Examen Combinatoire et Géométrie (L2)

lundi 22 juin 2020
10h, à remettre dans les 72 heures

Les 4+3 parties sont toutes indépendantes.

Combinatoire

1. Pour chaque point ci-dessous répondre par A, B, C, ou D selon les inclusions éventuelles entre X et Y, selon la clé suivante

A : on a $X \subseteq Y$ et $X \supseteq Y$ (autrement dit on a $X = Y$) ;
B : on a $X \subseteq Y$ et $X \not\supseteq Y$ (autrement dit on a $X \subset Y$) ;
C : on a $X \not\subseteq Y$ et $X \supseteq Y$ (autrement dit on a $X \supset Y$) ;
D : on a $X \not\subseteq Y$ et $X \not\supseteq Y$ (il n'y a pas d'inclusion entre X et Y).

[On rappelle que l'inclusion d'un ensemble P dans un ensemble Q est exprimé par $P \subseteq Q$, que le symbole «$\supseteq$» désigne la relation réciproque (donc $P \supseteq Q$ veut dire $Q \subseteq P$), et que $P \not\subseteq Q$ est la négation de $P \subseteq Q$. Chaque réponse doit indiquer une et une seule des lettres A, B, C, D.]

a. $X = \{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}\}$ et $Y = \{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,0\},\{4,1\},\{5,2\}\}$.
b. $X = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$, et $Y = \mathcal{P}(\{1,2\}) \cup \mathcal{P}(\{1,3\}) \cup \mathcal{P}(\{2,3\})$.
c. $X = \{\, (x, \sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \,\}$, et $Y = \{\, (y^2, y) \mid y \in \mathbb{R} \,\}$.

2. On définit un *octet* comme une suite $(b_0, \ldots, b_7)$ de 8 bits, c'est-à-dire un élément de $\{0,1\}^8$; on désigne par X l'ensemble des $2^8 = 256$ différents octets. En utilisant l'application $s : X \to \mathbb{N}$ donnée par $s(b_0, \ldots, b_7) = b_0 + \cdots + b_7$ on définit une relation $\mathcal{R}$ sur X par $x \,\mathcal{R}\, y \iff s(x) = s(y)$.

a. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b. Déterminer le nombre n de classes d'équivalence pour cette relation, et donner pour chaque classe un représentant de la classe ainsi que le nombre d'éléments de cette classe (vous aurez donc n tels nombres, dont la somme doit être 256).

3. Donner le cardinal (le nombre d'éléments) de chacun des ensembles suivants. Indiquer la méthode (formule) utilisée et la valeur numérique.

a. L'ensemble $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6,7\})$ de toutes les parties de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.
b. $\{\, P \subseteq \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\} \mid \#P = 7 \,\}$ (où $\#P$ désigne le cardinal de P), c'est-à-dire l'ensemble des parties de cardinal 7 de l'ensemble des diviseurs positifs de 60.
c. $\{\, (k_1, \ldots, k_7) \in \mathbb{N}^7 \mid k_1 + \cdots + k_7 = 13 \,\}$

4. L'égalité de polynômes $(1+X)^3(1+X)^3 = (1+X)^6$ donne, en appliquant la formule du binôme, concrètement $(1+3X+3X^2+X^3)(1+3X+3X^2+X^3) = 1+6X+15X^2+20X^3+15X^4+6X^5+X^6$. La phrase «comparer dans cette formule les coefficients en degré 3» veut dire : constater d'abord que le terme $20X^3$ à droite est obtenu à gauche comme $1 \times X^3 + 3X \times 3X^2 + 3X^2 \times 3X + X^3 \times 1$, et en tirer l'égalité des coefficients $1 \times 1 + 3 \times 3 + 3 \times 3 + 1 \times 1 = 20$. Formuler une égalité générale concernant les coefficients binomiaux qu'on obtient ainsi, pour un entier naturel n quelconque, en comparant dans la formule $(1+X)^n(1+X)^n = (1+X)^{2n}$ les coefficients en degré n.

Géométrie

5. Soit L le plan affine de $\mathbb{R}^4$ définie en forme implicite par

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Ecrire L en forme explicite.

sujet continué au verso

6. Soit H le plan affine de $\mathbb{R}^3$ défini en forme explicite par

$$H := \{\, \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{v} = (0,1,0) + \lambda(2,0,1) + \mu(-1,1,1), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \,\}.$$

Ecrire H en forme implicite.

7. Considérons le triangle de sommets

$$\underline{a} = (3,1), \qquad \underline{b} = (-2,2), \qquad \underline{c} = (-2,-1).$$

a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection $\underline{s}$ des médianes.
b. Déterminer les equations implicites des hauteurs $H_{\underline{a}}$ et $H_{\underline{b}}$.
c. Déterminer le point d'intersection $\underline{h}$ des hauteurs .
d. Déterminer l'équation implicite de la droite d'Euler.

Fin.