7} = \binom{16}{7} = 11440$.

f. Façons de composer une glace à 3 boules, choisies parmi 16 parfums (on peut avoir plusieurs boules identiques).

$\surd$ *Le nombre de choix de* 3 *parmi* 16 *avec répétitions, soit* $\binom{16+3-1}{3} = \binom{18}{3} = 816$.

5. On considère une variable aléatoire X dont la loi est la suivante ; elle prend l’une des valeurs $0, 1, 2, 3, 4$, avec probabilités respectivement (0): 0,008, (1): 0,072, (2): 0,232, (3): 0,288, et (4): 0,400. Calculer pour X: son espérance mathématique $\mathbf{E}(X)$, sa variance $\mathrm{Var}(X)$, et son écart-type $\sigma(X)$.

$\surd$ *La somme de ces probabilités est effectivement* 1,000*, comme il se doit. Or* $\mathbf{E}(X) = \sum_i \Pr(X = i)i = 0 + 0{,}072 + 0{,}464 + 0{,}864 + 1{,}600 = 3{,}000$ *et* $\mathrm{Var}(X) = \sum_i \Pr(X = i)(i - \mathbf{E}(X))^2 = 0{,}072 + 0{,}288 + 0{,}232 + 0 + 0{,}400 = 0{,}992$. *Finalement* $\sigma(X) = \sqrt{0{,}992} \approx 0{,}996$.

6. On lance un dé équilibré plusieurs fois de rang, et on note $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les résultats.

a. Quelle est la probabilité $\Pr(a_1 \leq a_2)$? [On peut évidemment ignorer les lancers après le second.]

b. Quelle est la probabilité $\Pr(a_1 \leq a_2 \leq a_3)$?

c. Donner une formule qui décrit en fonction de $n \in \mathbf{N}$ la probabilité $\Pr(a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n)$ que les n premiers résultats soient croissants au sens large.

Fin.