Examen terminal Combinatoire (L2) jeudi 15 juin 2017
14h00-16h00

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Là où on demande un nombre, donner l'expression qui le décrit (par exemple un produit ou coefficient binomial), et si possible sa valeur numérique. Dans le cas des nombres réels, approximer cette valeur avec 4 chiffres après la virgule.

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $Y \subset X$, (c'est-à-dire $Y \subseteq X$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$».

Ces possibilités étant mutuellement exclusives, toute réponse qui consiste à choisir plus d'une option est fausse. $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1 \,\}$ et $Y = \{\, (t, 3 - 2t) \mid t \in \mathbf{R} \,\}$.
b. $X = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x - 3y = 7 \,\}$, et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 5x + 2y = 8 \,\}$.
c. $X = \{\, n \in \mathbf{N} \mid n \text{ divise } 21 \,\}$ et $Y = \{\, n \in \mathbf{N} \mid n \text{ divise } 84 \,\}$.
d. $X = f(A) \cap f(B)$ et $Y = f(A \cap B)$ (ici $f(S)$ désigne l'image directe de l'ensemble S par f), où $A = [0, 3]$ et $B = [1, 4]$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto 3x + 7$.
e. $X = g^{-1}(C) \cup g^{-1}(D)$ et $Y = g^{-1}(C \cup D)$ (ici $g^{-1}(S)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble S par g), où $C = [0, 1]$ et $D = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$, et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \sin(x^2 - 4x + 3)$.

2. On jette 5 fois un dé équilibré (à 6 faces). Quelle est la probabilité pour qu'apparaisse au moins une fois la face 3 ?

3. Dans chacun des choix ou ensembles suivants, donner le nombre de possibilités respectivement éléments. Le terme "mot" signifie une chaîne quelconque de caractères (lettres).

a. Les évolutions du score (c'est-à-dire les suites des scores intermédiaires) possibles pour un match de foot, sachant que celui-ci se termine sur un score de 6–5.
b. Les mots de longueur 13 qui contiennent 4 lettres A et 9 lettres B.
c. Les commandes de 5 pizzas *distinctes*, choisies parmi 14 types de pizza proposés.
d. Les monômes en x, y, z de degré 9 (par exemple x^3yz^5 ou x^2y^7).
e. Les applications injectives $\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
f. Les suites $(a_1, \ldots, a_7)$ avec $a_i \in \mathbf{N}$ pour tout i, qui vérifient $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_7 \leq 10$.

4. Une expérience aléatoire consiste a tirer d'une urne, qui contient au départ 7 boules numérotées de 1 à 7, successivement toutes les boules, et d'obtenir ainsi une permutation de ces nombres ; on suppose l'équiprobabilité entre les 7! permutations. Soit A l'évènement «le nombre de la première boule tirée est pair», et B l'évènement «la boule numéro 3 est tirée avant la boule numéro 4».

a. Déterminer les probabilités $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$ de ces évènements.
b. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(A \cap B)$, et en déduire la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(A \mid B)$. [Indication: on pourrait considérer séparément les 7 possibilités pour la première boule tirée.]
c. Est-ce que A et B sont des évènements indépendants ?

5. Dans un jeu de 52 cartes (avec 4 «couleurs» et 13 «valeurs») on sélectionne une «main» de 5 cartes ; l'ordre des cartes dans une main est ignoré.

a. Combien de mains différentes y a-t-il ?
b. Combien parmi ces mains contiennent une carte de chacune des 4 couleurs ?
c. Quelle est la probabilité pour qu'une main choisie au hasard contienne au moins une carte de chacune des 4 couleurs ?
d. Quelle est la probabilité pour qu'une main choisie au hasard contienne 5 *valeurs* distinctes ?

6. On fait une expérience aléatoire qui consiste a lancer une pièce équilibrée 3 fois. La variable aléatoire X compte le nombre de fois qu'on obtient «pile». Déterminer l'espérance $\mathbf{E}(X)$, la variance $\mathrm{Var}(X)$, et l'écart type σ_X de X.

Fin.