Corrigé Examen terminal Combinatoire (L2) mercredi 7 janvier 2015
14h00-16h00

1. Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants.

a. $\{\,(a,b,c,d) \in \mathbf{N}^4 \mid a+b+c+d=9\,\}$

$\surd$ *Le nombre est* $\binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{9} = \binom{12}{3} = 220$*; on peut justifier la formule par exemple en comptant le nombre de manières de choisir* 3 *symboles "+" parmi* 12*, les* 9 *restants étant des unités "|".*

b. $\{\,f{:}\{1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \mid f \text{ est injectif}\,\}$

$\surd$ $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

c. L'ensemble de "mains" à 3 cartes (sans ordre) pouvant être choisies dans un jeu de 52 cartes (4 enseignes et 13 valeurs) telles que la main contient cartes d'au moins deux enseignes différentes.

$\surd$ *Le nombre total des mains est* $\binom{52}{3} = 22100$*, dont il faut exclure les mains à une seule enseigne, qui sont en nombre* $4 \times \binom{13}{3} = 4 \times 286 = 1144$ *et le résultat est* $22100 - 1144 = 20956$*.*

d. L'ensemble des "mots" formés de 10 lettres `A` et 5 lettres `B`, mais sans occurrence de `BB` (c'est-à-dire de deux lettres `B` adjacentes). [Indication: on pourra traduire le problème en un problème équivalent qui est plus facile à résoudre.]

$\surd$ *Le nombre est* $\binom{11}{5} = 462$*. Une façon de le justifier est de choisir un mot avec* $10-5+1 = 6$ *lettres* `A` *et* 5 *lettres* `B` *sans restrictions, de* $\binom{11}{5}$ *manières, et de rajouter une lettre* `A` *(supplémentaire) entre chacune des* 4 *paires de* `B` *qui se suivent. Une autre approche est de constater qu'il y a* 6 *groupes de* `A` *séparés par les* 5 *lettres* `B` *dont seulement les deux aux extrémités peuvent être vide, et on compte donc* $\{\,(a,b,c,d,e,f) \in \mathbf{N}^6 \mid b,c,d,e > 0, a+b+c+d+e+f = 10\,\}$ *; en posant* $b' = b-1, \ldots, e' = e-1$ *on obtient l'équation* $a+b'+c'+d'+e'+f = 6$ *avec toutes les variables dans* $\mathbf{N}$ *sans contraintes supplémentaires, et on résout comme dans la question a. Encore une autre façon d'obtenir ce résultat est de commencer en alignant les* 10 *lettres* `A`*, qui délimitent* 11 *trous (dont* 2 *aux extrémités), et ensuite de choisir* 5 *parmi ces trous (*$\binom{11}{5}$ *possibilités) pour y placer une lettre* `B` *(les séparations garantissent que deux* `B` *ne seront jamais adjacents).*

2. Dans cette question on considère des chemins sur un réseau $\mathbf{Z}^2$ de points, un chemin étant formé d'une suite de pas qui peuvent avancer dans l'une de deux directions (à partir d'un point (i,j) un pas peut avancer ou bien vers le point $(i+1,j)$, ou bien vers le point $(i,j+1)$).

a. Donner une formule pour le nombre de tels chemins qui mènent du point $(0,0)$ au point (a,b), avec $a,b \in \mathbf{N}$, ainsi qu'une justification informelle de cette formule.

$\surd$ *La formule est* $\binom{a+b}{a}$*. On pourra la justifier car on détermine un chemin en choisissant les positions des* a *pas horizontaux parmi* $a+b$ *pas au total. On peut aussi dire que le fait que (pour* $a,b > 0$*) chaque chemin vers* (a,b) *passe par un et un seul des points* $(a-1,b)$ *et* $(a,b-1)$ *donne une relation de récurrence dont la formule* $\binom{a+b}{a}$ *est une solution, car* $\binom{a+b}{a} = \binom{a-1+b}{a-1} + \binom{a+b-1}{a}$ *pour* $a,b > 0$*.*

b. Combien de chemins mènent du point $(-2,-6)$ au point $(3,3)$?

$\surd$ *Ce nombre est* $\binom{a+b}{a}$ *où* $a = 3 - -2 = 5$ *et* $b = 3 - -6 = 9$ *sont le nombre de pas dans chacune des directions. Concrètement on obtient* $\binom{5+9}{5} = \binom{14}{5} = 2002$ *chemins.*

c. Parmi les chemins de la question précédente, un chemin est choisi au hasard selon une loi uniforme. Donner la probabilité de l'événement A que ce chemin passe par le point $(0,0)$.

