Corrigé Examen terminal Combinatoire (L2) jeudi 16 juin 2016
14h00-16h00

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit : A : $X = Y$, B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ et $X \neq Y$), C : $Y \subset X$, D : aucun des trois précédents, c'est-à-dire on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$.

a. $X = \{\, [2, n] \mid n \in \mathbf{N}, n \geq 2 \,\}$ et $Y = \{\, [a, b] \mid a, b \in \mathbf{R}, a < b \,\}$, où $[a, b]$ désigne l'intervalle réel $\{\, x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b \,\}$. (Remarque : X, Y ne sont pas des sous-ensembles de $\mathbf{R}$, mais de $\mathcal{P}(\mathbf{R})$.)

$\surd$ *Chaque intervalle dans X est aussi un élément de Y, mais Y contient des intervalles tels que $[1, \pi]$ qui ne sont pas élément de X. Donc B.*

b. $X = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 2y - 4 \,\}$, et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x + 2 \,\}$.

$\surd$ *Les deux conditions sont équivalentes, d'où $X = Y$, réponse A.*

c. $X = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - 3)(y^2 + 3x - 2) = 0 \,\}$ et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -\sqrt{2 - 3x} \,\}$.

$\surd$ *La second condition implique la première : $y = -\sqrt{2 - 3x} \Rightarrow y^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 3)(y^2 + 3x - 2) = 0$, et $Y \subseteq X$; Mais $X \not\subseteq Y$ car par exemple $(3, 1) \in X$ mais $(3, 1) \notin Y$. Donc C.*

d. $X = f(A) \cup f(B)$ et $Y = f(A \cup B)$ (où $f(S)$ désigne l'image directe de l'ensemble S par f) avec concrètement $f = \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et les intervalles $A = [-\pi, \pi]$ et $B = [0, 2\pi]$ de $\mathbf{R}$.

$\surd$ *On a toujours $f(A) \cup f(B) = \{\, f(x) \mid x \in A \vee x \in B \,\} = f(A \cup B)$. Donc réponse A.*

e. $X = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et $Y = f^{-1}(C \cup D)$ (où $f^{-1}(S)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble S par f) avec concrètement $f = \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et les intervalles $C = [0, \frac{3}{4}]$ et $D = [\frac{1}{2}, 2]$ de $\mathbf{R}$.

$\surd$ *On a toujours $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = \{\, x \mid f(x) \in C \vee f(x) \in D \,\} = f^{-1}(C \cup D)$. Donc réponse A.*

2. Dans un jeu de 52 cartes (avec 4 « couleurs » et 13 « valeurs ») on sélectionne une « main » de 4 cartes ; l'ordre des cartes dans une main est ignoré.

a. Combien de mains différentes y a-t-il ?

$\surd$ *$\binom{52}{4}$, qui vaut 270725*

b. Combien parmi ces mains ne contiennent pas deux cartes avec une même couleur ?

$\surd$ *Il faut choisir une carte de chaque couleur, $13^4 = 28561$ possibilités.*

c. Quelle est la probabilité qu'une main choisie au hasard contienne 4 couleurs différentes ?

$\surd$ $28561/270725 \approx 0{,}1055$.

3. Dans chacun des choix ou ensembles suivants, donner le nombre de possibilités respectivement éléments. Le terme "mot" signifie une chaîne de caractères, chacun pris parmi les lettres spécifiés.

a. Les monômes en t, x, y, z de degré 8 (par exemple t^2xyz^4 ou x^2y^6).

$\surd$ *Le nombre de choix de 4 parmi 8 avec répétitions, soit $\binom{8+4-1}{8} = \binom{11}{8} = \binom{11}{3} = 165$.*

b. Les commandes que peut faire dans un restaurant un groupe de 7 personnes, choisissant chacune un plat parmi 6 proposés sur la carte. Pour chaque plat seulement le *nombre* de choix est noté.

$\surd$ *Le nombre de choix de 5 parmi 9 avec répétitions, soit $\binom{7+6-1}{7} = \binom{12}{7} = \binom{12}{5} = 792$.*

c. Les mots de longueur 17 qui contiennent 7 lettres A et 10 lettres B.

$\surd$ *Le nombre de choix pour les positions des « A » : $\binom{17}{7} = 19448$.*

d. Les suites $(a_1, \ldots, a_8) \in \mathbf{N}^8$ qui vérifient $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_7 < a_8 \leq 12$.

