Examen terminal Combinatoire (L2) mercredi 6 janvier 2016
14h00-16h00

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée. Vous pouvez laisser dans une expression des puissances ou des coefficients binomiaux, tels que 7^9 ou $\binom{19}{8}$, sans calculer leur valeurs numériques.

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit : A : $X = Y$, B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ et $X \neq Y$), C : $Y \subset X$, D : aucun des trois précédents, c'est-à-dire on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $Y \subseteq X$.

a. $X = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0 \,\}$, et $Y = \{\, (0, t) \in \mathbf{R}^2 \mid t \in \mathbf{R} \,\} \cup \{\, (t, 0) \in \mathbf{R}^2 \mid t \in \mathbf{R} \,\}$.

b. $X = \{\, [0, n] \mid n \in \mathbf{N} \,\}$ et $Y = \{\, [1, n] \mid n \in \mathbf{N} \,\}$, où $[a, b]$ désigne l'intervalle $\{\, i \in \mathbf{N} \mid a \leq i \leq b \,\}$ de $\mathbf{N}$. (Remarque : X, Y ne sont pas des sous-ensembles de $\mathbf{N}$, mais de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$.)

c. $X = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = \sqrt{3y + 2} \,\}$ et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 = 3y + 2 \,\}$.

d. $X = f(A) \cap f(B)$ et $Y = f(A \cap B)$ (où $f(S)$ désigne l'image directe de l'ensemble S par f) avec concrètement $f = \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et les intervalles $A = [-\pi, \pi]$ et $B = [0, 2\pi]$ de $\mathbf{R}$.

e. $X = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ et $Y = f^{-1}(C \cap D)$ (où $f^{-1}(S)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble S par f) avec concrètement $f = \sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et les intervalles $C = [0, \frac{3}{4}]$ et $D = [\frac{1}{2}, 2]$ de $\mathbf{R}$.

2. Dans un jeu de 32 cartes (avec 4 «couleurs» et 8 «valeurs») on sélectionne une «main» de 5 cartes ; l'ordre des cartes dans une main est ignoré.

a. Combien de mains différentes y a-t-il ?

b. Combien parmi ces mains ne contiennent pas deux cartes avec une même valeur ?

c. Quelle est la probabilité qu'une main choisie au hasard contienne 5 valeurs différentes ?

3. Dans chacun des choix ou ensembles suivants, donner le nombre de possibilités respectivement éléments. Le terme “mot” signifie une chaîne de caractères, chacun pris parmi les lettres spécifiés.

a. Les monômes en x, y, z de degré 10 (par exemple x^3yz^6 ou x^8y^2).

b. Les commandes que peut faire dans un restaurant un groupe de 5 personnes, choisissant chacune un plat parmi 9 proposés sur la carte. Pour chaque plat seulement le *nombre* de choix est noté.

c. Les mots de longueur 13 qui contiennent 5 lettres A et 8 lettres B.

d. Les suites $(a_1, \ldots, a_8) \in \mathbf{N}^8$ qui vérifient $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_7 \leq a_8 \leq 12$.

e. Les évolutions de score (suites de scores intermédiaires) possibles pour un match de foot qui se termine sur une score de 10–7.

4. Dans un espace probabilisé, il est donné pour deux évènements A, B que $\mathbf{P}(A) = 5/8$, $\mathbf{P}(B) = 5/9$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = 5/6$.

a. Déterminer $\mathbf{P}(A \cap B)$.

b. Déterminer $\mathbf{P}(A^c \cup B^c)$ (où E^c désigne l'événement complémentaire de E).

c. Est-ce que les évènements A, B sont indépendants ?

5. Pour chaque jour de la semaine, une personne prise au hasard a une probabilité 1/7 d'être née un tel jour. Quelle est la probabilité *conditionnelle* que, parmi 3 personnes prises au hasard, une soit née un mercredi, sachant qu'il n'y a pas deux parmi les 3 qui sont nées le même jour de la semaine ?

6. On jette un dé 7 fois. Quelle est la probabilité qu'au moins une fois on obtienne le résultat «6» ?

7. Une variable aléatoire réelle X prend les valeurs $1, 3, 5, 7$, avec probabilités respectives 7/64, 11/64, 21/64, et 25/64. Calculer l'espérance mathématique $\mathbf{E}(X)$, la variance $\mathrm{Var}(X)$, et l'écart-type σ_X.

8. Une association compte parmi ses membres des habitants de trois quartiers qu'on désigne par A, B, C. Il y a 7 habitants du quartier A, 20 habitants du quartier B et 13 habitants du quartier C. Au sein de cette association il faut former un comité de 12 personnes.

a. De combien façons peut-on choisir ce comité, sans condition sur la provenance de ses membres ?

b. Si l'on exige que le comité contienne au moins un membre provenant de chaque quartier, quelle est le nombre de possibilités restantes de choisir ce comité?

c. [bonus] Si le comité est formé par tirage au sort (toutes les possibilités comme dans la question *a* ayant la même probabilité), quel est la probabilité (en 3 chiffres après la virgule de précision) que le comité contienne *au moins deux* habitants de chaque quartier ?

Fin.