$\surd$ *Le nombre de chemins pour lesquels* A *est réalisé est* $\binom{8}{2}\binom{6}{3} = 28 \times 20 = 560$*, et on a donc* $\mathbf{P}(A) = \frac{560}{2002} = \frac{40}{143} \approx 0{,}280$*.*

d. Pour la même expérience aléatoire, donner la probabilité de l'événement B que le chemin ne contient aucun point (x,y) avec $x > 0$ et $y < 0$. [Indication : on peut décrire B comme une réunion d'événements comme l'événement A ci-dessus, et qui sont deux à deux incompatibles.]

$\surd$ *Chaque chemin rencontrent la ligne d'équation* $x+y=0$ *en un point unique ; ceux pour lesquels* B *est réalisé sont ceux pour qui ce point* $(x,-x)$ *vérifie* $x \leq 0$*, et est donc nécessairement l'un des points* $(0,0)$*,* $(-1,1)$*,* $(-2,2)$*. Le nombre de chemins réalisant* B *est donc* $\binom{8}{2}\binom{6}{3} + \binom{8}{1}\binom{6}{2} + \binom{8}{0}\binom{6}{1} = 560 + 120 + 6 = 786$*, et* $\mathbf{P}(A) = \frac{686}{2002} = \frac{49}{143} \approx 0{,}343$*.*

3. Une urne contient 18 boules, dont 6 de chacune des couleurs jaune, rouge, bleue. On prend au hasard un échantillon de 5 boules. Soit B l'ensemble des boules, donc $\#B = 18$ (les boules individuelles sont identifiables) et $\Omega = \{\, E \in \mathcal{P}(B) \mid \#E = 5 \,\}$ l'ensemble des échantillons possibles.

a. Quel est le cardinal (nombre d'éléments) $\#\Omega$ de l'ensemble des échantillons ?

$\surd$ $\#\Omega = \#\binom{B}{5} = \binom{18}{5} = 8568.$

b. Combien parmi ces échantillons ne contiennent aucune boule jaune ?

$\surd$ *Il faut choisir les boules parmi les* 12 *restantes, donc le nombre est* $\binom{12}{5} = 792$

c. En supposant une probabilité uniforme sur Ω, quel est la probabilité que toutes les trois couleurs sont représentées dans un échantillon $\omega \in \Omega$? [Indication : on peut utiliser inclusion-exclusion.]

$\surd$ *De* Ω *on exclue l'événement de la question précédente ainsi que les deux événements similaires où la couleur rouge ou bleu est exclue. Mais ainsi on a exclu deux fois tous les échantillons qui sont dans l'intersection de deux événements exclus, c'est-à-dire qui ne contiennent qu'une seule couleur. Il convient donc de rajouter leur nombre, qui est* $3\binom{6}{5} = 18$ *(le facteur* 3 *est pour les trois couleurs possibles). On peut arrêter l'inclusion-exclusion là, car l'intersection des trois événements (chacune des couleurs est absente) est vide. Le nombre d'échantillons dans lesquelles toutes les trois couleurs sont représentées est donc* $8568 - 3 \times 792 + 18 = 6210$. *La probabilité demandée est alors* $\frac{6210}{8565} = \frac{345}{476} \approx 0{,}725$.

4. Soit E un ensemble fini non vide. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ contient autant d'éléments (qui sont donc des parties de E) qui sont de cardinal pair que d'éléments de cardinal impair.

$\surd$ *On fixe un élément* $e \in E$, *et on définit l'opération* $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ *qui rajoute* e *aux parties qui ne contiennent pas* e, *et enlève* e *aux parties qui le contiennent. Alors* $f(f(S)) = S$ *pour tout* $S \subseteq E$, *donc* f *est une bijection (elle est sa propre application réciproque). Il est aussi clair que* $\#f(S) \not\equiv \#S \pmod 2$ *pour tout* $S \subseteq E$, *autrement dit* f *change la parité de toute partie de* E. *Ainsi la restriction de* f *aux parties de cardinal pair donne une bijection avec les parties de cardinal impair ; les deux sous-ensembles de* $\mathcal{P}(E)$ *contiennent autant d'éléments.*

Fin.