Examen terminal Combinatoire (L2) jeudi 16 juin 2016
14h00-16h00

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Vous pouvez laisser dans une expression des puissances ou des coefficients binomiaux, tels que 7^9 ou $\binom{19}{8}$, sans calculer leur valeurs numériques.

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit : A : $X = Y$, B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ et $X \neq Y$), C : $Y \subset X$, D : aucun des trois précédents, c'est-à-dire on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$.

a. $X = \{\, [2, n] \mid n \in \mathbf{N}, n \geq 2 \,\}$ et $Y = \{\, [a, b] \mid a, b \in \mathbf{R}, a < b \,\}$, où $[a, b]$ désigne l'intervalle réel $\{\, x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$. (Remarque : X, Y ne sont pas des sous-ensembles de $\mathbf{R}$, mais de $\mathcal{P}(\mathbf{R})$.)

b. $X = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 2y - 4 \,\}$, et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x + 2 \,\}$.

c. $X = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - 3)(y^2 + 3x - 2) = 0 \,\}$ et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -\sqrt{2 - 3x} \,\}$.

d. $X = f(A) \cup f(B)$ et $Y = f(A \cup B)$ (où $f(S)$ désigne l'image directe de l'ensemble S par f) avec concrètement $f = \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et les intervalles $A = [-\pi, \pi]$ et $B = [0, 2\pi]$ de $\mathbf{R}$.

e. $X = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et $Y = f^{-1}(C \cup D)$ (où $f^{-1}(S)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble S par f) avec concrètement $f = \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et les intervalles $C = [0, \frac{3}{4}]$ et $D = [\frac{1}{2}, 2]$ de $\mathbf{R}$.

2. Dans un jeu de 52 cartes (avec 4 « couleurs » et 13 « valeurs ») on sélectionne une « main » de 4 cartes ; l'ordre des cartes dans une main est ignoré.

a. Combien de mains différentes y a-t-il ?

b. Combien parmi ces mains ne contiennent pas deux cartes avec une même couleur ?

c. Quelle est la probabilité qu'une main choisie au hasard contienne 4 couleurs différentes ?

3. Dans chacun des choix ou ensembles suivants, donner le nombre de possibilités respectivement éléments. Le terme "mot" signifie une chaîne de caractères, chacun pris parmi les lettres spécifiés.

a. Les monômes en t, x, y, z de degré 8 (par exemple t^2xyz^4 ou x^2y^6).

b. Les commandes que peut faire dans un restaurant un groupe de 7 personnes, choisissant chacune un plat parmi 6 proposés sur la carte. Pour chaque plat seulement le *nombre* de choix est noté.

c. Les mots de longueur 17 qui contiennent 7 lettres A et 10 lettres B.

d. Les suites $(a_1, \ldots, a_8) \in \mathbf{N}^8$ qui vérifient $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_7 < a_8 \leq 12$.

e. Les chemins de réseau allant de $(3, 4)$ vers $(15, 9)$ (par exemple (3,4)–(3,5)–(4,5)–(5,5)–(6,5)–(6,6)–(7,6)–(8,6)–(9,6)–(9,7)–(9,8)–(10,8)–(11,8)–(12,8)-(13,8)–(13,9)–(14,9)–(15,9)).

4. Dans un espace probabilisé, il est donné pour deux évènements A, B que $\mathbf{P}(A) = 5/12$, $\mathbf{P}(B) = 6/35$ et $\mathbf{P}(A^c \cap B^c) = 29/60$ (où E^c désigne l'événement complémentaire de E).

a. Déterminer $\mathbf{P}(A \cup B)$.

b. Déterminer $\mathbf{P}(A \cap B)$.

c. Est-ce que les évènements A, B sont indépendants ?

5. On jette un dé 5 fois. Quelle est la probabilité qu'au moins une fois on obtienne « 5 » ou « 6 » ?

6. Une variable aléatoire réelle X prend les valeurs $0, 1, 2, 3, 4$, avec probabilités respectives 2/16, 1/16, 5/16, 3/16, et 5/16. Calculer l'espérance mathématique $\mathbf{E}(X)$, la variance $\mathrm{Var}(X)$, et l'écart-type σ_X.

7. Une association compte parmi ses membres des habitants de trois quartiers qu'on désigne par A, B, C. Il y a 11 habitants du quartier A, 16 habitants du quartier B et 14 habitants du quartier C. Au sein de cette association il faut former un comité de 12 personnes.

a. De combien façons peut-on choisir ce comité, sans condition sur la provenance de ses membres ?

b. Si l'on exige que le comité contienne au moins un membre provenant de chaque quartier, quelle est le nombre de possibilités restantes de choisir ce comité?

Fin.