Corrigé Examen terminal Combinatoire (L2) jeudi 5 janvier 2017
14h00-16h00

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $Y \subset X$, (c'est-à-dire $Y \subseteq X$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$».

Ces possibilités étant mutuellement exclusives, toute réponse qui consiste à choisir plus d'une option est fausse. $\mathcal{P}(A)$ désigne l'ensemble des parties de A. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{\, (x, \sqrt{1-x^2}) \mid x \in \mathbf{R} \,\}$ et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$.

$\surd$ *Comme* $y = \sqrt{1-x^2}$ *implique* $x^2 + y^2 = 1$, *on a* $X \subseteq Y$. *Mais* $X \neq Y$ *car par exemple* $(0, -1) \in Y \setminus X$. *Donc B.*

b. $X = \{\, 7n \mid n \in \mathbf{N} \,\}$ et $Y = \{\, n \in \mathbf{N} \mid n$ est divisible par $21 \,\}$.

$\surd$ *X contient Y mais pas réciproquement: C.*

c. $X = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x < 2y + 1 \,\}$, et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \,\}$.

$\surd$ *Les deux ensembles sont égaux, car* $3x < 2y + 1 \iff \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. *Réponse A.*

d. $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $Y = f^{-1}(A \cup B)$ (ici $f^{-1}(S)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble S par f), où $A = [0, 3]$ et $B = [1, 4]$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$.

$\surd$ *On a toujours* $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = \{\, x \mid f(x) \in A$ *ou* $f(x) \in B \,\} = f^{-1}(A \cup B)$, *donc A.*

e. $X = f(C) \cap f(D)$ et $Y = f(C \cap D)$ (ici $f(S)$ désigne l'image directe de l'ensemble S par f), où $C = [-\pi, \pi]$ et $D = [0, 2\pi]$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \cos(x + \frac{\pi}{6})$.

$\surd$ *On a toujours* $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$, *car si* $x \in C \cap D$ *alors* $f(x) \in f(C)$ *et également* $f(a) \in f(D)$. *Mais les deux ne sont pas égaux en général, et dans l'exemple concret non plus: on a* $X = [-1, 1] \cap [-1, 1] = [-1, 1]$ *mais* $1 \notin Y = ([-1, \frac{1}{2}\sqrt{3}])$. *Donc C.*

2. On jette un dé équilibré 5 fois. Quelle est la probabilité qu'au moins une fois on obtienne 1 ou 2 comme résultat ?

$\surd$ *L'évènement complémentaire est d'obtenir* 5 *fois de suite un résultat parmi* $3, 4, 5, 6$, *pour lequel la probabilité est* $(2/3)^5 = \frac{2^5}{3^5}$. *La probabilité demandée est donc* $1 - \frac{2^5}{3^5} = \frac{211}{243} \approx 0{,}8683$.

3. Dans chacun des choix ou ensembles suivants, donner le nombre de possibilités respectivement éléments. Le terme “mot” signifie une chaîne de caractères (lettres).

a. Les mots de longueur 12 qui contiennent 5 lettres A et 7 lettres B.

$\surd$ *Le nombre de choix pour les positions des « A » :* $\binom{12}{5} = 792$.

b. Les monômes en x, y, z, t de degré 7 (par exemple x^3yzt^2 ou y^3t^4).

$\surd$ *Le nombre de choix de* 7 *parmi* 4 *avec répétitions, soit* $\binom{7+4-1}{7} = \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$.

c. Les applications injectives $\{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$\surd$ *C'est le nombre des* 4*-arrangements dans un ensemble de* 10, *soit* $10^{\underline{4}} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

d. Les évolutions du score (c'est-à-dire les suites des scores intermédiaires) possibles pour un match de foot, sachant qu'il se termine sur une score de 6–4.

$\surd$ *Le nombre de chemins de réseau do* $(0, 0)$ *vers* $(6, 4)$ *est* $\binom{6+4}{6} = \binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210$.

e. Les suites $(a_1, \ldots, a_{10})$ avec $a_i \in \mathbf{N}$ pour tout i, qui vérifient $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_9 < a_{10} \leq 16$.

$\surd$ *Le nombre de choix de* 10 *parmi* 17 *sans répétitions, soit* $\binom{17}{10} = \binom{17}{7} = 19448$.

f. Les commandes que peut faire de 4 pizzas, choisissant parmi 18 types de pizza proposés.

