Corrigé Contrôle continu L2, Combinatoire lundi 3 novembre 2014
14h00-15h00

1. Répondez «vrai» ou «faux». (Une justification n'est pas demandée.)

a. L'application $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ vérifiant $f(n) = n(n + 1)$ est injective.

$\surd$ *Vrai (par exemple parce que f est strictement croissant).*

b. Une application $X \to Y$ possède une application réciproque $Y \to X$ si et seulement si elle est bijective.

$\surd$ *Vrai.*

c. Si $f : X \to Y$ est une application, et $P \subseteq X$ est une partie finie, alors $\#P = \#f[P]$. (Ici $f[P]$ est l'image $\{ f(p) \mid p \in P \} \subseteq Y$ du sous-ensemble P par f, et $\#E$ le nombre d'éléments de E.)

$\surd$ *Faux. (Si f n'est pas injectif on peut prendre $P = \{x, y\}$ où $x \neq y$ mais $f(x) = f(y)$; alors $\#P = 2 \neq \#f(P) = 1$.)*

d. La relation R sur $\mathbf{Z}$ est transitive, où $R(m, n)$ est la condition $m + 3 \leq n$.

$\surd$ *Vrai. ($R(l, m)$ et $R(m, n)$ donnent $l + 3 < l + 6 \leq m + 3 \leq n$, d'où $l + 3 \leq n$ soit $R(l, n)$.)*

e. Si l'application $f : X \to Y$ est surjective, alors l'application $g : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ définie par $g(B) = f^{-1}[B]$ (l'image réciproque par f de la partie $B \subseteq Y$) est aussi surjective.

$\surd$ *Faux. (Si $f(x) = f(y)$, une partie $A \subseteq X$ contenant x mais par y ne peut pas s'écrire $A = g(B)$. Par contre g est injectif.)*

2. Soit $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^7$, l'ensemble des 7-uplets $(c_1, c_2, \ldots, c_7)$ de chiffres décimaux.

a. Quel est le nombre $\#X$ d'éléments de X ?

$\surd$ *C'est $10^7 = 10\,000\,000$, trop facile.*

b. Soit $X_1 = \{ (c_1, c_2, \ldots, c_7) \in X \mid \text{la somme } c_1 + c_2 + \cdots + c_7 \text{ est pair} \}$. Déterminer $\#X_1$.

$\surd$ *C'est $10^6 \times 5 = 5\,000\,000$: on peut choisir $c_1, \ldots, c_6$ indépendemment et librement, puis dans tout les cas il reste 5 choix pour c_7.*

c. Soit $X_2 = \{ (c_1, c_2, \ldots, c_7) \in X \mid \text{le produit } c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7 \text{ est pair} \}$. Déterminer $\#X_2$.

$\surd$ *Ici il faudra choisir au moins l'un des c_i pair. Il s'agit donc du complémentaire dans X de l'ensemble où touts les c_i sont impairs, que ensemble possède $5^7 = 78\,125$ éléments. Alors $\#X_2 = 10^7 - 5^7 = 9\,921\,875$.*

d. Soit $X_3 = \{ (c_1, c_2, \ldots, c_7) \in X \mid c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5 < c_6 < c_7 \}$. Déterminer $\#X_3$.

$\surd$ *Les éléments de X_3 sont en bijection avec $\binom{C}{7}$ avec $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, les ensembles à 7 chiffres (distincts): pour l'application dans un sens on prend l'ensemble des chiffres dans le 7-uplet, et pour l'application réciproque on range les éléments de l'ensemble en ordre croissant pour former un 7-uplet. Le nombre de tels ensembles est $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120 = \#X_3$.*

e. Soit $X_4 \subseteq X$ le sous-ensemble des 7-uplets contenant une suite de chiffres $1, 2, 3$ (formellement: les $(c_1, c_2, \ldots, c_7)$ tels qu'il existe $i \leq 5$ avec $c_i = 1$, $c_{i+1} = 2$, et $c_{i+2} = 3$). Déterminer $\#X_4$.

$\surd$ *Soit $A_i \subseteq X$ l'ensemble des $(c_1, c_2, \ldots, c_7)$ avec $c_i = 1$, $c_{i+1} = 2$, et $c_{i+1} = 3$, pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$; on a $X_4 = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_5$. Comme 3 valeurs sont fixes, on a $\#A_i = 10^4$ pour tout i. Les seules intersections non vides de deux ensembles A_i sont $A_1 \cap A_4$, $A_1 \cap A_5$, et $A_2 \cap A_5$, chacun possédant 10 éléments, et les intersection des trois A_i distincts sont toutes vides. Alors $\#X_4 = \#A_1 + \#A_2 + \cdots + \#A_5 - \#(A_1 \cap A_4) - \#(A_1 \cap A_5) - \#(A_2 \cap A_5) = 5 \times 10^4 - 3 \times 10 = 49\,970$.*

f. Soit $X_5 \subseteq X$ le sous-ensemble des 7-uplets ne contenant *aucune* suite de chiffres $7, 4, 7$ (condition définie formellement comme dans la question précédente). Déterminer $\#X_5$.

$\surd$ *Soient $B_1, \ldots, B_5$ les ensembles avec $7, 4, 7$ à partir de la positioni, de sorte que $X_5 = X \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_5)$, le calcul est similaire qu'avant, mais il y a les intersections non vides supplémentaires $B_1 \cap B_3$, $B_2 \cap B_4$, $B_3 \cap B_5$ (chacune à 10^2 éléments) ainsi que $B_1 \cap B_3 \cap B_5$ à 1 élément. Du coup $\#X_5 = 10^7 - 5 \times 10^4 + 3 \times 100 + 3 \times 10 - 1 = 9\,950\,329$.*

Fin.