$\surd$ *Le nombre de choix de 8 parmi 12 sans répétitions, soit $\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = 495$.*

e. Les chemins de réseau allant de $(3, 4)$ vers $(15, 9)$ (par exemple (3,4)–(3,5)–(4,5)–(5,5)–(6,5)–(6,6)–(7,6)–(8,6)–(9,6)–(9,7)–(9,8)–(10,8)–(11,8)–(12,8)-(13,8)–(13,9)–(14,9)–(15,9)).

$\surd$ *Ce nombre est $\binom{(15-3)+(9-4)}{15-3} = \binom{17}{12} = \binom{17}{5} = 6188$.*

4. Dans un espace probabilisé, il est donné pour deux évènements A, B que $\mathbf{P}(A) = 5/12$, $\mathbf{P}(B) = 6/35$ et $\mathbf{P}(A^c \cap B^c) = 29/60$ (où E^c désigne l'événement complémentaire de E).

a. Déterminer $\mathbf{P}(A \cup B)$.

$\surd$ *On a* $\mathbf{P}(A \cup B)^c = \mathbf{P}(A^c \cap B^c) = 29/60$ *et donc* $\mathbf{P}(A \cup B) = 1 - 29/60 = 31/60$.

b. Déterminer $\mathbf{P}(A \cap B)$.

$\surd$ *C'est* $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = 5/12 + 6/35 - 31/60 = (175 + 72 - 217)/420 = 30/420 = 1/14$.

c. Est-ce que les évènements A, B sont indépendants ?

$\surd$ *On a* $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/14 = (5/12) \times (6/35) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, *donc oui, ils sont indépendants.*

5. On jette un dé 5 fois. Quelle est la probabilité qu'au moins une fois on obtienne « 5 » ou « 6 » ?

$\surd$ *L'évènement complémentaire est d'obtenir* 5 *fois de suite un résultat inférieur à* 5, *pour lequel la probabilité est* $(2/3)^5 = \frac{2^5}{3^5}$. *La probabilité demandée est donc* $1 - \frac{2^5}{3^5} = \frac{211}{243} \approx 0{,}868$.

6. Une variable aléatoire réelle X prend les valeurs $0, 1, 2, 3, 4$, avec probabilités respectives $2/16$, $1/64$, $5/16$, $3/16$, et $5/16$. Calculer l'espérance mathématique $\mathbf{E}(X)$, la variance $\mathrm{Var}(X)$, et l'écart-type σ_X.

$\surd$ *L'espérance est* $\mathbf{E}(X) = (0 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 5 + 3 \times 3 + 4 \times 5)/16 = 5/2$. *La variance est* $\mathrm{Var}(X) = (25/4\times 2 + 9/4\times 1 + 1/4\times 5 + 1/4\times 3 + 9/4\times 5)/16 = 28/16 = 7/4$ *; l'écart-type est* $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \frac{1}{2}\sqrt{7}$.

7. Une association compte parmi ses membres des habitants de trois quartiers qu'on désigne par A, B, C. Il y a 11 habitants du quartier A, 16 habitants du quartier B et 14 habitants du quartier C. Au sein de cette association il faut former un comité de 12 personnes.

a. De combien façons peut-on choisir ce comité, sans condition sur la provenance de ses membres ?

$\surd$ $\binom{11+16+14}{12} = \binom{41}{12}$ *(c'est beaucoup).*

b. Si l'on exige que le comité contienne au moins un membre provenant de chaque quartier, quelle est le nombre de possibilités restantes de choisir ce comité?

$\surd$ *Soit* $N_{BC} = \binom{20+13}{12}$ *le nombre de comités qu'on peut choisir avec que des membres des quartiers* B, C, *et de façon similaire* $N_{AC} = \binom{7+13}{12}$ *et* $N_{AB} = \binom{7+20}{12}$. *On cherche le complémentaire de la réunion des ces ensembles de mauvais choix, mais ces ensembles ne sont pas disjoints : on a* $N_B = \binom{20}{12}$ *comités qui ne contiennent que des habitants de* B, *et qui comptent donc dans* N_{AB} *et dans* N_{BC} *; de façon similaire* $N_C = \binom{13}{12}$ *comités ne contiennent que des habitants de* C *et comptent dans* N_{AC} *et dans* N_{BC} *(il n'y a pas de comités possibles avec que des habitants de* A, *c'est-à-dire* $N_A = \binom{7}{12} = 0$*). Le nombre cherché est* $\binom{40}{12} - N_{BC} - N_{AC} - N_{AB} + N_B + N_C = 5\,586\,853\,480 - 354\,817\,320 - 125\,970 - 17\,383\,860 + 125\,970 + 13 = 5\,214\,652\,313$.

Fin.