$\surd$ *Le nombre de choix de* 4 *parmi* 18 *avec répétitions, soit* $\binom{18+4-1}{4} = \binom{21}{4} = 5985$.

4. Dans un jeu de 52 cartes (avec 4 «couleurs» et 13 «valeurs») on sélectionne une «main» de 4 cartes ; l'ordre des cartes dans une main est ignoré.

a. Combien de mains différentes y a-t-il ?

$\surd$ $\binom{52}{4}$, *qui vaut* 270725

b. Combien parmi ces mains contiennent une carte de chacune des 4 couleurs ?

$\surd$ *Les mains qui vérifient cette condition sont précisément décrites en donnant pour chacune de* 4 *couleurs la valeur de la carte de cette couleur, donc le nombre de possibilités est* $13^4 = 28561$.

c. Quelle est la probabilité qu'une main choisie au hasard contienne une carte de chacune des 4 couleurs ?

$\surd$ *C'est* $13^4/\binom{52}{4} = 28561/270725 = 2197/20825 \approx 0{,}1055$.

d. Quelle est la probabilité qu'une main choisie au hasard contienne des cartes ayant 4 *valeurs* distinctes ?

$\surd$ *Ici le nombre de cas favorables peut être calculé comme le produit du nombre* $\binom{13}{4}$ *de sous-ensembles de* 4 *valeurs parmi les* 13 *et le nombre* 4^4 *de façon d'associer à chaque valeur une couleur. Au total on obtient* $\binom{13}{4} \times 4^4/\binom{52}{4} = \frac{13\times12\times11\times10\times4^4}{4!} \times \frac{4!}{52\times51\times50\times49} = \frac{48\times44\times40}{51\times50\times49} \approx 0{,}6761$.

5. Une expérience aléatoire consiste a sélectionner au hasard 3 parmi les 9 cases d'une grille de 3 lignes et 3 colonnes. Chacune des $\binom{9}{3}$ possibilités a la même probabilité. Soit A l'évènement «on a choisi une case dans chaque ligne», et B l'évènement «on a choisi une case dans chaque colonne».

a. Déterminer les probabilités $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$ de ces évènements.

$\surd$ *Le nombre de choix d'une case dans choix dans les trois lignes est* $3^3 = 27$, *et la probabilité est donc* $\mathbf{P}(A) = \frac{3^3}{\binom{9}{3}} = \frac{27}{84} = \frac{9}{28} \approx 0{,}3214$. *Par symétrie on a aussi* $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) = \frac{27}{84}$.

b. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(A \mid B)$ (dit : A sachant B).

$\surd$ *Parmi les* 27 *éventualités qui constituent* B, *celles qui sont dans* $A \cap B$ *correspondent aux* $3! = 6$ *permutations de* 3. *Donc* $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \approx 0{,}2222$.

c. Est-ce que A et B sont des évènements indépendants ?

$\surd$ *Si* A *et* B *étaient indépendants, on aurait* $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \mid B)$, *ce qui n'est visiblement pas le cas. Donc* A *et* B *sont dépendants.*

6. On fait une expérience aléatoire qui consiste a lancer une pièce équilibrée 2 fois. En termes des résultats de cette expérience, une variable aléatoire X est définie ainsi : si le premier résultat était pile et le second face on a $X = 3$, si le premier résultat était face et le second pile on a $X = 0$, et dans les autres cas (deux résultats identiques) on a $X = 1$. Déterminer l'espérance $\mathbf{E}(X)$ de X. [Question bonus: calculer aussi la variance $\mathrm{Var}(X)$ et l'écart-type σ_X.]

$\surd$ *Les probabilités des valeurs possibles de* X *sont* $\mathbf{P}(X = 3) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{4}$ *et* $\mathbf{P}(X = 1) = 2$. *On a alors* $\mathbf{E}(X) = 0\mathbf{P}(X = 0) + 1\mathbf{P}(X = 1) + 3\mathbf{P}(X = 3) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$. *La variance est* $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}((X - \frac{5}{4})^2 = (-\frac{5}{4})^2\frac{1}{4} + (-\frac{1}{4})^2\frac{1}{2} + (\frac{7}{4})^2\frac{1}{4} = \frac{25+2+49}{64} = \frac{76}{64} = \frac{19}{16}$, *et l'écart-type* $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{19}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{19} \approx 1{,}0897$.

Fin.